

**Corrigés de la série 5 - Mines-Ponts**

**Planche n° 17**

**I)** Montrer que si  $f$  est de classe  $C^n$  sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et s'annule  $n$  fois, alors pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $f^{(n-k)}$  s'annule au moins  $k$  fois.

Qu'en déduit-on, au mieux, en fonction du degré de  $P \in \mathbb{R}[X]$ , sur le nombre de fois où  $P(x) = e^x$ .

**II)** Montrer qu'un endomorphisme symétrique  $s$  d'un espace euclidien est  $\rho$ -lipchitzien si et seulement si toutes ses valeurs propres sont de module au plus égal à  $\rho$ .

Montrer que, dans le cas d'un endomorphisme quelconque, seul un sens de l'équivalence reste vrai.

**I)** On procède par récurrence finie et descendante sur  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  (pour  $k = 0$ , la propriété dit que  $f^{(n)}$  s'annule au moins 0 fois, ce qui est vrai... et passionnant !)

Pour  $k = n$ ,  $f^{(n-n)} = f$  s'annule au moins  $n$  fois par hypothèse, donc la propriété est vraie.

On suppose la propriété vraie à un rang  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ , autrement dit que  $f^{(n-k)}$  s'annule au moins  $k$  fois en  $a_1, \dots, a_k$  avec  $a_1 < \dots < a_k$ .

Comme  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ , on a  $n - (k - 1) \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ , donc  $f^{(n-(k-1))}$  existe et est continue sur  $I$ . On veut alors prouver  $f^{(n-(k-1))}$  s'annule au moins  $k - 1$  fois.

Pour tout  $i \in \llbracket 1, k - 1 \rrbracket$ ,  $f^{(n-k)}$  est dérivable sur  $[a_i, a_{i+1}]$  et  $f^{(n-k)}(a_i) = f^{(n-k)}(a_{i+1}) = 0$ , donc d'après le théorème de Rolle,  $f^{(n-(k-1))} = f^{(n-k+1)} = (f^{(n-k)})'$  s'annule au moins 1 fois sur  $]a_i, a_{i+1}[$ .

Ceci étant vrai pour tout  $i \in \llbracket 1, k - 1 \rrbracket$ ,  $f^{(n-(k-1))}$  s'annule au moins  $k - 1$  fois et ainsi, la propriété est vraie au rang  $k - 1$ .

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire donc vraie pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

\*\*\*\*\*

Si on pose  $f(x) = e^x - P(x)$ , la fonction  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , et si  $P$  est de degré  $n$ , on a  $f^{(n+1)}(x) = e^x$ , donc  $f^{(n+1)}$  ne s'annule pas. Avec la propriété précédente, ceci implique que  $f$  s'annule au plus  $n$  fois et ainsi,  $P(x) = e^x$  au plus  $n = \deg P$  fois sur  $\mathbb{R}$ .

\*\*\*\*\*

**II)** On a  $s \in \mathcal{L}(E)$ , symétrique et on veut :

$$(s \text{ est } \rho\text{-lipchitzien}) \Leftrightarrow (\forall \lambda \in Sp(s), |\lambda| \leq \rho).$$

( $\Rightarrow$ ) On suppose que  $s$  est  $\rho$ -lipchitzien. Soit  $\lambda \in Sp(s)$  est  $x$  un vecteur propre associé à  $\lambda$  (donc  $x$  est non nul). On a  $\|s(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \leq \rho \|x\|$  et comme  $x \neq 0$ , on a  $\|x\| > 0$  et donc  $|\lambda| \leq \rho$ .

( $\Leftarrow$ ) On suppose que pour tout  $\lambda \in Sp(s)$ , on a  $|\lambda| \leq \rho$ .

