

Révisions d'algèbre de 1^{ère} année – Réponses
Exercice 1

1) $A = F \cap (G + H)$ et $B = (F \cap G) + (F \cap H)$.

- a. L'intersection et la somme de deux sous-espaces sont des sous-espaces, donc A et B sont des sous-espaces de E .

$$\begin{cases} G \subset G + H \\ H \subset G + H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F \cap G \subset F \cap (G + H) = A \\ F \cap H \subset F \cap (G + H) = A \end{cases} \Rightarrow \boxed{B \subset A}$$

Si a, b, c sont trois vecteurs non colinéaires d'un plan P de E , et $F = \text{Vect}(a)$, $G = \text{Vect}(B)$ et $H = \text{Vect}(c)$, on a :

$$\begin{cases} A = \text{Vect}(a) \cap P = F \\ B = \{0\} + \{0\} = \{0\} \end{cases} \text{ donc } \boxed{B \subset A \text{ et } B \neq A}$$

- b. Comme G et H jouent le même rôle, on peut supposer que $H \subset F$.

Alors, quel que soit $x \in A$, on a $x \in G + H$ donc $x = x_G + x_H$ avec $(x_G, x_H) \in G \times H$.

Or, $x \in F$ et comme $H \subset F$, $x_H \in F$, donc $x_G = x - x_H \in F$ et ainsi, $\begin{cases} x_G \in F \cap G \\ x_H \in H \end{cases}$, donc $x = x_G + x_H \in (F \cap G) + H = B$. Ainsi, $A \subset B$ et comme $B \subset A$, on obtient $\boxed{A = B}$.

- c. Posons $H' = F \cap H \subset F$. D'après la question précédente, en remplaçant H par H' , on obtient :

$$F \cap (G + (F \cap H)) = F \cap (G + H') = (F \cap G) + (F \cap H').$$

Or, $F \cap H' = F \cap F \cap H = F \cap H$, donc $F \cap (G + (F \cap H)) = (F \cap G) + (F \cap H)$, soit :

$$\boxed{B = F \cap (G + (F \cap H))}$$

- 2) On a :

$$\begin{cases} G \cap H \subset G \\ G \cap H \subset H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F + (G \cap H) \subset F + G \\ F + (G \cap H) \subset F + H \end{cases} \Rightarrow \boxed{F + (G \cap H) \subset (F + G) \cap (F + H)}$$

Et avec à nouveau a, b, c trois vecteurs non colinéaires d'un plan P de E , et $F = \text{Vect}(a)$, $G = \text{Vect}(B)$ et $H = \text{Vect}(c)$, on a :

$$\begin{cases} F + (G \cap H) = F \\ (F + G) \cap (F + H) = P \end{cases} \text{ donc } \boxed{\text{l'inclusion est stricte}}$$

3) $F \cap G = F + H$ donne $H \subset F \cap G$, donc :

$$F + G = F \cap H \subset F \cap (F \cap G) = F \cap G \subset F + G.$$

Ainsi, $F + G = F \cap H = F \cap G = F + H$

D'après la question 1, on a :

$$F \subset F + (G + H) = (F + G) + (F + H) = (F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H) \subset F.$$

Donc :

$$F = F + (G + H) = F \cap (G + H) \subset G + H.$$

Donc, $F = G + H$ et :

$$F \cap G = (G + H) \cap G = G$$

$$F \cap H = (G + H) \cap H = H$$

Et comme $F \cap H = F \cap G$, on a $H = G$ et avec $F = G + H$, on obtient $\boxed{F = G = H}$.

4) Soit $x \in H$. Comme $H \subset H \oplus K = F \oplus G$, $x \in F \oplus G$, donc il existe $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$. Or :

- $G \subset K$, donc $x_G \in K$;
- $F \subset H$, donc $x_F \in H$ et ainsi, $x_G = x - x_F \in H$.

