

Corrigés de la série 5 - CCINP

Planche n° 19

I) Donner un équivalent de $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ quand n tend vers $+\infty$.

II) Montrer que $(P|Q) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Montrer que $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(1) = 0\}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}_n[X]$, donner sa dimension et calculer $d(1, E)$.

I) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n+k}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}} = \sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right)$$

avec $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t}}$, continue sur $[0,1]$. Comme l'expression $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ est une somme de Riemann de f , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t}} = 2(\sqrt{2}-1).$$

Alors :

$$u_n \sim 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}.$$

II) L'application $(P, Q) \mapsto (P|Q) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$ est définie sur $\mathbb{R}_n[X]$, à valeurs dans \mathbb{R} , clairement symétrique et bilinéaire (par linéarité de la dérivation et du Σ).

De plus, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $(P|P) = \sum_{k=0}^n (P^{(k)}(1))^2 \geq 0$ et, avec la formule de Taylor :

$$(P|P) = 0 \iff \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P^{(k)}(1) = 0 \iff P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(1)}{k!} (X-1)^k = 0.$$

Finalement, $(P, Q) \mapsto (P|Q)$ est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$, symétrique, définie, positive, donc c'est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

On a $0 \in E$ et, toute combinaison linéaire de polynômes s'annulant en 1 s'annule aussi en 1, donc $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(1) = 0\}$ est bien un sous-espace de $\mathbb{R}_n[X]$.

De plus, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ appartient à E si et seulement si 1 est racine de P , donc si et seulement si il se

factorise par $X - 1$, donc :

$$E = \{(X - 1)Q, Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\} = \text{Vect}(X - 1, X(X - 1), X^2(X - 1), \dots, X^{n-1}(X - 1)).$$

On a $(X - 1, X(X - 1), X^2(X - 1), \dots, X^{n-1}(X - 1)) = (X - 1, X^2 - X, X^3 - X^2, \dots, X^n - X^{n-1})$, donc cette famille est libre car échelonnée en degrés. Comme elle est génératrice, c'est une base de E et comme elle contient $n - 1$ polynômes :

$$\dim E = n - 1.$$

Remarquons que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $(P|1) = P(1)$. Donc, $E = (1)^\perp$, soit $E^\perp = \text{Vect}(1)$.

Si p_E est la projection orthogonale sur E , on a $d(1, E) = \|1 - p_E(1)\|$ et comme $1 \in E^\perp$, on obtient :

$$d(1, E) = \|1\| = 1.$$

Planche n° 20

I) Ecrire la matrice de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x - 2y + z = 0$ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

II) On lance n fois un dé et on note X_k le chiffre obtenu au $k^{\text{ième}}$ lancer.

Donner la loi et la fonction de répartition F de X_k .

Donner, en fonction de F , la fonction de répartition F_n du maximum M_n atteint au cours des n lancers. La suite (F_n) converge-t-elle ? Uniformément ?

Mêmes questions pour le minimum m_n .

I) Posons :

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - 2y + z = 0\} = \{(x, y, -x + 2y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(u, v)$$

avec $u = (1, 0, -1)$ et $v = (0, 1, 2)$.

Le vecteur $w = (1, -2, 1)$ est normal à H et (u, v, w) est une base de \mathbb{R}^3 .

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et p la projection orthogonale sur H .

On a, pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$, $e_j = a_{1,j}u + a_{2,j}v + a_{3,j}w$, donc :

$$p(e_j) = a_{1,j}u + a_{2,j}v = e_j - a_{3,j}w.$$

De plus, $(e_j | w) = a_{3,j}(w | w) = a_{3,j}\|w\|^2$, donc :

$$p(e_j) = e_j - \frac{(e_j | w)}{\|w\|^2} w = e_j - \frac{1}{6}(e_j | w)(e_1 - 2e_2 + e_3).$$

Soit :

$$\left. \begin{aligned} p(e_1) &= e_1 - \frac{1}{6}(e_1 - 2e_2 + e_3) = \frac{1}{6}(5e_1 + 2e_2 - e_3) \\ p(e_2) &= e_2 + \frac{1}{3}(e_1 - 2e_2 + e_3) = \frac{1}{3}(e_1 + e_2 + e_3) \\ p(e_3) &= e_3 - \frac{1}{6}(e_1 - 2e_2 + e_3) = \frac{1}{6}(-e_1 + 2e_2 + 5e_3) \end{aligned} \right\} \Rightarrow M_B(p) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

II) Remarquons que les lancers sont indépendants, donc les variables X_k sont indépendantes.