Comme  $s$  est symétrique, il existe une base orthonormée de  $E$ ,  $(e_1, \dots, e_n)$ , de vecteurs propres de  $s$ , avec  $s(e_i) = \lambda_i e_i$  ( $\lambda_i$  valeur propre associée à  $e_i$ ). Alors, pour tout  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in E$ , on a :

$$\|s(x)\|^2 = \|x_1 s(e_1) + \dots + x_n s(e_n)\|^2 = \|x_1 \lambda_1 e_1 + \dots + x_n \lambda_n e_n\|^2 = x_1^2 \lambda_1^2 + \dots + x_n^2 \lambda_n^2 \leq x_1^2 \rho^2 + \dots + x_n^2 \rho^2 = \rho^2 \|x\|^2.$$

Donc  $\|s(x)\| \leq \rho \|x\|$  et  $s$  est  $\rho$ -lipchitzien.

\*\*\*\*\*

Remarquons dans la preuve ci-dessus, on n'utilise pas explicitement la symétrie de  $s$  pour le sens direct, donc pour un endomorphisme  $\rho$ -lipchitzien quelconque de  $E$ , on a  $|\lambda| \leq \rho$  pour toute valeur propre  $\lambda$  réelle de  $s$ .

Soit  $\lambda = a + ib$  (avec  $a$  et  $b$  réels) une valeur propre complexe de  $s$ . Si  $A$  est la matrice de  $s$  dans une base orthonormée de  $E$  et  $X + iY$  un vecteur propre associé à  $\lambda$ , avec  $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , on a :

$$A(X + iY) = AX + iAY = \lambda(X + iY) = (a + ib)(X + iY) = aX - bY + i(bX + aY).$$

Donc,  $AX = aX - bY$  et  $AY = bX + aY$  :

$$\|AX\|^2 = \|aX - bY\|^2 = a^2 \|X\|^2 - 2ab(X | Y) + b^2 \|Y\|^2 \leq \rho^2 \|X\|^2$$

$$\|AY\|^2 = \|bX + aY\|^2 = b^2 \|X\|^2 - 2ab(X | Y) + a^2 \|Y\|^2 \leq \rho^2 \|Y\|^2$$

Soit, en additionnant :

$$(a^2 + b^2)(\|X\|^2 + \|Y\|^2) \leq \rho^2 (\|X\|^2 + \|Y\|^2) \Rightarrow a^2 + b^2 = |\lambda|^2 \leq \rho^2$$

car  $X + iY \neq 0$  donc  $\|X\|^2 + \|Y\|^2 > 0$ . Ainsi, on a à nouveau  $|\lambda| \leq \rho$ , même pour  $\lambda$  complexe.

Par contre, un endomorphisme quelconque de  $E$  dont toutes les valeurs propres sont en module inférieures à  $\rho$  n'est pas forcément  $\rho$ -lipchitzien. Par exemple, un endomorphisme nilpotent non nul : sa seule valeur propre est 0, mais il n'est pas 0-lipchitzien.

## Planche n° 18

I) Par une comparaison série-intégrale, trouver un équivalent de  $u_n = \sum_{k=2}^n \frac{\ln k}{k}$  défini pour  $n \geq 2$ .

Etudier la monotonie et la convergence de la suite de terme général  $v_n = u_n - \frac{1}{2}(\ln n)^2$ .

On admet que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ . Montrer que  $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k \ln k}{k} = \ln 2 \left( \gamma - \frac{\ln 2}{2} \right)$ .

II) Déterminer les classes de similitude de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ .

D) Une étude rapide de la fonction continue  $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$  montre qu'elle est décroissante sur  $[e, +\infty[$ .

On peut donc utiliser la comparaison série-intégrale qui donne pour tout  $n \geq 3$  :

$$\frac{\ln 2}{2} + \int_3^{n+1} \frac{\ln x}{x} dx \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \int_3^n \frac{\ln x}{x} dx.$$

Soit, avec  $\int_3^n \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}(\ln n)^2 - \frac{1}{2}(\ln 3)^2$  :

$$\frac{1}{2}(\ln(n+1))^2 + \frac{\ln 2 - (\ln 3)^2}{2} \leq u_n \leq \frac{1}{2}(\ln n)^2 + \frac{\ln 2 - (\ln 3)^2}{2} + \frac{\ln 3}{3}.$$

Et comme  $\ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \ln n$ , on obtient :

$$u_n \sim \frac{1}{2}(\ln n)^2.$$

\*\*\*\*\*

On a pour tout  $n \geq 2$  :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n - \frac{1}{2}(\ln(n+1))^2 + \frac{1}{2}(\ln n)^2 = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{1}{2}(\ln(n+1) + \ln n)(\ln(n+1) - \ln n) \\ &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} + \frac{1}{2} \left( 2\ln(n+1) + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \right) \left( \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \right) = f\left(\frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

avec  $f(x) = -x \ln x - \ln x \ln(1-x) + \frac{1}{2}(\ln(1-x))^2$ .