Ainsi, $x_G \in K \cap H$ et, comme la somme $H \oplus K$ est directe, on a $K \cap H = \{0\}$, donc $x_G = 0$.

Ceci prouve que $x = x_F \in F$. Ainsi, $H \subset F$ et comme par hypothèse, $F \subset H$, on obtient :

$$\boxed{F = H}$$

Les couples (F, G) et (H, K) jouant des rôles symétriques, on a aussi :

$$\boxed{G = K}$$

Exercice 2

Notons $\dim E = n$. Soient F et G deux sous-espaces de E .

- Si F et G possèdent un supplémentaire commun H , alors on a :

$$\dim F + \dim H = \dim G + \dim H = n.$$

Donc, $\dim F = \dim G$.

- On suppose que $\dim F = \dim G = p$. Procédons par récurrence descendante sur $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
 - Pour $p = n$, on a alors $F = G = E$ et $\{0\}$ est un supplémentaire commun à F et G .
 - On suppose que la propriété est vraie à un rang $p+1 \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Soient F et G deux sous-espaces de E de dimension $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On a $F \cup G \subset E$.

Si $F \cup G = E$, alors $F \cup G$ est un sous-espace de E donc $F \subset G$ ou $G \subset F$ (résultat classique, pas officiellement au programme, donc à reprouver normalement). Mais, comme $\dim F = \dim G$, on a alors $F = G$ et n'importe quel supplémentaire de F (il y en a car on est en dimension finie) est commun à F et G .

Si $F \cup G \neq E$, alors il existe un vecteur non nul de E qui n'appartient ni à F , ni à G . Si D est la droite engendrée par ce vecteur, on a $F + D = F \oplus D$ et $\dim(F \oplus D) = p + 1$, et de même, $G + D = G \oplus D$ et $\dim(G \oplus D) = p + 1$.

Ainsi, $F \oplus D$ et $G \oplus D$ sont deux sous-espaces de E de même dimension $p + 1$.

Alors, par hypothèse de récurrence, il existe un sous-espace H de E tel que $(G \oplus D) \oplus H = (F \oplus D) \oplus H$, soit $G \oplus (D \oplus H) = F \oplus (D \oplus H)$ et $D \oplus H$ est un supplémentaire commun à F et G . La propriété est donc vraie au rang p .

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

On a donc bien l'équivalence demandée :

Deux sous-espaces F et G ont un supplémentaire commun si et seulement si $\dim F = \dim G$.

Exercice 3

1) On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- Pour $n = 1$, $f^1 \circ g - g \circ f^1 = f \circ g - g \circ f = Id_E = f^0$. La propriété est vérifiée.
- On suppose que la propriété est vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned} f^{n+1} \circ g - g \circ f^{n+1} &= f \circ (f^n \circ g) - g \circ f^{n+1} = f \circ (g \circ f^n + n f^{n-1}) - g \circ f^{n+1} \text{ par H.R.} \\ &= (f \circ g) \circ f^n + n f^n - g \circ f^{n+1} = (g \circ f + Id_E) \circ f^n + n f^n - g \circ f^{n+1} \\ &= g \circ f^{n+1} + f^n + n f^n - g \circ f^{n+1} = (n+1) f^n \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et n scalaires $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ tels que $a_0 Id_E + a_1 f + a_2 f^2 + \dots + a_{n-1} f^{n-1} = 0$.

Si $\{k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, a_k \neq 0\}$ est non vide, notons $d = \max\{k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, a_k \neq 0\}$.

On a alors $a_{d+1} = \dots = a_{n-1} = 0$ et $a_0 Id_E + a_1 f + a_2 f^2 + \dots + a_d f^d = 0$ avec $a_d \neq 0$.

