

Préparation aux oraux : Modalité des épreuves orales

CCINP

Une épreuve : 1h (30 de préparation + 30 min de présentation dont 20 minutes pour le sujet préparé et 10 minutes pour des questions non préparées).

Centrale-Supélec

Deux épreuves :

- *30 min (sans préparation) ;*
- *1h avec python (dont 30 min préparation).*

Mines-Ponts

Une épreuve : 1h15 (dont 15 min préparation du 1^{er} exercice, 2^{ième} exercice sans préparation).

Mines-Télécom

Une épreuve : 30 minutes (sans préparation, résolution de deux exercices portant sur des parties différentes de l'ensemble des programmes de première et deuxième années de la filière du candidat).

e3a-Polytech

Dépend des écoles.

Préparation aux oraux : série I
CCINP

Planche n° 1

I) Déterminer, dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, la matrice de l'endomorphisme f donné par $f(P)(X) = (X - a)P'(X) + P(X) - P(a)$.

Donner son noyau, son image, ses éléments propres.

II) Montrer la convergence simple et uniforme de la suite de fonction $f_n(x) = x^n \frac{e^x}{n!}$, puis étudier la convergence de la série $\sum f_n$.

Planche n° 2

I) Déterminer la limite de la suite de terme général $a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq \frac{1}{n+1}$.

Rayon de convergence et domaine de définition de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

II) On note f l'application qui à $P \in \mathbb{R}_6[X]$ associe le reste de la division euclidienne de P par $D(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

Montrer que f est linéaire de $\mathbb{R}_6[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ et donner sa matrice dans les bases canoniques.

Donner la dimension et une base de $\text{Im } f$ et $\text{ker } f$.

Planche n° 3

I) Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, l'équation pour tout $e^x = nx$ admet deux solutions x_n et y_n telles que $0 \leq x_n < y_n$. Etudier la monotonie des suites (x_n) et (y_n) . En déduire que chacune des suites admet une limite que l'on déterminera.

Montrer qu'en $+\infty$, $x_n \sim \frac{1}{n}$. Trouver un équivalent de $x_n - \frac{1}{n}$ et en déduire un développement asymptotique à deux termes de x_n .

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $y_n \leq (1 + \varepsilon) \ln n$.

II) On donne une famille (f_1, \dots, f_n) d'endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie, tels que $\sum_{k=1}^n f_k = \text{Id}$ et pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $i \neq j$, on a $f_i \circ f_j = 0$.

Montrer que les f_k sont des projecteurs et que E est somme directe de leurs images.

Planche n° 4

I) Calculer le rang de $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, puis le rang de A^2 .

Montrer que $\ker A$ et $\text{Im } A$ sont supplémentaires.

En déduire que A est semblable à $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $B \in GL_2(\mathbb{R})$.

Donner le spectre de B et en déduire que A est diagonalisable.

II) On note N la variable représentant le nombre n de jetons tirés au cours d'un jeu. Elle vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(N = n) = \frac{1}{2^n}$.

Si N est pair, le joueur gagne N jetons, sinon il en perd N .

Donner la probabilité de gagner, l'expression du gain algébrique G et son espérance.

Centrale-Supélec**Planche n° 1**

Montrer que f , définie pour réel $x > 0$ par $f(x) = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt}}{1+t^2} dt$ est de classe C^2 sur \mathbb{R}_+^* .

Trouver un équivalent de f en $+\infty$, puis en 0 .

Planche n° 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On cherche la dimension de $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AMA = 0_n\}$.

On suppose A diagonalisable. Montrer que $\dim E = \dim \{N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid DND = 0_n\}$ où D est une matrice diagonale à définir. Donner alors la dimension de E en fonction du rang de A .

Peut-on généraliser au cas où A n'est pas diagonalisable ?

Planche n° 3

Montrer que $y'' = (x^4 + 1)y$ admet une unique solution f telle que $f'(0) = f(0) = 1$.

On admet que $\frac{1}{f^2}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ . Montrer que $g : x \mapsto f(x) \int_x^{+\infty} \frac{dt}{f(t)^2}$ est solution de l'équation différentielle.

Montrer que $\frac{1}{f^2}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

Planche n° 4

Une famille $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toute une même loi, d'espérance nulle, prend un nombre fini de valeurs. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, $h_+(\varepsilon) = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} (t\varepsilon - \ln(E(e^{tX_1}))) > 0$.

Montrer que :

$$P\left(\frac{1}{n}S_n \geq \varepsilon\right) \leq e^{-nh_+(\varepsilon)},$$

puis que pour tout $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$:

$$P(S_n \geq n\varepsilon)P\left(\sum_{k=1}^m X_{n+k} \geq m\varepsilon\right) \leq P(S_{n+m} \geq (n+m)\varepsilon).$$

Planche n° 5

Etudier la convergence simple sur \mathbb{R}_+ de la série de fonctions $u_n(t) = \frac{1}{n^2} e^{-nt}$.

On pose $f(x, y) = \sum_{n \geq 1} u_n(x^2 + y^2)$. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 .

Montrer que f admet des dérivées partielles d'ordre 1, puis qu'elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Planche n° 6

Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- La matrice AB est-elle inversible ? Quelles sont les valeurs possibles de x ?
- La matrice BA est-elle diagonalisable ?
- Montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Im } A \oplus \ker B$.
- Montrer qu'il existe une infinité de couples de matrices (A, B) vérifiant l'hypothèse de l'énoncé.

Planche n° 7

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux une même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Déterminer les lois de $Z = \min(X, Y)$ et $T = X - Y$.

Les variables aléatoires T et Z sont-elles indépendantes ?

Planche n° 8 (PC)

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée, résoudre l'équation $X + {}^t X = \text{tr}(X)A$.