On a  $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2 \ln x}{2}$ , donc  $f(x) < 0$  au voisinage de 0, ce qui implique que  $v_{n+1} - v_n < 0$  quand  $n$  devient grand et ainsi,  $(v_n)_{n \geq 2}$  est décroissante à partir d'un certain rang.

De plus, on a vu que pour tout  $n \geq 3$  :

$$\frac{1}{2} \left[ (\ln(n+1))^2 - (\ln n)^2 \right] + \frac{\ln 2 - (\ln 3)^2}{2} \leq v_n = u_n - \frac{1}{2}(\ln n)^2.$$

Et :

$$\frac{1}{2} \left[ (\ln(n+1))^2 - (\ln n)^2 \right] = \frac{1}{2}(\ln(n+1) + \ln n)(\ln(n+1) - \ln n) = \left( \ln n + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{\ln n}{n}$$

Donc,  $\frac{1}{2} \left[ (\ln(n+1))^2 - (\ln n)^2 \right] \rightarrow 0$  et la suite  $(v_n)_{n \geq 2}$  étant minorée par une suite convergente, elle est minorée. Comme elle est décroissante à partir d'un certain rang, la suite  $(v_n)_{n \geq 2}$  converge vers un réel  $\alpha$  et donc  $u_n = \frac{1}{2}(\ln n)^2 + v_n = \frac{1}{2}(\ln n)^2 + \alpha + o(1)$ .

\*\*\*\*\*

On a vu que  $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$  décroît sur  $[e, +\infty[$ , donc la suite  $\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{n \geq 1}$  décroît à partir du rang 3 et, comme elle converge vers 0, la série  $\sum (-1)^k \frac{\ln k}{k}$  vérifie le critère spécial des séries alternées, donc converge.

On a pour tout  $n \geq 2$  :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k \ln k}{k} &= \sum_{k=2}^{2n+1} \frac{(-1)^k \ln k}{k} = \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} \frac{\ln k}{k} - \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} \frac{\ln k}{k} \\ &= 2 \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} \frac{\ln k}{k} - \sum_{k=2}^{2n+1} \frac{\ln k}{k} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=2}^{2n+1} \frac{\ln k}{k} \\ &= (\ln 2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^n \frac{\ln k}{k} - \sum_{k=2}^{2n+1} \frac{\ln k}{k} = (\ln 2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + u_n - u_{2n+1} \end{aligned}$$

Or,  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$  et  $u_n = \frac{1}{2}(\ln n)^2 + \alpha + o(1)$ , donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k \ln k}{k} &= (\ln 2) [\ln n + \gamma + o(1)] + \left[ \frac{1}{2}(\ln n)^2 + \alpha + o(1) \right] - \left[ \frac{1}{2}(\ln(2n+1))^2 + \alpha + o(1) \right] \\ &= (\ln 2) \ln n + (\ln 2) \gamma - \frac{1}{2}(\ln(2n+1) - \ln n)(\ln n + \ln(2n+1)) + o(1) \\ &= (\ln 2) \ln n + (\ln 2) \gamma - \frac{1}{2} \left( \ln 2 + \ln \left( 1 + \frac{1}{2n} \right) \right) \left( 2 \ln n + \ln 2 + \ln \left( 1 + \frac{1}{2n} \right) \right) + o(1) \\ &= (\ln 2) \left( \gamma - \frac{\ln 2}{2} \right) + o(1) \end{aligned}$$

Et ainsi,  $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k \ln k}{k} = \ln 2 \left( \gamma - \frac{\ln 2}{2} \right)$ .

\*\*\*\*\*

**II)** Soit  $M$  une matrice de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  et  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^3$  canoniquement associé à  $M$ . Comme dans  $\mathbb{C}$ , tout polynôme est scindé, entre le polynôme caractéristique  $\chi_M$  de  $M$ , la matrice  $M$  admet entre 1 et 3 valeurs propres distinctes.

