Préparation aux oraux ENS

Planche n° 1

Soient E un $\mathbb{R}$-espace préhilbertien réel et C une partie convexe de E. On dit que $u \in C$ est un vecteur extrémal de C si et seulement si $C \setminus \{u\}$ est encore convexe.

1) Montrer qu'un vecteur a de C est extrémal si et seulement s'il n'est pas le milieu de deux vecteurs distincts de C (*i.e.* : il n'existe pas de couple (x, y) de C^2 tel que $a = \frac{1}{2}(x+y)$).
2) Montrer que si la partie C est ouverte, elle ne possède aucun point extrémal. Que dire si C est fermée ?
3) On suppose que C est fermée et bornée et E euclidien.
   a. Montrer que l'application $(x, y) \mapsto \|x-y\|$ est continue sur E^2, puis que $\max\limits_{(x,y)\in C^2} \|x-y\|$ existe. On note M ce maximum.
   b. Soit $(a,b) \in C^2$ tel que $\|a-b\| = M$. Montrer que a et b sont extrémaux.
   c. Réciproquement, si a est un vecteur extrémal de C, existe-il $b \in C$ tel que $\|a-b\| = M$?

Planche n° 2

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$.

1) On suppose que $S_n \sim \frac{1}{a_n}$.
   a. Montrer que la série $\sum a_n$ diverge, mais pas grossièrement.
   b. Prouver que $S_{n+1} \sim S_n$, puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(S_{n+1}^2 - S_n^2\right) = 2$.
   c. En déduire que $a_n \sim \frac{1}{\sqrt{2n}}$.
2) Réciproquement, montrer que si $a_n \sim \frac{1}{\sqrt{2n}}$, alors $S_n \sim \frac{1}{a_n}$.

Planche n° 3

Des variables aléatoires indépendantes U_i, $i \in \mathbb{N}^*$, suivent toute une même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Z est une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$ suivant une loi quelconque.

On pose $X = Y = 0$ pour $Z = 0$, et $X = \sum_{i=1}^{Z} U_i$ et $Y = Z - X = \sum_{i=1}^{Z} (1 - U_i)$ pour $Z \geq 1$.

Montrer que pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$, $P(X = k, Y = \ell) = \binom{k+\ell}{k} p^k (1-p)^\ell r_{k+\ell}$ où $r_i = P(Z = i)$.

Exprimer $p_k = P(X = k)$ et $q_k = P(Y = k)$ à l'aide de p et de la suite (r_n).

Montrer que si Z suit une loi de Poisson, X et Y sont indépendantes.

On suppose X et Y indépendantes et Z non presque sûrement nulle.

Montrer que $r_n = \sum_{k+\ell=n} p_k q_\ell$, puis que p_0, q_0, p_1, q_1 sont strictement positifs.

Montrer que $p_{k+1} q_\ell (k+1)(1-p) = p_k q_{\ell+1} (\ell+1) p$ et en déduire une relation de récurrence vérifiée par (q_n), puis q_n en fonction de p_0, p_1 et p.

Montrer que Z suit une loi de Poisson.

Planche n° 4

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme P_n tel que pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$P_n\left(\tan^2 t\right) = \frac{\cos\left((2n+1)t\right)}{\cos^{2n+1} t}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, trouver les racines de P_n et montrer que leur somme vaut $\frac{n(2n-1)}{3}$.

Montrer que pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan^2 t \leq \left(\frac{\pi}{2} - t\right)^{-2} \leq 1 + \tan^2 t$ et en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Planche n° 5

I) Soient deux réels $a<b$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On note $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes, mutuellement indépendantes et prenant leurs valeurs dans $[a,b]$. Si S est leur somme, on veut montrer que pour tout $t>0$, $P\left(S-E(S)\geq t\right)\leq e^{-2t^2/n(b-a)^2}$.

Montrer que si une fonction ϕ est continue de $[c,d]$ dans $\mathbb{R}$, nulle en c et d, de classe C^2 sur $]c,d[$, de dérivée seconde strictement positive, alors ϕ est négative ou nulle.

Soit $s>0$. Montrer, à l'aide du résultat précédent, que pour tout $y\in[c,d]$:

$$e^{sy}\leq\frac{c-y}{c-d}e^{sd}+\frac{y-d}{c-d}e^{sc}.$$

Soit une variable aléatoire discrète Y d'espérance nulle et prenant ses valeurs dans $[c,d]$.

Montrer que $\ln\left(E(e^{sY})\right)\leq\ln\left(\frac{c}{c-d}e^{sd}+\frac{-d}{c-d}e^{sc}\right)$, puis que $E(e^{sY})\leq e^{s^2(d-c)^2/8}$.

On admettra que $\ln\left(\frac{c}{c-d}e^{sd}+\frac{-d}{c-d}e^{sc}\right)\leq\frac{s^2(d-c)^2}{8}$.