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X_k(\Omega) = \llbracket 1, 6 \rrbracket$ et les faces du dé sont équiprobables, donc pour tout $i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$:

$$P(X_k = i) = \frac{1}{6}.$$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = P(X_k \leq x)$ (les X_k suivant toutes la même loi, elles ont toutes la même fonction de répartition F) et :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{quand } x < 0 \\ \frac{E(x)}{6} & \text{quand } 0 \leq x < 6. \\ 1 & \text{quand } x \geq 6 \end{cases}$$

On a $M_n(\Omega) = \llbracket 1, 6 \rrbracket$ et pour tout $i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$, $P(M_n \leq i) = P(X_1 \leq i, X_2 \leq i, \dots, X_n \leq i)$. Comme les X_k sont indépendantes, on obtient $P(M_n \leq i) = P(X_1 \leq i)P(X_2 \leq i)\dots P(X_n \leq i)$, et comme les X_k suivent toutes la même loi, $P(M_n \leq i) = [P(X_1 \leq i)]^n$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_n(x) = (F(x))^n.$$

Pour tout $x \in]-\infty, 6[$, on a $0 \leq F(x) < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (F(x))^n = 0$ et pour tout $x \in [6, +\infty[$, on a $F(x) = 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (F(x))^n = 1$. Ainsi, (F_n) converge simplement vers f telle que :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{quand } x < 6 \\ 1 & \text{quand } x \geq 6 \end{cases}$$

On a de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_n(x) - f(x) = \begin{cases} 0 & \text{quand } x < 0 \\ \left(\frac{E(x)}{6}\right)^n & \text{quand } 0 \leq x < 6 \\ 0 & \text{quand } x \geq 6 \end{cases}$$

Donc, $|F_n(x) - f(x)| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$ et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$, la convergence est uniforme.

Pour $x \in \mathbb{R}$, l'évènement $(m_n \leq x)$ est réalisé si et seulement si il existe $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $(X_k \leq x)$, autrement dit $(X_1 \leq x)$ ou $(X_2 \leq x)$ ou ... ou $(X_n \leq x)$ est réalisé. On a donc :

$$(m_n \leq x) = \bigcup_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} (X_k \leq x).$$

Alors, $\overline{(m_n \leq x)} = \bigcap_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} \overline{(X_k \leq x)}$, donc, avec l'indépendance des X_k , donc des $\overline{(X_k \leq x)}$:

$$P(\overline{(m_n \leq x)}) = P\left(\bigcap_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} \overline{(X_k \leq x)}\right) = \prod_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} P(\overline{(X_k \leq x)}).$$

Comme les X_k suivent toutes la même loi, on a $P(\overline{(X_k \leq x)}) = P(\overline{(X_1 \leq x)})$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et :

$$P(\overline{(m_n \leq x)}) = \left[P(\overline{(X_1 \leq x)}) \right]^n = \left[1 - P(X_1 \leq x) \right]^n = (1 - F(x))^n.$$

Finalement, si G_n est la fonction de répartition F_n de m_n , on obtient :

$$G_n(x) = P(m_n \leq x) = 1 - P(\overline{(m_n \leq x)}) = 1 - (1 - F(x))^n.$$

On a :

$$1 - F(x) = \begin{cases} 1 & \text{quand } x < 1 \\ 1 - \frac{E(x)}{6} & \text{quand } 1 \leq x < 6, \\ 0 & \text{quand } x \geq 6 \end{cases}$$

donc $(1 - F(x))^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 1 & \text{quand } x < 1 \\ 0 & \text{quand } x \geq 1 \end{cases}$ et ainsi, (G_n) converge simplement vers g telle que :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{quand } x < 1 \\ 1 & \text{quand } x \geq 1 \end{cases}$$