Mines-Ponts

Planche n° 1

I) Donner la définition d'un projecteur orthogonal d'un espace E euclidien.

Soient p et q deux projecteurs orthogonaux de E .

Montrer que le polynôme caractéristique de $u = p + q$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Montrer que toutes les valeurs propres de u sont dans $[0; 2]$.

Déterminer $\ker u$ et $\ker(u - 2id)$.

II) Si R est le rayon de convergence de $f(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$, quel est le mode de convergence de f sur $] -R; R[$?

On note p_n le nombre de partitions de $\llbracket 1, n \rrbracket$ (on rappelle que (U_1, \dots, U_p) est une partition de $\llbracket 1, n \rrbracket$ si et seulement si les U_k sont deux à deux disjointes et si leur réunion vaut $\llbracket 1, n \rrbracket$).

Montrer que $p_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_k$.

On pose $p_0 = 1$. Montrer que $f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{p_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence $R \geq 1$, puis calculer $f(x)$.

Planche n° 2

I) Résoudre dans \mathbb{R} , $\arctan(x-1) + \arctan x + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{2}$.

II) Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^3$.

Planche n° 3

I) On note $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et on donne $p \in \mathbb{R}$.

Trouver les fonctions $g \in C^2(U, \mathbb{R})$ telles qu'il existe $f \in C^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ vérifiant pour tout $(x, y) \in U$:

$$g(x, y) = f(x^2 + y^2) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = p(x^2 + y^2).$$

II) Montrer que u , endomorphisme d'un espace vectoriel E , est une homothétie si et seulement s'il commute avec tout automorphisme orthogonal de E .

Existe-t-il toujours une base canonique dans un espace vectoriel ? Si oui, y en a-t-il une seule ? Plusieurs ? Une infinité ?

Si u commute avec toutes les symétries orthogonales par rapport à un hyperplan de E , qu'en déduit-on pour u ?

Planche n° 4

I) Justifier que $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1-x\sin^2 t} dt$ est définie sur $] -\infty, 1[$, puis développer f en série entière.

II) Déterminer le polynôme caractéristique de $B = \begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$ en fonction de celui de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que si A est diagonalisable, B l'est aussi.

Préparation aux oraux : série 2

CCINP

Planche n° 5

I) Montrer que la suite des fonctions f_n , définies sur $[0,1]$ par $f_n(0)=0$ et, pour $x > 0$,

$f_n(x) = x \left(\sin \left(\frac{1}{x} \right) \right)^{2n}$ converge simplement mais pas uniformément vers une fonction f à préciser.

II) On donne un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$.

On suppose u injectif : déterminer $K_m = \ker u^m$ et $I_m = \text{Im } u^m$.

Montrer que pour tout entier $m \geq 1$: $K_m \subset K_{m+1}$ et $I_{m+1} \subset I_m$.

On suppose u non injectif : montrer qu'il existe $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $K_p = K_{p+1}$ et $I_p = I_{p+1}$.

Montrer alors que pour tout $q \in \mathbb{N}$, $K_p = K_{p+q}$, $I_p = I_{p+q}$ et $E = K_p \oplus I_p$.

Planche n° 6

I) Soit la suite (u_n) , définie par $u_0 \in [0, \pi]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - \cos u_n$.

Montrer que (u_n) converge vers 0, puis déterminer la nature de la série de terme général u_n .

II) Pour a donné non nul dans un espace euclidien E , déterminer les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $u : x \mapsto \alpha(x|a)a - x$ est une isométrie.

Planche n° 7

I) Nature de $I = \int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t} dt$ et $J = \int_0^{+\infty} \sin t \sin \left(\frac{1}{t} \right) dt$.

II) Déterminer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et une matrice diagonale D semblable à A .

Montrer que si M commute avec D , elle est diagonale.

Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^7 + M + I_3 = A$.

Planche n° 8

I) Montrer que $\sum \frac{2n^2 + 3n + 1}{2^{n+1}}$ converge et calculer sa somme.

II) Calculer le polynôme caractéristique de $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2-n & n-2 & n \end{pmatrix}$.

Déterminer les sous-espaces propres de A_3 . Les matrices A_1 et A_2 sont-elles diagonalisables ?

Centrale-Supélec

Planche n° 9

Soient P et Q deux polynômes non nuls de $\mathbb{C}_n[X]$.

On suppose que P et Q admettent une racine commune λ . Montrer qu'il existe deux polynômes U et V de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, non nuls, tels que $UP + VQ = 0$.

On pose $n = 2$, et on définit ϕ par $\phi(U, V) = UP + VQ$. Montrer que ϕ est linéaire de $\mathbb{C}_1[X]^2$ dans $\mathbb{C}_3[X]$ et exprimer sa matrice dans des bases à déterminer.

Donner une condition sur les coefficients de P et Q pour qu'ils n'aient aucune racine commune.

Planche n° 10

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n .

Donner une relation entre l'ordre de multiplicité d'une valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé. Qu'est-ce qu'un polynôme caractéristique ? Donner le théorème de Cayley-Hamilton.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et P son polynôme caractéristique. Montrer que si $P'(0) \neq 0$, alors $\ker u = \ker u^2$.

[Pour $n = 3$, montrer que $\ker u = \ker u^2$ si et seulement si 0 est valeur propre de même ordre de multiplicité de u et u^2 .] Justifier que cette question est fautive !

Planche n° 11

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant la relation (E): $A^2 = {}^t A$.