Posons $P = \sum_{k=1}^d a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On a alors $P(f) = 0$ et :

$$\begin{aligned} P(f) \circ g - g \circ P(f) &= \left(a_0 g + \sum_{k=1}^d a_k f^k \circ g \right) - \left(a_0 g + \sum_{k=1}^d a_k g \circ f^k \right) \\ &= \sum_{k=1}^d a_k (f^k \circ g - g \circ f^k) = \sum_{k=1}^d a_k (k f^{k-1}) = P'(f) \end{aligned}$$

Comme $P(f) = 0$, on a $P'(f) = 0$. On montre alors par récurrence (à faire !) que pour tout $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$, $P^{(k)}(f) = 0$ et en particulier, $P^{(d)}(f) = d! a_d Id_E = 0$, donc $a_d = 0$, ce qui est absurde car $a_d \in \{k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, a_k \neq 0\}$.

Ainsi, $\{k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, a_k \neq 0\}$ est vide, soit $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0$. Mais alors $a_0 Id_E = 0$ et donc $a_0 = 0$, soit $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$.

Ceci prouve que :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(Id_E, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libres.

Si E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$ alors $\mathcal{L}(E)$ est dimension p^2 .

En posant $n = p^2 + 1 \in \mathbb{N}^*$, la famille $(Id_E, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est alors liée car elle contient $n = p^2 + 1$ vecteurs de $\mathcal{L}(E)$. Ceci contredit le résultat précédent, donc :

E n'est pas de dimension finie.

3) Les applications $f : P \mapsto P'$ et $g : P \mapsto XP$ sont bien des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$ et pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$\begin{aligned} f \circ g(P) - g \circ f(P) &= f(g(P)) - g(f(P)) = f(XP) - g(P') \\ &= (XP)' - XP' = P + XP' - XP' = P \end{aligned}$$

Ainsi, $f \circ g - g \circ f = Id_E$ et donc :

$f : P \mapsto P'$ et $g : P \mapsto XP$ vérifient les hypothèses.

Exercice 4

(i) $\Leftrightarrow$ (ii)

D'après le théorème du rang, on a toujours $\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$, donc :

$$E = \ker f + \operatorname{Im} f = \ker f \oplus \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}.$$

- Si $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$, alors $E = \ker f + \operatorname{Im} f$.
- Si $E = \ker f + \operatorname{Im} f$, alors :

$$\dim(\ker f + \operatorname{Im} f) = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f - \dim(\ker f \cap \operatorname{Im} f) = \dim E.$$

Or, avec le théorème du rang on a $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E$, donc $\dim(\ker f \cap \operatorname{Im} f) = 0$, soit : $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$. Ainsi : $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv)

On a toujours $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$ et $\ker f \subset \ker f^2$. Donc :

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Leftrightarrow \operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f^2)$$

$$\ker f = \ker f^2 \Leftrightarrow \dim \ker f = \dim \ker f^2$$

Et, avec le théorème du rang :

$$\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \ker f^2 + \dim \operatorname{Im} f^2.$$

Donc, $\dim \ker f - \dim \ker f^2 = \operatorname{rg}(f^2) - \operatorname{rg}(f)$ et ainsi :

$$\underline{\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2} \Leftrightarrow \operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f^2) \Leftrightarrow \dim \ker f = \dim \ker f^2 \Leftrightarrow \underline{\ker f = \ker f^2}.$$

(iv) $\Leftrightarrow$ (ii)

D'après la première partie, il suffit de prouver :

$$\ker f^2 = \ker f \Leftrightarrow \ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}.$$

- On suppose $\ker f = \ker f^2$. Soit $x \in \ker f \cap \operatorname{Im} f$.

On a $x = f(z)$ avec $z \in E$ et $f(x) = f^2(z) = 0$, donc $z \in \ker f^2 = \ker f$, donc $x = f(z) = 0$ et ainsi : $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

- On suppose $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$. Soit $x \in E$. On a

$$x \in \ker f^2 \Leftrightarrow f(x) \in \ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\} \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \ker f.$$

Ainsi : $\ker f = \ker f^2$.