On a de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|G_n(x) - g(x)| = \begin{cases} 0 & \text{quand } x < 1 \\ \left(1 - \frac{E(x)}{6}\right)^n & \text{quand } 1 \leq x < 6 \\ 0 & \text{quand } x \geq 6 \end{cases}$$

Alors, $|G_n(x) - g(x)| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$, donc, là encore, la convergence est uniforme.

Planche n° 21

D) Une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie $M^2 + 4I_2 = 0_2$ et $S = {}^tMM = M {}^tM$.

Trouver un polynôme annulateur de degré 2 de S . En déduire que $\frac{1}{2}M$ est orthogonale.

Déterminer toutes les matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 + 4I_2 = 0_2$ et ${}^tMM = M{}^tM$.

II) Etude de l'arc paramétré $\left(x(t) = \frac{1}{t} + \ln(2+t), y(t) = t + \frac{1}{t}\right)$. On précisera en particulier les tangentes parallèles aux axes du repère, les branches infinies, les points particuliers de l'arc.

I) On a $S^2 = ({}^tMM)(M{}^tM) = {}^tMM^2{}^tM$ et $M^2 + 4I_2 = 0_2$, donc $M^2 = -4I_2$ et ainsi :

$$S^2 = -4({}^tM)^2 = -4{}^t(M^2) = -4{}^t(-4I_2) = 16I_2 \Rightarrow S^2 - 16I_2 = 0_2.$$

Donc, $X^2 - 16$ est un polynôme de degré 2 annulateur de S .

Comme $X^2 - 16 = (X - 4)(X + 4)$, on a $Sp(S) \subset \{-4, 4\}$.

De plus, si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de S , et X (non nul) un vecteur propre associé, on a :

$${}^tXSX = {}^tX(\lambda X) = \lambda \|X\|^2 = {}^tX{}^tMMX = ({}^tMX)MX = \|MX\|^2 \Rightarrow \lambda \geq 0.$$

Donc, $Sp(S) \subset \{4\}$.

Enfin, ${}^tS = ({}^t({}^tMM)) = {}^tM{}^t({}^tM) = {}^tMM = S$, donc S est une matrice symétrique réelle : elle est diagonalisable. Et comme sa seule valeur propre possible est 4, S est semblable à $4I_2$, donc :

$$S = 4I_2.$$

On a donc ${}^tMM = M{}^tM = 4I_2$, d'où ${}^tNN = N{}^tN = I_2$ avec $N = \frac{1}{2}M$ et ainsi, $\frac{1}{2}M$ est orthogonale.

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 + 4I_2 = 0_2$ et $S = {}^tMM = M{}^tM$ (s'il y en a).

On vient de voir que $N = \frac{1}{2}M$ est orthogonale (donc inversible) et on a $M^2 + 4I_2 = 0_2$, soit $N^2 = -I_2 = -{}^tNN$. Ceci donne ${}^tN = -N$, donc N est antisymétrique. Comme elle est 2×2 :

$$N = a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors, $N^2 = -a^2I_2$ et comme $N^2 = -I_2$, on obtient $a^2 = -1$ et ainsi, $N = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, donc :

$$M = 2N = \pm 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, $M = \pm \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, on a ${}^tM = -M$, donc commute avec M et $M^2 + 4I_2 = 0_2$, donc

les solutions du problème sont : $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

II) Notons \mathcal{C} la courbe recherchée. On a :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{t} + \ln(2+t) \\ y(t) = t + \frac{1}{t} \end{cases}$$

L'ensemble de définition est $D =]-2, 0[\cup]0, +\infty[$.