- Dans cette question seulement, on suppose que $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. A quelle condition sur a et b la matrice A vérifie-t-elle (E) ? Donner les couples (a, b) solutions.
- Trouver un polynôme de degré 4 annulateur de A .
- Montrer que A^3 est la matrice d'un projecteur et qu'elle est symétrique.
- Montrer que $\ker A^3 = \ker A$ et $\text{Im } A^3 = \text{Im } A$.
- Soit F un sous-espace de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On dit que F est stable par A si pour tout $X \in F$, $AX \in F$. Montrer que si F est stable par A , alors F^\perp aussi.
- Soit $Y \in \text{Im } A$. On note $F_Y = \text{Vect}(Y, AY, A^2Y)$. Montrer que l'application $X \mapsto AX$ induit une isométrie sur F_Y , puis reconnaître cette isométrie.

Planche n° 12

Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, $P = X^n - nX + 1$ admet une unique racine $x_n \in]0, 1[$.

Trouver un équivalent simple a_n de x_n , puis de $x_n - a_n$.

Planche n° 13

Soit $p \in]0,1[$. On se donne une pièce qui tombe sur pile avec la probabilité p . On la lance jusqu'à obtenir deux fois pile et on appelle X le nombre de faces obtenus.

- Donner la loi de X .
- Montrer l'existence et donner la valeur de l'espérance de X .
- Si $X = n$, on place $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne. On pioche une boule au hasard et Y désigne le numéro de la boule piochée. Donner la loi de Y et son espérance.

Planche n° 14

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre

$p \in]0,1[$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $T_n = \frac{1}{S_n}$ et $m_n = E(T_n)$ si elle existe.

- Calculer $E(X_1)$ et $E(S_n)$.
- Montrer que $m_n \leq 1/n$.
- Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $E\left(\frac{X_k}{S_n}\right) = \frac{1}{n}$.
- Montrer que $E\left(\frac{S_k}{S_n}\right)$ vaut $1 + \frac{k-n}{p} m_n$ quand $k > n$ et $\frac{k}{n}$ sinon.

Planche n° 15

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{1+x^2} & \text{quand } y \geq 0 \\ 0 & \text{quand } y < 0 \end{cases}$.

- La fonction f est-elle continue ? de classe C^1 ? Déterminer ses lignes de niveau.
- On considère une droite D_α de \mathbb{R}^2 , de pente α et passant par le point $P = (1,1)$. Soient S la surface de \mathbb{R}^3 d'équation $z = f(x, y)$ et C la courbe tracée sur S et dont la projection orthogonale sur le plan d'équation $z = 0$ est D_α . Soit M un point de C . Déterminer la tangente à C en M .

Planche n° 16

On cherche à résoudre $2xy'(x) - 2y(-x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

Montrer que toute fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Montrer que le problème, sous certaines conditions supplémentaires que l'on précisera, se ramène à deux équations différentielles d'ordre 1 et résoudre.

Mines-Ponts

Planche n° 5

I) Justifier l'existence de $\int_0^1 e^{-t} \ln t \, dt$, puis en donner une valeur approchée sous forme de nombre rationnel à 10^{-3} près (on pourra faire apparaître un développement en série entière usuel).

II) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^{n+1}$. Montrer que :

$$(a_0 \neq 0) \Leftrightarrow \left(\forall Q \in \mathbb{K}[X], \exists ! P \in \mathbb{K}[X], \sum_{k=0}^n a_k P^{(k)} = Q \right).$$

Planche n° 6

I) Existence et valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(3x) - \operatorname{th} x}{x} dx$.

II) Montrer que si z_0, z_1, \dots, z_n sont des complexes deux à deux distincts, la famille des $(X - z_k)^n$ est libre dans $\mathbb{C}[X]$.

Planche n° 7 (cf planches 1 et 11)

I) On note D_n le nombre de permutations sans point fixe de $[[1, n]]$ avec par convention $D_0 = 1$.

Montrer que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k = n!$. Montrer que $\sum_{n \geq 0} \frac{D_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1.

On note S sa somme sur $] -1, 1[$. Calculer $T(x) = e^x S(x)$ et en déduire une expression de D_n .

II) On donne $n \geq 2$ variables aléatoires réelles discrètes et indépendantes $X_1, \dots, X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ avec

$p \in]0, 1[$. On pose $U = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ et $M = U^t U \in \mathcal{M}_n(\{0, 1\})$.

Donner les lois de $\operatorname{rg}(M)$ et $\operatorname{Tr}(M)$. Quelle est la probabilité que M soit une matrice de projection ?

Planche n° 8

I) Montrer que $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ peut être prolongée en une fonction continue sur \mathbb{R}_+ .

Montrer qu'elle est alors de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* , mais pas sur \mathbb{R}_+ .

II) Montrer que si deux matrices A et B , carrées, complexes de taille 2 commutent, alors A est un polynôme en B ou B est un polynôme en A . Cela reste-t-il vrai pour des matrices de taille 3 ? Pour des matrices à coefficients réels ?

Préparation aux oraux - Série 3
CCINP

Planche n° 9

I) Nature et somme de la série $\sum n^{(-1)^n} x^n$.

II) Montrer que f , défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $f(P)(x) = \int_x^{x+1} P(t)dt$ est un endomorphisme et donner sa trace.

Planche n° 10

I) Convergence simple de la suite de fonctions données par $f_n(x) = \cos\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)x\right)$.

Y a-t-il convergence uniforme sur tout segment de \mathbb{R} ? Sur \mathbb{R} ?

II) On munit $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 [f(t)g(t) + f'(t)g'(t)] dt$.

Montrer que (ch, sh) est une base de $A = \{f \in C^2([0,1], \mathbb{R}) \mid f'' = f\}$.

Montrer que si $f \in A$, alors pour tout $g \in E$, $\langle f, g \rangle = f'(1)g(1) - f'(0)g(0)$.

Calculer $\langle ch, sh \rangle$, $\|ch\|^2$, $\|sh\|^2$.