Finalement, les quatre propositions sont bien équivalentes.

Exercice 5

Soient F et G deux sous-espaces de E .

- S'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\ker f = F$ et $\operatorname{Im} f = G$, alors avec le théorème du rang :

$$\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim F + \dim G.$$

- Réciproquement, supposons que $\dim E = \dim F + \dim G$. Notons $p = \dim F$ et $n = \dim E$.

Rappelons qu'un endomorphisme est parfaitement défini par l'image d'une base.

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F , que l'on complète en $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de E , et $(\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_n)$ une base de G (la famille contient bien $n - (p+1) + 1 = n - p = \dim E - \dim F = \dim G$ vecteurs). Soit alors $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$f(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq p \\ \varepsilon_i & \text{si } i > p \end{cases}$$

On a alors :

- $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_p), f(e_{p+1}), \dots, f(e_n)) = \operatorname{Vect}(\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_n) = G.$
- $F = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_p) \subset \ker f$ et $\dim \ker f = n - \operatorname{rg}(f) = n - \dim G = \dim F$, donc $F = \ker f$.

Ainsi :

Il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\ker f = F$ et $\operatorname{Im} f = G$ si et seulement si $\dim E = \dim F + \dim G$.

Exercice 6

1) L'idée est ici la même que celle de la preuve du théorème du rang. Considérons :

$$u : \begin{cases} \text{Im } f \rightarrow E \\ x \mapsto g(x) \end{cases}.$$

Comme g est linéaire, u l'est aussi, on peut donc appliquer le théorème du rang à u :

$$\dim(\text{Im } f) = \dim(\text{Im } u) + \dim(\ker u).$$

Or :

- $\text{Im } u = g(\text{Im } f) = \text{Im}(g \circ f)$;
- $\ker u = \{x \in \text{Im } f \mid u(x) = g(x) = 0\} = \text{Im } f \cap \ker g$.

Ainsi, $\dim(\text{Im } f) = \dim(\text{Im}(g \circ f)) + \dim(\text{Im } f \cap \ker g)$, soit :

$$\boxed{rg(f) - rg(g \circ f) = \dim(\text{Im } f \cap \ker g)}$$

2) On suppose que $f \circ g = 0$ et $f + g \in GL(E)$.

- $f + g \in GL(E)$, donc :

$$\text{Im}(f + g) = E.$$

Or, on a toujours $\text{Im}(f + g) \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(g) \subset E$, donc :

$$\underline{\text{Im}(f + g) = \text{Im}(f) + \text{Im}(g) = E}.$$

- $f \circ g = 0$ se réécrit $\text{Im } g \subset \ker f$, donc $rg(g) \leq \dim \ker f = \dim E - rg(f)$, soit :

$$rg(f) + rg(g) \leq \dim E.$$

Or, $\text{Im}(f) + \text{Im}(g) = E$, donc :

$$\dim(\text{Im}(f) + \text{Im}(g)) = rg(f) + rg(g) - \dim(\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g)) = \dim E.$$

Ainsi, $rg(f) + rg(g) \geq \dim E + \dim(\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g)) \geq \dim E$ et donc :

$$rg(f) + rg(g) = \dim E.$$

Ceci implique que $\dim(\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g)) = 0$, donc que $\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\}$ et ainsi :

$$\underline{\text{Im}(f + g) = \text{Im}(f) \oplus \text{Im}(g) = E}.$$

3) On suppose que $f \circ g = g \circ f$ et $rg(f) = rg(g) = rg(f \circ g) = rg(g \circ f)$.

a. On a toujours $\text{Im}(f \circ g) \subset \text{Im } f$ et comme ici $rg(f) = rg(f \circ g)$, on obtient :

$$\underline{\text{Im}(f \circ g) = \text{Im } f}.$$

Comme f et g jouent le même rôle, on a aussi :

$$\underline{\text{Im}(g \circ f) = \text{Im } g}.$$

Et finalement :

$$\boxed{\text{Im } f = \text{Im } g = \text{Im}(f \circ g) = \text{Im}(g \circ f)}$$

b. D'après le théorème du rang, on a $\dim E = \operatorname{rg}(g) + \dim \ker g = \operatorname{rg}(f \circ g) + \dim \ker(f \circ g)$.