Montrer que $P\left(S-E(S)\geq t\right)\leq e^{-st}\prod_{i=1}^{n}E(e^{s\left(X_i-E(X_i)\right)})$.

En choisissant bien les Y, montrer que $P\left(S-E(S)\geq t\right)\leq e^{-st+ns^2(b-a)^2/8}$.

Déterminer le minimum du majorant ci-dessus et conclure.

II) Trouver une CNS sur $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour que $B=\begin{pmatrix}A & 0_n\\ 0_n & A\end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

III) Existe-t-il $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2=\begin{pmatrix}-1 & x & y\\ 0 & -1 & z\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$?

Planche n° 6

Démontrer la formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt.$$

En déduire l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right|\leq\frac{1}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty\left|x-a\right|^{n+1}.$$

Montrer que si f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, bornée ainsi que f'', alors f' est aussi bornée.

Montrer que pour tous $x\in\mathbb{R}$ et $h\in\mathbb{R}^*$, $\left|hf'(x)\right|\leq\|f\|_\infty+\frac{h^2}{2}\|f''\|_\infty$, puis que :

$$\|f'\|_\infty\leq\sqrt{2\|f\|_\infty\|f''\|_\infty}.$$

Planche n° 7

I) Montrer que ϕ défini sur $\mathbb{R}[X]$ par $\phi(P)(X) = P(-X)$ est une symétrie orthogonale pour le produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$.

II) Soient E un espace de dimension finie, f et g deux endomorphismes de E de matrices A et B dans une base $\mathcal{B}$ de E.

Montrer que AB et BA ont même polynôme caractéristique.

On suppose f et g bijectives. Si λ est une valeur propre de AB, on note E_λ le sous-espace propre associé et F_λ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ de BA. Montrer que $g(E_\lambda) \subset F_\lambda$ et que $f(F_\lambda) \subset E_\lambda$. En déduire que E_λ et F_λ ont même dimension.

Montrer que si $f \circ g$ est diagonalisable $g \circ f$ l'est aussi.

Trouver deux matrices X et Y telles que XY soit diagonalisable mais pas YX.

III) Calculer $\int_0^1 x^n \ln x \, dx$ et montrer que $\int_0^1 \ln(1-x)\ln x \, dx = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)^2} = 2 - \frac{\pi^2}{6}$.

Planche n° 8

Montrer que le commutant $C(A)$ de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, est une sous-algèbre.

Montrer que si M inversible appartient à $C(A)$, son inverse aussi.

Trouver le commutant de D matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont tous distincts et montrer que $(I_n, D, D^2, \dots, D^{n-1})$ est une base de $C(D)$.

Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui ont un commutant de dimension 4 ?

Montrer que si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\dim C(A) \geq 2$.

On suppose que $\dim C(A) \geq 3$. Montrer que $A = \lambda I_2$ (on pourra utiliser $\mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2})$ et $\mathrm{Vect}(E_{2,1}, E_{2,2})$).

Donner une base de $C(A)$ pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Planche n° 9

Une suite de variables aléatoires (X_n) d'un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ prend ses valeurs dans $\left\{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\right\}$ et vérifie pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$: $P\left(X_n = \frac{k}{n}\right) = \alpha_n\left(e^{k/n} - 1\right)$

avec $\alpha_n = \left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{k/n} - 1\right)\right)^{-1}$ (pour $n \geq 2$).

Trouver un équivalent de α_n quand n tend vers $+\infty$.

Pour $n \geq 2$, on note F_n la fonction de répartition de X_n. Calculer $F_n(x)$ pour tout réel x.

Montrer que (F_n) converge simplement vers f, continue sur $\mathbb{R}$, dont on donnera l'expression.

Montrer que (F_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Planche n° 10

Soit f de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $f(tx, ty) = t^k f(x, y)$ où k est un entier au moins égal à 1 et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0 .$$

Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = k f(x, y),$$

puis que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = k(k-1) f(x, y) .$$

On pose $h(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta)$. Montrer que $h'' + k^2 h = 0$ et en déduire que f est une fonction polynomiale en x et y.

Planche n° 11

Pour $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \left(1 + a_1 x + \dots + a_n x^n\right)^2 dx$.

Montrer que f est définie, positive, de classe C^1 et tend vers $+\infty$ quand $\|a\|$ tend vers $+\infty$.

Montrer que f admet un minimum au point noté $a^* = (a_1^*, \dots, a_n^*)$.

Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $k! + \sum_{j=1}^{n} (k+j)!\, a_j^* = 0$.

Soit $P(X) = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i^* \prod_{j=1}^{i} (X + j)$. Montrer que $P(X) = a_n^* \prod_{k=1}^{n} (X - k)$.

Calculer $P(-1)$ et en déduire que $a_n^* = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}$.

Montrer que $f(a^*) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \left(1 + \sum_{k=1}^{n} a_k^* x^k\right) dx$ et en déduire que $f(a^*) = \frac{1}{n+1}$.