Montrer que si $f \in A$ et $g \in B = \{h \in E \mid h(0) = h(1) = 0\}$, $\langle f, g \rangle = 0$.

Pour $f \in H = \{h \in E \mid h(0) = ch, h(1) = 1\}$, calculer $\langle f, ch \rangle$ et $\langle f, sh \rangle$. Donner les coordonnées dans la base (ch, sh) de la projection orthogonale de $f \in H$ sur A .

Calculer $\inf_{f \in H} \int_0^1 [f(t)^2 + f'(t)^2] dt$.

Planche n° 11

I) Reconnaître l'endomorphisme représenté par $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormale.

II) n variables aléatoires indépendantes X_1, \dots, X_n suivent chacune une loi de Bernoulli de paramètre $p_n \in]0,1[$ et vérifient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i = p$.

Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) = 0$.

Planche n° 12

I) Montrer que si $M \in GL_k(\mathbb{C})$ est de carré diagonalisable, alors elle est diagonalisable (on pourra montrer qu'il existe un polynôme scindé à racines simples annihilant M).

Soit $N = \begin{pmatrix} 0_n & B \\ A & 0_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ avec $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$. En calculant N^{-1} , montrer que $N \in GL_{2n}(\mathbb{C})$.

Calculer N^2 , puis $P(N^2)$ pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$.

On suppose N diagonalisable. Montrer que le produit AB est diagonalisable. Qu'en est-il de la réciproque ?

II) Soient, pour $\alpha > 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Montrer que $R_n \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ au voisinage de $+\infty$.

Etudier la convergence de $\sum \frac{R_n}{S_n}$ suivant la valeur de α .

Planche n° 13

I) Donner les éléments propres de $A(t) = \begin{pmatrix} 1-3t & 4t \\ -2t & 1+3t \end{pmatrix}$.

Si A est diagonalisable, donner la matrice de passage P .

Résoudre le système différentiel $Y'(t) = A(t)Y(t)$.

II) Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Calculer l'espérance de $Y = X^2 + 1$. Calculer $P(2X < Y)$.

Calculer la probabilité que X soit pair ; y a-t-il plus de chances que X soit impair ?

Centrale-Supélec**Planche n° 17 (PC)**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Minorer le rayon de convergence de $\sum_{p \geq 0} \text{tr}(A^p) z^p$ et exprimer sa somme en fonction du polynôme caractéristique de A .

Planche n° 18 (PC, adapté)

Montrer qu'une matrice est nilpotente si et seulement si sa seule valeur propre est 0.

Que dire de M nilpotente et diagonalisable ?

Soient M_1 et M_2 deux matrices nilpotentes, D_1 et D_2 deux matrices diagonalisables. Les quatre matrices commutent deux à deux et $D_1 + M_1 = D_2 + M_2$. Montrer que $M_1 = M_2$ et $D_1 = D_2$.

Planche n° 19

Soit $E = \{f \in C^2([0,1], \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$.

Montrer que N , définie par $N(f) = \sup_{[0,1]} |f'' + 2f' + f|$ est une norme sur E .

Soit $h(t) = e^t f(t)$ avec $f \in E$. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $h(t) = \int_0^t (t-u)h''(u)du$.

Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\|f\|_\infty \leq aN(f)$ et minimiser a .

Planche n° 20

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^\alpha}{n^2}\right)$.

On choisit ici $\alpha = 2$. Etudier la convergence et donner la limite éventuelle de (u_n) .

Ici, $\alpha \in [0,1]$. Convergence et limite éventuelle de (a_n) telle que $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^\alpha}{n^2}$.

Même question pour (u_n) .

Planche n° 21

Montrer la convergence pour $x \in \mathbb{R}^*$ de $f(x) = \int_{-x}^x \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2-t^2)}}$.

La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$? Si oui, la calculer.

Etudier également l'existence d'une limite en 0.

On note \tilde{f} la fonction prolongée par continuité en 0^+ .

Trouver une série de fonctions $S(x)$ coïncidant avec \tilde{f} sur un intervalle $[0, h[$, avec $h > 0$.

Planche n° 22

Soient $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max(x, y) \leq 2, \min(x, y) \geq -2\}$ et $F(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

F admet-elle des extrema sur A ?

Quels points sont susceptibles d'être ses extrema locaux?

Etudier $F(x, x)$ et $F(-x, x)$. Que dire à propos de l'un des extrema locaux?

Donner les extrema de F sur A , puis tous ses extrema.

Planche n° 23 (avec Python)

La probabilité d'obtenir pile en lançant une pièce est $p \in]0, 1[$; on note E_n l'évènement « ne pas obtenir 2 piles d'affilée au cours des n premiers lancers » et p_n sa probabilité.

[Ecrire un programme qui prend n et p pour paramètres et renvoie *True* si E_n et *False* sinon.]

Montrer que $p_{n+2} = (1-p)p_{n+1} + p(1-p)p_n$ et en déduire que l'évènement « obtenir 2 piles d'affilée sur un nombre infini de lancers » est presque sûr.

On note T la variable aléatoire donnant le rang d'apparition du second pile de la première paire de piles consécutifs (aucun piles consécutifs entre les rangs 1 et $T-1$, et pile sort aux rangs T et $T-1$).

[Ecrire un programme qui donne la probabilité de l'évènement $(T = n)$ pour un entier $n \geq 2$.]

Donner la fonction génératrice de T , montrer que T admet une espérance et la calculer.

[Ecrire un programme qui vérifie la valeur de cette espérance.]