Les fonctions x et y sont C^∞ sur D et $\begin{cases} x'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{2+t} = \frac{(t+1)(t-2)}{t^2(2+t)} \\ y'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{(t+1)(t-1)}{t^2} \end{cases}$. On obtient le tableau :

t	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$x'(t)$	+	0	-	-	0	+
x	$-\infty$	-1	$-\infty$	$+\infty$	$1/2 + \ln 4$	$+\infty$
y	$-5/2$	-2	$-\infty$	$+\infty$	2	$+\infty$
$y'(t)$	+	0	-	-	0	+

- $t \rightarrow -2$: Asymptote horizontale Δ_1 d'équation $y = -\frac{5}{2}$. \mathcal{C} est au-dessus de Δ_1 .
- $t = -1$: Point stationnaire, tangente dirigée par $\vec{u}(3, 2)$.
- $t \rightarrow 0$: $\frac{y(t)}{x(t)} \rightarrow 1$ et $y(t) - x(t) \rightarrow -\ln 2$, donc asymptote oblique Δ_2 d'équation $y = x - \ln 2$.
Et $y(t) - x(t) + \ln 2 \underset{0}{\sim} \frac{t}{2}$, donc \mathcal{C} est au-dessus de Δ_2 en 0^+ et en dessous en 0^- .
- $t = 1$: Tangente horizontale.
- $t = 2$: Tangente verticale.
- $t \rightarrow +\infty$: $\frac{y(t)}{x(t)} \rightarrow +\infty$, donc branche parabolique.

On obtient la courbe suivante.