Donc, avec $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im}(f \circ g)$, on obtient $\dim \ker f = \dim \ker(f \circ g)$ et comme on a toujours $\ker g \subset \ker(f \circ g)$, on a :

$$\underline{\ker(f \circ g) = \ker g}.$$

Comme f et g jouent le même rôle, on a aussi :

$$\underline{\ker(g \circ f) = \operatorname{Im} f}.$$

Et finalement :

$$\boxed{\ker f = \ker g = \ker(f \circ g) = \ker(g \circ f)}$$

c. On a $f \circ g(I) \subset f \circ g(E) = \operatorname{Im}(f \circ g)$, soit :

$$\underline{f \circ g(I) \subset I}.$$

Soit $x \in I = \operatorname{Im}(f \circ g)$. Il existe $z \in E$ tel que $x = f \circ g(z) = f(g(z))$ et :

- $g(z) \in \operatorname{Im} g = \operatorname{Im}(g \circ f)$, donc il existe $z_1 \in E$ tel que $g(z) = g \circ f(z_1) = g(f(z_1))$.
- $f(z_1) \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Im}(f \circ g)$, donc il existe $z_2 \in E$ tel que $f(z_1) = f \circ g(z_2)$.

Alors :

$$x = f(g(z)) = f(g(f(z_1))) = f \circ g(f(z_1)) = f \circ g(f \circ g(z_2)) \in f \circ g(I).$$

Ainsi, $\underline{I \subset f \circ g(I)}$ et finalement :

$$\boxed{f \circ g(I) = I}$$

On a $g(I) \subset g(E) = \operatorname{Im} g$, soit $\underline{g(I) \subset I}$. Or, $I = f \circ g(I) = g \circ f(I) \subset g(I)$, soit $\underline{I \subset g(I)}$.

Ainsi :

$$\boxed{g(I) = I}$$

Comme f et g jouent le même rôle, on a aussi :

$$\boxed{f(I) = I}$$

d. Comme $f(I) = I$, I est stable par f et l'endomorphisme f_I induit par f sur I est surjectif, donc bijectif, donc injectif (on est en dimension finie). Ainsi :

$$\ker f_I = \{x \in I \mid f_I(x) = f(x) = 0\} = I \cap \ker f = \{0\}.$$

Et comme $\ker f = J$, on a bien :

$$\boxed{I \cap J = \{0\}}$$

Avec $I \cap J = \{0\}$, on a $I + J = I \oplus J$ et, avec le théorème du rang :

$$\dim(I \oplus J) = \dim I + \dim J = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f = \dim E.$$

Ainsi, $I \oplus J \subset E$ et $\dim(I \oplus J) = \dim E$, donc :

$$E = I \oplus J$$

Exercice 7

Notons $(E_{k,\ell})_{k,\ell \in \llbracket 1,n \rrbracket}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec pour tous $k, \ell \in \llbracket 1,n \rrbracket$, $E_{k,\ell} = (\delta_{k,i} \delta_{\ell,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