Planche n° 24 (avec Python)

Une particule se déplace sur une surface comportant quatre positions successives, A_0 qui est un puits, A_1 et A_2 , deux positions intermédiaires, A_3 un second puits. A l'instant $t = n$:

- si la particule est dans un puits, elle y reste avec une probabilité égale à 1 ;
- si elle est en A_1 , elle va en A_0 avec la probabilité p et en A_2 avec la probabilité $1-p$;
- si elle est en A_2 , elle va en A_1 avec la probabilité p et en A_3 avec la probabilité $1-p$.

On note x_n la position de la particule à $t = n$, avec $x_n(\Omega) = \llbracket 0, 3 \rrbracket$.

[Ecrire une fonction Python qui donne x_{n+1} en fonction de x_n et $p = \frac{1}{2}$.

Ecrire une fonction renvoyant x_n en fonction de x_0 et p . Faire l'histogramme des x_n obtenues sur N essais.]

Soit $X_n = \begin{pmatrix} P(x_n = 0) \\ P(x_n = 1) \\ P(x_n = 2) \\ P(x_n = 3) \end{pmatrix}$. Trouver $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$, indépendante de n , telle que $X_{n+1} = AX_n$.

Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $0 < p < 1$.

On suppose $p = \frac{1}{2}$. Diagonaliser A et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n$.

[Comparer aux résultats obtenus précédemment.]

Mines-Ponts

Planche n° 9

I) Déterminer la nature puis la valeur de l'intégrale $\int_a^b (b-t)^\alpha (t-a)^n dt$ où a, b et α sont des réels (avec $a < b$) et n un entier naturel non nul.

II) On note $S_n(I)$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n dont les valeurs propres sont dans l'intervalle non vide I .

Montrer que pour tout $S \in S_n(\mathbb{R})$ et tout $X \in \mathbb{R}^n$, $(\min_{\lambda \in Sp(S)} \lambda)^t XX \leq {}^t XSX$.

Montrer que $S_n(I)$ est une partie convexe de $S_n(\mathbb{R})$.

Planche n° 10

I) Montrer que D défini par $D(f)(x) = xf'(x)$ est un endomorphisme de l'espace des fonctions de classe C^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Trouver $\ker D$, puis les éléments propres de D .

II) Ensemble de définition et calcul de $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt) dt$ avec $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

Planche n° 11

I) Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes, suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$. On note U le vecteur de coordonnées X_1, \dots, X_n et $M = U^t U$.

Donner les lois de probabilité de $rg(M)$ et $Tr(M)$.

Donner la probabilité que M soit une matrice de projecteur.

On note V le vecteur dont toutes les coordonnées valent 1 et $S = VMV$. Donner l'espérance et la variance de S .

II) Soient E un \mathbb{R} -espace de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel qu'il existe p endomorphismes non nuls v_1, \dots, v_p et p réels distincts $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^n = \sum_{i=1}^p \lambda_i^n v_i$.

Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(u) = \sum_{i=1}^p P(\lambda_i) v_i$ et que u est diagonalisable.

Montrer qu'il existe une base (L_1, \dots, L_p) de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ telle que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$:

$$L_i(\lambda_j) = \delta_{i,j}.$$

Montrer que $Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$.

Planche n° 12

I) Domaine de définition, continuité et dérivabilité de $f : x \mapsto \sum_{n \geq 1} \frac{x}{n(1+nx^2)}$.

Donner un équivalent de f en $+\infty$.

II) Deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent une loi géométrique de paramètres respectifs p et q .

Montrer que $Z = \min(X, Y)$ et $T = \max(X, Y)$ sont deux variables aléatoires.

Donner leur fonction génératrice et, si elle existe, leur espérance.

Préparation aux oraux : série 4**CCINP****Planche n° 14**

I) Pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$, on cherche à déterminer les matrices A symétriques réelles de taille n telles que $A^3 + 4A^2 + 5A = 0_n$. Montrer que A est diagonalisable et que ses valeurs propres sont racines d'un polynôme de degré 3. Conclure.

II) Montrer que $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+x^3+t^3}$ est définie et continue sur \mathbb{R}_+ .

Trouver a, b et c réels tels que $\frac{1}{1+x^3} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$.

En déduire $f(0)$ et calculer la limite de f en $+\infty$.

Planche n° 15

I) Donner le domaine de convergence D de la série de fonctions $\sum u_n$ telle que $u_n(x) = \frac{\ln x}{x^n \ln n}$.

Converge-t-elle normalement sur D ? On note S sa somme et R_n le reste d'ordre n .

Montrer que $|R_n(x)| \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$ et en déduire que S est continue. S est-elle intégrable?

II) Déterminer un polynôme annulateur de A réelle, non nulle, carrée de taille 2 et telle que $A^2 = {}^t A$. Déterminer les valeurs propres de A si on suppose que 0 en est une.

Montrer que A est orthogonalement semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Planche n° 16

I) Trouver a, b et c tels que $\frac{2x+1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$.

On admet que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 t E\left(\frac{1}{t}\right) dt$ converge et la calculer.

II) Pour un entier n pair tel que $n \geq 2$, déterminer le rang de $A_n = \begin{pmatrix} 1 & n & 1 & \cdots & n \\ 2 & n-1 & 2 & \cdots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & n & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer qu'une matrice et sa transposée ont même spectre.

Montrer que A_n est diagonalisable, donner ses éléments propres.

Planche n° 17

I) Montrer que la série de terme général $u_n = \ln(2n + (-1)^n) - \ln(2n)$ est semi-convergente.

II) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est symétrique à valeurs propres positives, si et seulement s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tBB$.

Planche n° 18

I) Soient n variables aléatoire indépendantes X_1, X_2, \dots, X_n suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètres respectifs $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}$. Soit la variable aléatoire N qui vaut 0 si $X_1 = X_2 = \dots = X_n = 1$ et $\min\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_k = 0\}$ sinon. Déterminer la loi de N .