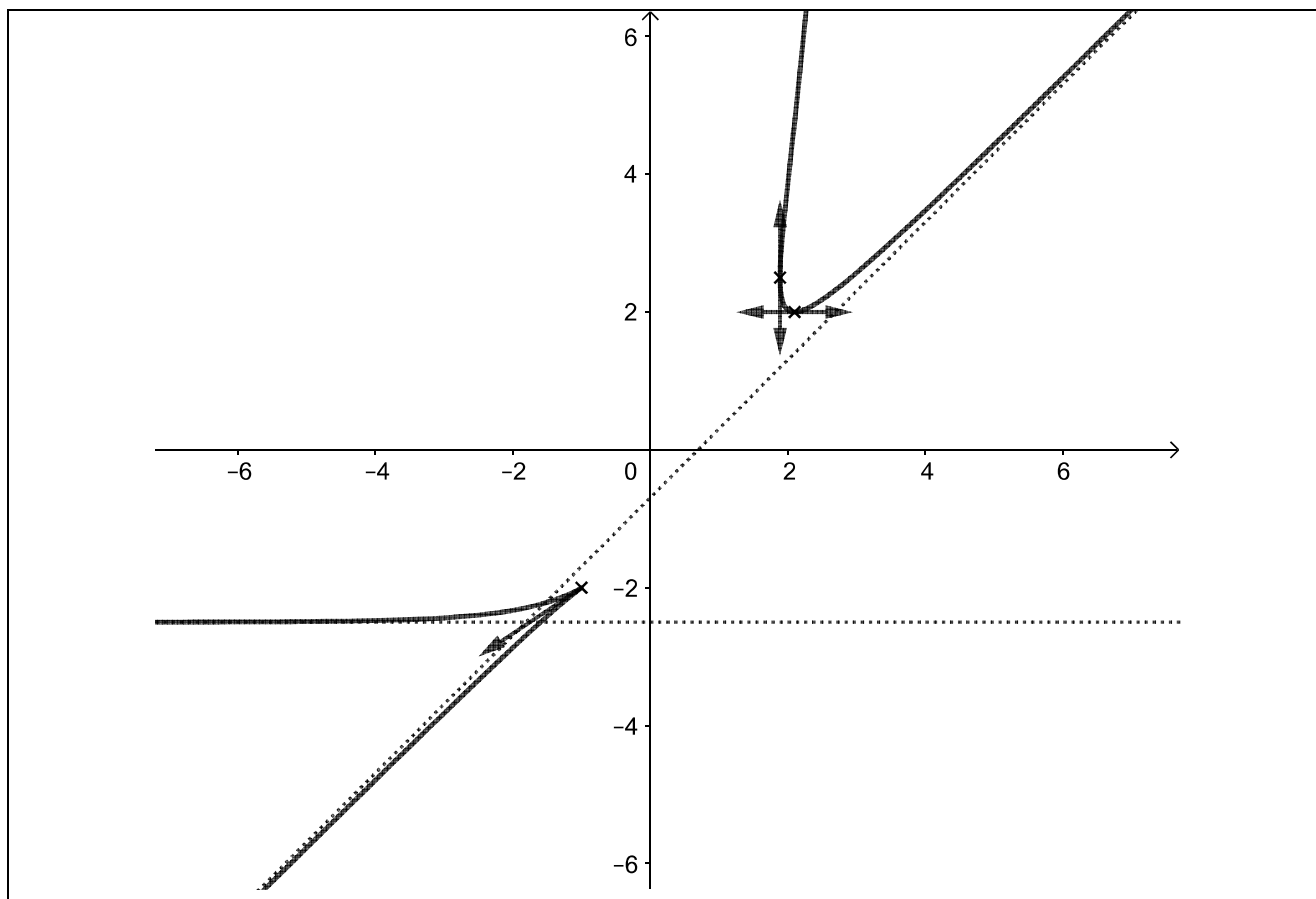


Planche n° 22 (ENSAM)

I) Montrer que f , donnée par $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t} dt$, est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$.

Calculer $f(1)$.

Montrer que pour tout réel $x > 0$, $f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x}$ et trouver un équivalent de f en 0.

Trouver la limite et un équivalent de f en $+\infty$.

II) Montrer que f , défini par $f(M) = M + \text{Tr}(M)I_n$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et déterminer les dimensions de $\ker f$ et $\text{Im } f$.

Déterminer un polynôme annulateur de f de degré 2.

L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Bijectif ? Si oui, calculer f^{-1} .

I) Soit $x \in]0, +\infty[$. La fonction $t \mapsto \frac{t^{-x}}{1+t}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$.

De plus, $\frac{t^{-x}}{1+t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{x+1}}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}}$ converge car $x+1 > 1$, donc, f est définie sur $]0, +\infty[$.

Pour tout $t \in [1, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \frac{t^{-x}}{1+t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et pour tout $a \in]0, +\infty[$, on a

pour tous $(x, t) \in [a, +\infty[\times [1, +\infty[$ $0 < \frac{t^{-x}}{1+t} \leq \frac{t^{-a}}{1+t}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{t^{-a}}{1+t} dt$ converge. Alors, la fonction f est continue sur $]0, +\infty[$.

Pour tout $(a, b) \in]0, +\infty[^2$ tel que $a \leq b$, on a $\frac{t^{-b}}{1+t} \leq \frac{t^{-a}}{1+t}$ pour tout $t \in [1, +\infty[$, donc par croissance de l'intégrale, on obtient $f(b) \leq f(a)$ et ainsi, f est décroissante sur $]0, +\infty[$.

On a :

$$f(1) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-1}}{1+t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t)} dt = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \right) dt = \left[\ln \left(\frac{t}{1+t} \right) \right]_1^{+\infty} = \ln 2.$$

Pour tout réel $x > 0$:

$$f(x+1) + f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x-1}}{1+t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x-1}}{1+t} (1+t) dt = \int_1^{+\infty} t^{-x-1} dt = \left[\frac{t^{-x}}{-x} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x}.$$

Alors, $f(x) = \frac{1}{x} - f(x+1)$ et comme f est continue en 1, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x+1) = f(1) = \ln 2$, donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - f(x+1) \right) = +\infty \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Soit $x \in]0, +\infty[$. Dans l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t} dt$, posons $u = t^{-x}$, soit $t = u^{-\frac{1}{x}}$ et $-\frac{1}{x} u^{-\frac{1}{x}-1} du = t^{-x} dt$.