- Si  $M$  admet 3 valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable, donc semblable à une matrice diagonale. Remarquons que deux matrices diagonales ayant les mêmes coefficients diagonaux, mais pas à la même place sont semblables (il suffit de changer l'ordre des vecteurs de la base).
- Si  $M$  admet 2 valeurs propres distinctes  $a$  et  $b$  (où  $b$  est racine double de  $\chi_M$ ), elle est

trigonalisable, et semblable à une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} a & 0 & \alpha \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ , matrice de  $u$  dans une base

$(e_1, e_2, e_3)$  de  $\mathbb{C}^3$ . En posant  $e_3' = \frac{\alpha}{b-a} e_1 + e_3$ , on a  $u(e_3') = c e_2 + b e_3'$  et  $(e_1, e_2, e_3')$  est une

base de  $\mathbb{C}^3$ . La matrice de  $u$  dans cette base est alors  $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ , donc  $M$  est semblable à une matrice de cette forme.

Remarquons que si  $c$  est nul,  $M$  est diagonalisable et si  $c$  n'est pas nul, on peut poser  $e_2' = ce_2$ .

La famille  $(e_1, e_2', e_3')$  est une base de  $\mathbb{C}^3$  dans laquelle la matrice de  $u$  est  $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ .

• Si  $M$  admet une seule valeur propre  $a$ , notons  $E_a = \ker(M - aI_3)$ .

○ Si  $\dim E_a = 3$ , alors  $M = aI_3$ .

○ Si  $\dim E_a = 2$ , alors,  $M$  est semblable à une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$  avec  $(b, c) \neq (0, 0)$ .

Si  $c \neq 0$ , on peut poser  $e_2' = be_1 + ce_2$ . La famille  $(e_1, e_2', e_3)$  est une base de  $\mathbb{C}^3$  dans

laquelle la matrice de  $u$  est  $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ .

Si  $c = 0$  (donc  $b \neq 0$ ), on peut poser  $e_1' = e_2$  et  $e_2' = be_1$ . La famille  $(e_1', e_2', e_3)$  est une base

de  $\mathbb{C}^3$  dans laquelle la matrice de  $u$  est  $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ .

○ Si  $\dim E_a = 1$ , alors,  $M$  est semblable à une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$  avec  $b \neq 0$  et

$(c, d) \neq (0, 0)$ . Si  $d = 0$ ,  $M$  est semblable à  $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ , donc  $\text{rg}(M - aI_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$  et

par le théorème sur rang, on obtient  $\dim E_a = 2$ , ce qui est absurde. Ainsi,  $d \neq 0$ .

En posant alors  $e_1' = dbe_1$  et  $e_2' = ce_1 + de_2$ , la famille  $(e_1', e_2', e_3)$  est une base de  $\mathbb{C}^3$  dans

laquelle la matrice de  $u$  est  $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ .

Finalement, toute matrice de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  est soit diagonalisable, soit semblable à une matrice de la

forme  $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ , avec  $a, b \in \mathbb{C}$  distincts ou pas, soit semblable à une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ ,

avec  $a \in \mathbb{C}$ .

**Planche n° 19**

D) Domaine de définition de  $f$ , définie par  $f(x) = \int_0^x \frac{\ln|1-t|}{t} dt$ .

La fonction  $f$  est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ? Quel est alors son rayon de convergence ?

Calculer  $f(1)$ .

Etudier la dérivabilité de  $f$ .

II) (PC) Soient  $A$  et  $B$  deux matrices symétriques réelles d'ordre  $n$ .

On suppose qu'il existe  $P \in \mathbb{R}[X]$  bijectif, tel que  $P(A) = P(B)$ . Montrer que  $A = B$ .

D) La fonction  $t \mapsto \frac{\ln|1-t|}{t}$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}^* \setminus \{1\}$  et :

- $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln|1-t|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1-t)}{t} = -1$ , donc  $t \mapsto \frac{\ln|1-t|}{t}$  est prolongeable par continuité en 0 ;
- $\frac{\ln|1-t|}{t} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \ln|1-t|$  et  $t \mapsto \ln|1-t|$  est intégrable au en 1.