II) Montrer que H , plan de E , un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 3, est stable par $u \in \mathcal{L}(E)$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\text{Im}(u - \lambda \text{id}) \subset H$.

Trouver les sous-espaces de \mathbb{R}^3 stables par $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Centrale-Supélec**Planche n° 25 (ENSAM)**

I) Que peut-on dire de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commute avec une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients diagonaux sont distincts deux à deux ?

Trouver $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $X^2 - 2X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

II) Représenter la courbe d'équation $\frac{x^2}{n^2} + y^2 = 1$ pour $n = 1$ et $n = 2$.

Calculer l'aire de la surface S_n délimitée par la courbe dans le cas général.

On note L_n la longueur de la courbe. Etudier les rayons de convergence de $\sum_{n \geq 1} S_n x^n$ et $\sum_{n \geq 1} L_n x^n$.

☺ On rappelle que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$, on a $\sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b$.

Planche n° 26 (ENSAM)

I) Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^2 = -I_n$, alors n est pair.

Montrer que si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $B^2 - B + I_n = 0_n$, alors n est pair.

Montrer que si $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $C^3 + C^2 + C = 0_n$, alors C est de rang pair.

II) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. On note T la variable aléatoire égale au plus petit entier n tel qu'on ait deux 1 consécutifs aux $n^{\text{ième}}$ et $(n+1)^{\text{ième}}$ tirages.

On note A_n : « pas deux 1 consécutifs lors des n premiers tirages et $X_n = 0$ » et B_n : « pas deux 1 consécutifs lors des n premiers tirages et $X_n = 1$ ». On pose $p_n = P(A_n)$ et $q_n = P(B_n)$.

Calculer $P(T = 1)$ et $P(T = 2)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$.

Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(T = n) = \frac{F_n}{2^{n+1}}$ où $(F_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la suite de Fibonacci.

Planche n° 27

I) Montrer que $f : x \mapsto \int_0^1 \text{ch}(xsh t) dt$ est définie et de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

Trouver une équation différentielle vérifiée par f et une solution développable en série entière de cette équation.

II) Cours : Définir une fonction continue par morceaux ; f définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ est-elle continue par morceaux sur $[0, 1]$? sur $]0, 1[$?

Dessiner les courbes de ch et sh . Comment se comportent-elles en $+\infty$? Quelle est la valeur de $ch 1$? Donner une relation entre ch^2 et sh^2 .

Si $f' = g'$, à quelle condition $f = g + cste$? Que vaut $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$?

Topologiquement, qu'est-ce que le produit cartésien de deux segments ?

Donner le théorème de Cauchy. Est-il applicable dans l'exercice précédent ? Quelle est la forme de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle obtenue ?

Donner un exemple de série entière de rayon de convergence infini, puis de rayon de convergence nul. Définir le rayon de convergence. Quels sont les modes de convergence d'une série entière ?

Planche n° 28

On donne $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$, où a et b sont deux réels strictement positifs, et on

pose $v_n = \ln(n^{b-a} u_n)$. Montrer la convergence de $\sum (v_{n+1} - v_n)$ et en déduire une condition sur a et b pour que $\sum u_n$ converge. Cette condition étant vérifiée, on note $f(x) = \sum_{n \geq 0} u_n x^n$. Donner le domaine de définition de f et calculer $f(1)$.

Planche n° 29

Soit $f_n : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]; P \mapsto \sum_{k=0}^n \left(\int_0^1 P(t) t^k dt \right) X^k$.

- Montrer que f_n est un automorphisme.
- Montrer que M_n , la matrice de f_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, est diagonalisable.
- Soit $Y = {}^t(y_0 \ y_1 \ \dots \ y_n) \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$. Montrer que ${}^t Y M_n Y = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n y_k t^k \right)^2 dt$.
- Montrer que $Sp(f_n) \subset \mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \min Sp(f_n)$. Montrer que la suite (u_n) tend vers 0.

Planche n° 30

Une urne contient initialement deux boules vertes et une boule noire. A chaque étape, on tire une boule au hasard dans l'urne avec remise et l'on ajoute une boule supplémentaire de la même couleur que la boule tirée.

La variable aléatoire X (resp. Y) désigne le rang de la première boule verte (resp. noire) tirée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire Z_n désigne le nombre de boules vertes dans l'urne après n étapes. Enfin U_n , est la variable aléatoire valant 1 si la boule tirée à la $n^{\text{ième}}$ étape est verte et sinon.

- Déterminer les lois de X et Y .
- Exprimer Z_n en fonction de certains des U_k et déterminer $Z_n(\Omega)$.
- Calculer $P(U_{n+1} = 1 | Z_n = k)$.
- Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, U_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $2/3$.
- Déterminer la loi de Z_n .

Mines-Ponts**Planche n° 13**

I) Nature et calcul de $\int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right) dx$.

II) Réduire ϕ , définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par $\phi(M) = M + \text{tr}(AM)A$ où A est fixée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Planche n° 14

I) Etablir la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $f_n(x) = e^{-nx} - (1-x)^n$.

La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle ?

II) Trouver les nombres complexes z tels que le triangle ABC avec A, B et C d'affixes respectives z, z^2 et z^3 ait l'origine pour orthocentre.

Planche n° 15

I) Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{C} -espace vectoriel E de dimension finie.

On suppose u diagonalisable, de valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

Montrer qu'il existe p endomorphismes u_1, \dots, u_p tels que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(u) = \sum_{i=1}^p P(\lambda_i)u_i$.

Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, il existe $P_i \in \mathbb{C}[X]$ tel que $u_i = P_i(u)$.

Réciproquement, montrer que si u est un endomorphisme tel qu'il existe p endomorphismes u_1, \dots, u_p vérifiant pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(u) = \sum_{i=1}^p P(\lambda_i)u_i$, alors u est diagonalisable.