Alors :

$$f(x) = \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{u^{-1/x}}{1+u^{-1/x}} du = \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{1}{1+u^{1/x}} du.$$

Quand $x \rightarrow +\infty$, on a $u^{1/x} \rightarrow 1$, d'où l'idée de poser :

$$f(x) - \frac{1}{2x} = \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{1}{1+u^{1/x}} du - \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{1}{2} du = \frac{1}{x} \int_0^1 \left(\frac{1}{1+u^{1/x}} - \frac{1}{2} \right) du = \frac{1}{2x} \int_0^1 \frac{1-u^{1/x}}{1+u^{1/x}} du.$$

Et, pour tout $u \in]0, 1[$:

$$0 \leq \frac{1-u^{1/x}}{1+u^{1/x}} = \frac{1-e^{-\frac{\ln u}{x}}}{1+u^{1/x}} \leq 1-e^{-\frac{\ln u}{x}} \leq -\frac{\ln u}{x}.$$

Donc :

$$0 \leq f(x) - \frac{1}{2x} \leq -\frac{1}{2x^2} \int_0^1 \ln u du = \frac{1}{2x^2}.$$

Ainsi, $f(x) = \frac{1}{2x} + o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right)$, soit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.$$

II) Comme la trace est linéaire, $M \mapsto \text{Tr}(M)I_n$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc f aussi.

Soit $M \in \ker f$.

On a $f(M) = M + \text{Tr}(M)I_n = 0_n$ et en prenant la trace, ceci donne $(n+1)\text{Tr}(M) = 0$. Ainsi, $\text{Tr}(M) = 0$ et donc $M + \text{Tr}(M)I_n = M = 0_n$. Alors, $\ker f = \{0_n\}$ et $f \in GL(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$, soit :

$$\ker f = \{0_n\} \text{ (de dimension 0) et } \text{Im } f = \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ (de dimension } n^2 \text{)}.$$

Prenons $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et posons $N = f(M) = M + \text{Tr}(M)I_n$. On a :

$$\text{Tr}(N) = \text{Tr}(M) + \text{Tr}(M) \times n = (n+1)\text{Tr}(M).$$

Donc :

$$f^2(M) = f(N) = N + \text{Tr}(N)I_n = M + \text{Tr}(M)I_n + (n+1)\text{Tr}(M)I_n = M + (n+2)\text{Tr}(M)I_n.$$

Ainsi :

$$\text{Tr}(M)I_n = f(M) - M = \frac{1}{n+2}(f^2(M) - M) \Rightarrow f^2(M) - (n+2)f(M) + (n+1)M = 0_n.$$

Ceci étant vrai pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, un polynôme annulateur de f est :

$$P = X^2 - (n+2)X + n+1 = (X-1)(X-(n+1)).$$

Comme P est scindé à racines simples ($n+1 \neq 1$), f est diagonalisable.

On a vu plus haut que f est bijectif et pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, si $N = f(M)$, on a :

$$\left. \begin{array}{l} N = M + \text{Tr}(M)I_n \\ \text{Tr}(N) = (n+1)\text{Tr}(M) \end{array} \right\} \Rightarrow M = N - \frac{1}{n+1}\text{Tr}(N)I_n.$$

Donc, $f^{-1} : N \mapsto N - \frac{\text{Tr}(N)}{n+1}I_n$.

Planche n° 23

I) Des variables aléatoires mutuellement indépendantes $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ suivent toutes une loi de Bernoulli

de paramètre $p \in]0,1[$. Déterminer la loi de $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

On se donne une variable aléatoire N à valeurs dans \mathbb{N} telle que $N+1$ suive la loi géométrique de paramètre p .

Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-1,1[$, la valeur de $\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}$.

Déterminer $P(S_N = k)$ pour tout entier naturel k .

II) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $M^2 + {}^t M = I_n$.