Ainsi, en prolongeant  $g : t \mapsto \frac{\ln|1-t|}{t}$ , par continuité en 0 et en écrivant, pour tout réel  $x > 1$ ,

$f(x) = \int_0^1 \frac{\ln|1-t|}{t} dt + \int_1^x \frac{\ln|1-t|}{t} dt$ , on définit  $f$  sur  $\mathbb{R}$  tout entier.

\*\*\*\*\*

Pour tout  $t \in ]-1, 1[$ ,  $\frac{\ln|1-t|}{t} = \frac{\ln(1-t)}{t} = -\sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n+1}$ . Donc,  $t \mapsto \frac{\ln|1-t|}{t}$  est développable en série entière sur  $] -1, 1[$ . On peut intégrer terme à terme :

$$f(x) = -\sum_{n \geq 0} \int_0^x \frac{t^n}{n+1} dt = -\sum_{n \geq 0} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} = -\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}.$$

Remarquons que le rayon de convergence de cette série entière est bien 1 et ainsi,  $f$  est développable en série entière au voisinage de 0 et son rayon de convergence est 1.

\*\*\*\*\*

Remarquons que  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  converge, donc  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$  converge normalement sur  $[0, 1]$ , et ainsi,  $f$  est

continue en 1, donc :  $f(1) = -\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}$ .

\*\*\*\*\*

On a vu que  $g : t \mapsto \frac{\ln|1-t|}{t}$  peut être prolongée en une fonction continue sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ . Alors, si  $G$  est une primitive de  $g$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ , on a  $f(x) = G(x) - G(0)$  pour  $x < 1$  et  $f(x) = G(x) - G(2) + f(2)$  pour  $x > 1$ . Ceci permet de conclure que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

De plus, pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  :

$$\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{1}{x-1} \int_1^x \frac{\ln|1-t|}{t} dt.$$

Prenons  $x > 1$ . On a alors en posant  $u = t - 1$  :

$$\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{1}{x-1} \int_1^x \frac{\ln(t-1)}{t} dt = \frac{1}{x-1} \int_0^{x-1} \frac{\ln u}{1+u} du.$$

Or, pour tout  $u > 0$ ,  $1-u \leq \frac{1}{1+u}$ , donc, pour  $0 < x-1 < 1$  (soit  $1 < x < 2$ ), on a (avec  $\ln u < 0$  quand  $0 < u < x-1 < 1$ ) :

$$\int_0^{x-1} \frac{\ln u}{1+u} du \leq \int_0^{x-1} (1-u) \ln u du = (x-1) \ln(x-1) - (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 \ln(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2.$$

D'où :

$$\frac{f(x) - f(1)}{x-1} \leq \ln(x-1) - 1 - \frac{1}{2}(x-1) \ln(x-1) + \frac{1}{4}(x-1).$$

Et  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[ \ln(x-1) - 1 - \frac{1}{2}(x-1) \ln(x-1) + \frac{1}{4}(x-1) \right] = -\infty$ , donc par théorème de comparaison :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = -\infty.$$

Ainsi,  $f$  n'est pas dérivable en 1.

\*\*\*\*\*

**II)** Notons  $u$  et  $v$  les endomorphismes de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associés à  $A$  et  $B$  respectivement. On a donc  $P(u) = P(v)$ .

Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  les valeurs propres distinctes de  $u$  et  $E_1, \dots, E_p$  les sous-espaces propres associés.

La matrice  $A$  étant symétrique réelle,  $u$  est diagonalisable, donc  $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$  et dans une base  $\mathcal{B}$  adaptée à cette décomposition, la matrice de  $u$  est  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_p, \dots, \lambda_p)$  où  $\lambda_i$  apparaît  $n_i = \dim E_i$  fois.