II) Convergence de la série de terme général $u_n = \int_0^1 \cos(nt^2) dt$.

Planche n° 16

I) Trouver les polynômes annulateurs de $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c \end{pmatrix}$.

II) Soit H , définie par $H(0,0) = 0$ et $H(x,y) = \frac{x^4 y}{(x^4 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$.

La fonction H est-elle continue sur \mathbb{R}^2 ?

Préparation aux oraux : série 5
CCINP

Planche n° 19

I) Donner un équivalent de $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ quand n tend vers $+\infty$.

II) Montrer que $(P|Q) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Montrer que $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(1) = 0\}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}_n[X]$, donner sa dimension et calculer $d(1, E)$.

Planche n° 20

I) Ecrire la matrice de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x - 2y + z = 0$ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

II) On lance n fois un dé et on note X_k le chiffre obtenu au $k^{\text{ième}}$ lancer.

Donner la loi et la fonction de répartition F de X_k .

Donner, en fonction de F , la fonction de répartition F_n du maximum M_n atteint au cours des n lancers. La suite (F_n) converge-t-elle ? Uniformément ?

Mêmes questions pour le minimum m_n .

Planche n° 21

I) Une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie $M^2 + 4I_2 = 0_2$ et $S = {}^tMM = M {}^tM$.

Trouver un polynôme annulateur de degré 2 de S . En déduire que $\frac{1}{2}M$ est orthogonale.

Déterminer toutes les matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 + 4I_2 = 0_2$ et ${}^tMM = M {}^tM$.

II) Etude de l'arc paramétré $\left(x(t) = \frac{1}{t} + \ln(2+t), y(t) = t + \frac{1}{t}\right)$. On précisera en particulier les tangentes parallèles aux axes du repère, les branches infinies, les points particuliers de l'arc.

Planche n° 22 (ENSAM)

I) Montrer que f , donnée par $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t} dt$, est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$.

Calculer $f(1)$.

Montrer que pour tout réel $x > 0$, $f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x}$ et trouver un équivalent de f en 0.

Trouver la limite et un équivalent de f en $+\infty$.

II) Montrer que f , défini par $f(M) = M + \text{Tr}(M)I_n$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et déterminer les dimensions de $\ker f$ et $\text{Im } f$.

Déterminer un polynôme annulateur de f de degré 2.

L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Bijectif ? Si oui, calculer f^{-1} .

Planche n° 23

I) Des variables aléatoires mutuellement indépendantes $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Déterminer la loi de $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

On se donne une variable aléatoire N à valeurs dans \mathbb{N} telle que $N+1$ suive la loi géométrique de paramètre p . Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-1, 1[$, la valeur de $\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}$.

Déterminer $P(S_N = k)$ pour tout entier naturel k .

II) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $M^2 + {}^tM = I_n$.

Montrer que si P est un polynôme annulateur de M , toute valeur propre de M est racine de P .

Montrer, sans utiliser le théorème spectral, que si M est symétrique, alors elle est diagonalisable et que $\text{Tr}(M) \times \det M \neq 0$.

Dans le cas général, montrer que M est diagonalisable et symétrique si et seulement si 1 n'en est pas valeur propre.

Centrale-Supélec**Planche n° 31**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possédant p valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, avec $2 \leq p \leq n$. On suppose que pour tout $i \in \llbracket 2, p \rrbracket$, $|\lambda_i| < |\lambda_1|$ (*).

1) Pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Tr}(A^k) \neq 0$, on note $t_k = \frac{\text{Tr}(A^{k+1})}{\text{Tr}(A^k)}$.

Montrer que la suite (t_k) est définie à partir d'un certain rang, qu'elle converge et déterminer sa limite.

2) Justifier que si l'hypothèse (*) n'est pas vérifiée, le résultat précédent peut être faux.

3) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que A et B sont semblables.

b. Déterminer la limite de $\frac{1}{k}A^k$ quand $k \rightarrow +\infty$.

Planche n° 32 (avec Python)

Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$.

On note β la racine négative de $X^2 - X - 1$ et $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x^k}$.

1) Montrer que f est bien définie et de classe C^1 sur $] -1, 1[$.

2) Ecrire une fonction `f(n, x)` qui renvoie $\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{1-x^k}$ et une fonction `Tracef(n)` qui trace la fonction $x \mapsto f(n, x)$ sur $] -1, 1[$.

3) Ecrire une fonction `SommeFibo(n)` qui renvoie $\sum_{k=1}^n \frac{1}{F_{2k}}$, puis conjecturer la valeur de

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{F_{2k}} - \sqrt{5}(f(\beta^2) - f(\beta^4)).$$

4) Exprimer F_n en fonction de n et β , puis prouver la conjecture.

5) A l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer que $f(e^{-y}) \underset{y \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{\ln y}{y}$.

Planche n° 33

On note $\text{diag}(a, b) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ pour $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Soit $S = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$. Montrer que S est semblable à une matrice diagonale que l'on précisera.

Montrer que S est semblable à une matrice de diagonale nulle.

2. Soient $D = \text{diag}(1, 2)$ et $\varphi : M \mapsto DM - MD$.

Montrer qu'il existe des matrices A et B telles que $S = AB - BA$.

Planche n° 34 (avec Python)

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^\alpha (\operatorname{sh} t)^n dt$ où le réel α est défini ci-dessous.

- 1) Justifier que l'équation $\operatorname{sh} x = 1$ d'inconnue réelle x admet une unique solution, appelée α .
- 2) Donner un encadrement de longueur 10^{-5} de cette solution.
- 3) Écrire une fonction `Suite(n)` donnant une valeur approchée de chacun des réels I_1, \dots, I_n .
- 4) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$.
- 5) Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
- 6) En déduire un équivalent de I_n en $+\infty$.