Montrer que si P est un polynôme annulateur de M , toute valeur propre de M est racine de P .

Montrer, sans utiliser le théorème spectral, que si M est symétrique, alors elle est diagonalisable et que $\text{Tr}(M) \times \det M \neq 0$.

Dans le cas général, montrer que M est diagonalisable et symétrique si et seulement si 1 n'en est pas valeur propre.

D) S_n suit la loi binomiale de paramètres n et p (c'est une cours).

On a, sous réserve de convergence :

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k} = \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}.$$

Si on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, f est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $x \in] -1, 1[$:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in] -1, 1[$:

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}.$$

Pour que $(S_N = k)$ soit possible il faut que $N \geq k$ et avec la loi de probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(S_N = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} P(N = n) P_{(N=n)}(S_N = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(N+1 = n+1) P(S_n = k) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} (1-p)^n p \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = p^{k+1} (1-p)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} [(1-p)^2]^{n-k} \end{aligned}$$

Comme $p \in]0, 1[$, $(1-p)^2 \in]0, 1[$ donc $\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} [(1-p)^2]^{n-k} = \frac{1}{[1-(1-p)^2]^{k+1}}$ et ainsi :

$$P(S_N = k) = \frac{p^{k+1} (1-p)^k}{[1-(1-p)^2]^{k+1}} = \frac{(1-p)^k}{(2-p)^{k+1}}.$$

II) Si P est un polynôme annulateur de M , toute valeur propre de M est racine de P : c'est du cours.

Si M est symétrique, alors la relation $M^2 + {}^t M = I_n$ se réécrit $M^2 + M = I_n$, soit $P(M) = 0_n$ avec $P = X^2 + X - 1$. Or, P est scindé à racines simples $(-\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}))$ et $(-\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}))$ dans $\mathbb{C}[X]$, donc M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que $\text{Tr}(M) \times \det M \neq 0$ revient à montrer que $\det M \neq 0$ et $\text{Tr}(M) \neq 0$.

Comme $Sp(M) \subset \left\{ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \right\}$, $0 \notin Sp(M)$, donc $M \in GL_n(\mathbb{C})$ et $\det M \neq 0$.

De plus, $Tr(M) = k \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \right) + (n-k) \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \right)$ avec $k = \dim \ker \left[M - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \right) I_n \right]$.

Alors, $Tr(M) = -n \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n-2k)\sqrt{5} \neq 0$.

On veut : $(M \text{ diagonalisable et symétrique}) \Leftrightarrow 1 \notin Sp(M)$.

Or, on vient de voir que si M est symétrique, alors elle est diagonalisable, donc il faut prouver :

$$(M \text{ symétrique}) \Leftrightarrow 1 \notin Sp(M).$$

On vient aussi de prouver que le sens direct est vrai. Montrons alors le sens réciproque.

On suppose que $1 \notin Sp(M)$.

Remarquons qu'en transposant $M^2 + {}^tM = I_n$, on obtient $({}^tM)^2 + M = I_n$, soit $({}^tM)^2 = I_n - M$ et :

$$M^2 + {}^tM = I_n \Rightarrow ({}^tM)^2 = (I_n - M^2)^2 = I_n - M.$$

Donc, $P = (X^2 - 1)^2 + X - 1 = (X - 1)X(X^2 + X - 1)$ est annulateur de M et comme $1 \notin Sp(M)$, $X(X^2 + X - 1)$ est annulateur de M .

Si $0 \in Sp(M)$, alors M est n'pas inversible, donc tM non plus et il existe un vecteur X non nul tel que ${}^tMX = 0$. Alors, $({}^tM)^2 X + MX = MX = I_n X = X$, donc $1 \in Sp(M)$, ce qui est absurde, donc $0 \notin Sp(M)$ et $X^2 + X - 1$ est annulateur de M (car $X(X^2 + X - 1)$ l'est).

Ainsi, $M^2 + M = I_n = M^2 + {}^tM$, donc $M = {}^tM$ et M est symétrique.