La matrice de  $P(u)$  dans  $\mathcal{B}$  est alors  $\text{diag}(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_1), P(\lambda_2), \dots, P(\lambda_2), \dots, P(\lambda_p), \dots, P(\lambda_p))$  et comme  $P$  est bijective donc injective, les  $P(\lambda_i)$  sont deux à deux distincts car les  $\lambda_i$  le sont. Ceci prouve que les valeurs propres de  $P(u)$  sont les  $P(\lambda_i)$  est que le sous-espace propre associé à  $P(\lambda_i)$  est  $E_i$ . Il en découle aussi que toute base qui diagonalise  $P(u)$ , diagonalise  $u$  (et vice-versa, mais c'est toujours le cas). Les matrices  $A$  et  $B$  jouant le même rôle, il en va de même pour  $v$ .

Or,  $P(u) = P(v)$ , donc les  $P(\lambda_i)$  sont les valeurs propres de  $P(v)$ , de sous-espace propre associé  $E_i$ . Alors, d'après ce qui précède, les  $P^{-1}(P(\lambda_i)) = \lambda_i$ , sont les valeurs propres de  $v$ , de sous-espace propre associé  $E_i$  aussi. Ainsi,  $u$  et  $v$  ont pour matrice  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_p, \dots, \lambda_p)$  dans la base  $\mathcal{B}$ , donc  $u = v$ , soit  $A = B$ .

**Planche n° 20**

**I)** Convergence et calcul de  $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{(1+2i)^n}$ .

**II)**  $A, B$  et  $C$  étant données dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , montrer que si  $A$  et  $B$  n'ont aucune valeur propre commune, l'équation  $AX - XB = C$  admet une unique solution dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

Qu'en est-il de la réciproque ? Le montrer.

**III)** On pioche une poignée de jetons dans une urne en contenant  $n$ , numérotés de 1 à  $n$ . On admet que chaque poignée (y compris la poignée vide) a la même probabilité d'être tirée.

Donner l'espérance de la variable aléatoire  $S$  donnant la somme des numéros tirés.

**I)** La série  $\sum_{n \geq 1} n z^n$  converge pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < 1$  et sa somme vaut  $\sum_{n \geq 1} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2}$

(obtenue en dérivant  $\sum_{n \geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}$ ). Comme  $\left| \frac{1}{1+2i} \right| = \frac{1}{\sqrt{5}} < 1$ , la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{(1+2i)^n} = \sum_{n \geq 1} n \left( \frac{1}{1+2i} \right)^n$  converge et :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n}{(1+2i)^n} = \sum_{n \geq 1} n \left( \frac{1}{1+2i} \right)^n = \frac{\frac{1}{1+2i}}{\left( 1 - \frac{1}{1+2i} \right)^2} = -\frac{1+2i}{4}.$$

\*\*\*\*\*

**II)** Soit  $\Phi : M \mapsto AM - MB$ . Cette application est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  (car  $M \mapsto AM$  et  $M \mapsto MB$  sont linéaires), donc  $AX - XB = C$  admet une unique solution dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  si et seulement si  $\Phi$  est bijective, ce qui revient ici à  $\Phi$  injective ou encore  $\ker \Phi = \{0_n\}$ .

On suppose que  $A$  et  $B$  n'ont aucune valeur propre commune. Soit  $M \in \ker \Phi$  et  $r = \text{rg}(M)$ .

Supposons que  $r \geq 1$ .

Il existe alors  $(P, Q) \in GL_n(\mathbb{C})^2$  tel que  $M = PJQ$  avec  $J = \left( \begin{array}{c|c} I_r & 0_{r, n-r} \\ \hline 0_{n-r, r} & 0_{n-r} \end{array} \right)$  et :

$$M \in \ker \Phi \Leftrightarrow \Phi(M) = 0_n \Leftrightarrow AM = MB \Leftrightarrow APJQ = PJQB \Leftrightarrow A'J = JB'$$

avec  $A' = P^{-1}AP$  et  $B' = QBQ^{-1}$ .