Planche n° 35 (avec Python)

On note \mathcal{E}_n l'ensemble des matrices symétriques à coefficients strictement positifs.

Dans la suite, \mathbb{R}^n est assimilé à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et muni du produit scalaire et de la norme canoniques.

1. a) Faire un programme qui prend en argument un entier n et renvoie une matrice de \mathcal{E}_n avec des coefficients tirés aléatoirement.
 - b) Déterminer à l'aide de Python les valeurs propres de différentes matrices de \mathcal{E}_n .
Une matrice de \mathcal{E}_n peut-elle avoir une valeur propre strictement négative ? toutes les valeurs propres strictement négatives ?
2. On note $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de $A \in \mathcal{E}_n$ et (X_1, \dots, X_n) une base orthonormée de vecteurs propres, où pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, X_i est associé à λ_i .
 - a) Que peut-on conjecturer sur les coefficients de X_n ?
 - b) Montrer que pour tout $Y \in \mathbb{R}^n$, ${}^tYAY \leq \lambda_n \|Y\|^2$.
 - c) Démontrer la conjecture (on pourra considérer le vecteur Z_n dont les composantes sont les valeurs absolues des composantes de X_n).

3. On note $A_a = \begin{pmatrix} A & aX_3 \\ a{}^tX_3 & 0 \end{pmatrix}$ pour tout réel a .

a) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Donner les valeurs propres de A . En déduire celles de A_a pour certaines valeurs de a .

- b) Donner les valeurs propres de A_a dans le cas général.
- c) *Question non notée.*

Indication(s) fournie(s) par l'examineur pendant l'épreuve :

Question 2.c) : Montrer que ${}^tZ_nAZ_n \geq \lambda_n \|Z_n\|^2$.

Question 3.a) : S'intéresser à $A_a \begin{pmatrix} X_i \\ 0 \end{pmatrix}$ où X_i est un vecteur propre de associé à λ_i .

Planche n° 36 (PC)

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme :

$$A \mapsto \|A\| = \sup\{\|AX\|_2, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|X\|_2 = 1\}.$$

- 1) Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée et bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- 2) Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}; A \mapsto \text{Tr}(A)$. Déterminer $f(O_n(\mathbb{R}))$.

Planche n° 37 (PC)

On définit pour tout réel $\alpha > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$ et $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ où x est un réel.

- 1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, étudier la convergence de $I_n(\alpha)$ en fonction de α .
- 2) Montrer que $\Gamma(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
- 3) Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha n^{\frac{1}{\alpha}} I_n(\alpha) = \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.
- 4) Une question non notée.

Planche n° 38 (PC, avec Python)

L'espace \mathbb{R}^n , est identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, est muni du produit scalaire et de la norme canoniques.

Soit $H_n = \left(\frac{1}{i+j-1} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (matrice de Hilbert) et pour $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $q_n(x) = \langle H_n x | x \rangle$.

- 1) Énoncer le théorème spectral. Peut-on l'appliquer à H_n ?
- 2) Exprimer $q_n(x)$ en fonction des x_i . La fonction est-elle continue sur \mathbb{R}^n ?
- 3) Soit $S_n = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}$. Montrez que q_n est bornée et atteint ses bornes sur S_n .
- 4) Ecrire un programme Python qui calcule H_n et $q_n(x)$. Calculez les valeurs propres de H_n pour n compris entre 2 et 5 inclus. Faire une conjecture sur le signe des valeurs propres de H_n .
- 5) Montrer que $q_n(x) = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1} \right)^2 dt$ et conclure sur la conjecture.
- 6) 7) 8) Trois questions non notées.

Mines-Ponts

Planche n° 17

I) Montrer que si f est de classe C^n sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} et s'annule n fois, alors pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f^{(n-k)}$ s'annule au moins k fois.

Qu'en déduit-on, au mieux, en fonction du degré de $P \in \mathbb{R}[X]$, sur le nombre de fois où $P(x) = e^x$.

II) Montrer qu'un endomorphisme symétrique s d'un espace euclidien est ρ -lipchitzien si et seulement si toutes ses valeurs propres sont de module au plus égal à ρ .

Montrer que, dans le cas d'un endomorphisme quelconque, seul un sens de l'équivalence reste vrai.

Planche n° 18

I) Par une comparaison série-intégrale, trouver un équivalent de $u_n = \sum_{k=2}^n \frac{\ln k}{k}$ défini pour $n \geq 2$.

Etudier la monotonie et la convergence de la suite de terme général $v_n = u_n - \frac{1}{2}(\ln n)^2$.

On admet que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$. Montrer que $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k \ln k}{k} = \ln 2 \left(\gamma - \frac{\ln 2}{2} \right)$.

II) Déterminer les classes de similitude de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Planche n° 19

I) Domaine de définition de f , définie par $f(x) = \int_0^x \frac{\ln|1-t|}{t} dt$.

La fonction f est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ? Quel est alors son rayon de convergence ? Calculer $f(1)$. Etudier la dérivabilité de f .

II) (PC) Soient A et B deux matrices symétriques réelles d'ordre n .

On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ bijectif, tel que $P(A) = P(B)$. Montrer que $A = B$.

Planche n° 20

I) Convergence et calcul de $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{(1+2i)^n}$.

II) A, B et C étant données dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que si A et B n'ont aucune valeur propre commune, l'équation $AX - XB = C$ admet une unique solution dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Qu'en est-il de la réciproque ? Le montrer.

III) On pioche une poignée de jetons dans une urne en contenant n , numérotés de 1 à n . On admet que chaque poignée (y compris la poignée vide) a la même probabilité d'être tirée.

Donner l'espérance de la variable aléatoire S donnant la somme des numéros tirés.