Si on pose  $A' = \left( \begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array} \right)$  et  $B' = \left( \begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array} \right)$  avec  $A_1, B_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ , on a :

$$A'J = JB' \Leftrightarrow \left( \begin{array}{c|c} A_1 & 0_{r, n-r} \\ \hline A_3 & 0_{n-r} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline 0_{n-r, r} & 0_{n-r} \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = B_1 \\ A_3 = 0_{n-r, r} \\ B_2 = 0_{r, n-r} \end{cases}$$

$$\text{Soit } A' = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0_{n-r,r} & A_4 \end{pmatrix} \text{ et } B' = \begin{pmatrix} A_1 & 0_{r,n-r} \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}.$$

Mais alors,  $\chi_{A'} = \chi_{A_1} \chi_{A_4}$  et  $\chi_{B'} = \chi_{A_1} \chi_{B_4}$ , et comme  $r \geq 1$  et  $A_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ ,  $\chi_{A_1}$  admet au moins une racine complexe, qui sera une valeur propre commune à  $A'$  et  $B'$ , donc à  $A$  et  $B$ , car  $A$  et  $A'$  sont semblables donc  $Sp(A') = Sp(A)$  et de même,  $B$  et  $B'$  sont semblables donc  $Sp(B') = Sp(B)$ .

Ceci est absurde, donc on n'a pas  $r \geq 1$  et ainsi,  $M = 0_n$ , donc  $\Phi$  est bijective et  $AX - XB = C$  admet une unique solution dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

\*\*\*\*\*

La réciproque s'énonce : « si l'équation  $AX - XB = C$  admet une unique solution dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , alors  $A$  et  $B$  n'ont aucune valeur propre commune »

que l'on peut reformuler comme plus haut :

« si  $\Phi$  est injective, alors  $A$  et  $B$  n'ont aucune valeur propre commune »

ou encore par contraposée :

« si  $A$  et  $B$  ont une valeur propre commune, alors  $\Phi$  n'est pas injective »

soit finalement :

« si  $A$  et  $B$  ont une valeur propre commune, il existe  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  non nulle telle que  $AM = MB$  »

Supposons donc que  $A$  et  $B$  ont une valeur propre commune  $\lambda$ .

Pour toute  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on a :  $(A - \lambda I_n)M = M(B - \lambda I_n) \Leftrightarrow AM = MB$ , donc quitte à remplacer  $A$  par  $A - \lambda I_n$  et  $B$  par  $B - \lambda I_n$ , on peut supposer  $\lambda = 0$ .

Ainsi,  $r = \text{rg}(B) \leq n-1$  et  $\dim \ker A \geq 1$ . Soit  $(e_1, \dots, e_r)$  une base de  $\text{Im } B$  que l'on complète en  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$  une base de  $\mathbb{C}^n$  et  $e \in \ker A \setminus \{0\}$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$  tel que  $u(e_k) = 0$  pour tout entier  $k$  compris entre 1 et  $n-1$  et  $u(e_n) = e$  (donc  $u$  n'est pas nul).

Si  $M$  la matrice (non nulle) de  $u$  dans la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ , on a :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Im } M = \text{Im } u = \text{Vect}(e) \subset \ker A \Rightarrow AM = 0_n \\ \text{Im } B = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r) \subset \ker u = \ker M \Rightarrow MB = 0_n \end{array} \right\} \Rightarrow AM = MB.$$

On vient donc de trouver  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  non nulle telle que  $AM = MB$ , ce que l'on voulait.

Ainsi, la réciproque est vraie.

\*\*\*\*\*

**III)** Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , notons  $X_k$  la variable aléatoire qui vaut 1 quand le jeton numéroté  $k$  appartient à la poignée piochée et 0 sinon. On a alors  $S = \sum_{k=1}^n k X_k$ .

Une poignée correspond à une partie de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , donc il y en a  $2^n$  (y compris la poignée vide), dont  $2^{n-1}$  contenant le jeton numéroté  $k$  (pour construire une partie de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  contenant  $k$ , il suffit de

choisir une partie de  $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{k\}$  et d'y ajouter  $k$ ). Comme les poignées sont équiprobables, la probabilité d'avoir  $k$  dans la poignée piochée est  $P(X_k = 1) = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$ , et ceci quel que soit  $k$ .

Alors,  $E(X_k) = P(X_k = 1) = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$  quel que soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et, par linéarité de l'espérance :

$$E(S) = E\left(\sum_{k=1}^n k X_k\right) = \sum_{k=1}^n k E(X_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{4}.$$