Notons aussi $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

1) Pour tous $k, \ell \in \llbracket 1,n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} AE_{k,\ell} &= \left(\sum_{r=1}^n a_{i,r} \delta_{k,r} \delta_{\ell,j} \right)_{1 \leq i,j \leq n} = (\delta_{\ell,j} a_{i,k})_{1 \leq i,j \leq n} \\ E_{k,\ell} A &= \left(\sum_{r=1}^n \delta_{k,i} \delta_{\ell,r} a_{r,j} \right)_{1 \leq i,j \leq n} = (\delta_{k,i} a_{\ell,j})_{1 \leq i,j \leq n} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} AE_{k,\ell} = E_{k,\ell} A &\Leftrightarrow \forall i, j \in \llbracket 1,n \rrbracket, \delta_{k,i} a_{\ell,j} = \delta_{\ell,j} a_{i,k} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a_{\ell,\ell} = a_{k,k} \\ \forall j \in \llbracket 1,n \rrbracket, j \neq \ell, a_{\ell,j} = 0 \\ \forall i \in \llbracket 1,n \rrbracket, i \neq k, a_{i,k} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tous $k, \ell \in \llbracket 1,n \rrbracket$, ceci prouve que pour tous $i, j \in \llbracket 1,n \rrbracket$, $a_{j,j} = a_{i,i}$ et $a_{i,j} = 0$ quand $i \neq j$, autrement dit que :

La matrice A est scalaire.

2) Pour tous $k, \ell \in \llbracket 1,n \rrbracket$, $I_n + E_{k,\ell}$ est soit triangulaire avec des coefficients diagonaux égaux à 1, soit diagonale avec des coefficients diagonaux égaux à 1 ou 2.

Dans tous les cas, $I_n + E_{k,\ell} \in GL_n(\mathbb{K})$, donc $A(I_n + E_{k,\ell}) = (I_n + E_{k,\ell})A$. Or,

$$A(I_n + E_{k,\ell}) = (I_n + E_{k,\ell})A \Leftrightarrow A + AE_{k,\ell} = A + E_{k,\ell}A \Leftrightarrow AE_{k,\ell} = E_{k,\ell}A.$$

On se ramène donc au cas précédent et donc à nouveau :

La matrice A est scalaire.

Exercice 8

Soit A la matrice de f dans une base de E .

Si f a la même matrice dans toutes les bases de E , alors pour toute matrice P de $GL_n(\mathbb{K})$, $P^{-1}AP = A$, soit $AP = PA$. Ainsi, on se retrouve dans la situation de l'exercice précédent, donc A est scalaire, autrement dit :

f est une homothétie.

Exercice 9

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

($\Rightarrow$) Si A est de rang 1, alors A est non nulle, autrement dit, l'une des colonnes de A n'est pas nulle, notons-la X , et toutes les autres sont proportionnelles à cette colonne, donc pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la $j^{\text{ième}}$ colonne de A s'écrit $y_j X$ avec $y_j \in \mathbb{K}$. En notant alors Y le vecteur colonne dont les coefficients sont les y_j , alors Y est non nul (car la coordonnée correspondant à la colonne X vaut 1) et $A = XY^T$.

($\Leftarrow$) S'il existe deux vecteurs colonnes non nuls $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $Y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que $A = XY^T$, alors $A = (x_i y_j)_{1 \leq i, j \leq n}$, donc les colonnes de A sont les $y_j X$, toutes proportionnelles, donc $rg(A) \leq 1$. Et comme X et Y sont non nuls, il existe $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $y_j X$ est non nul, donc $rg(A) \geq 1$. Et ainsi : $rg(A) = 1$.

Exercice 10**Version sup**

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une éventuelle solution. On a :

$$\begin{aligned}
 M^2 + M &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + bc + a & b(a+d) + b \\ c(a+d) + c & d^2 + bc + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + a + bc = 1 \\ d^2 + d + bc = 1 \\ b(a+d+1) = 1 \\ c(a+d+1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + a + bc = 1 \\ a^2 - d^2 + a - d = (a+d+1)(a-d) = 0 \\ c = b = \frac{1}{a+d+1} \neq 0 \text{ avec } a+d+1 \neq 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + a + \left(\frac{1}{2a+1}\right)^2 = 1 \\ a = d \\ c = b = \frac{1}{2a+1} \text{ avec } 2a+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4a^2 + 4a)(2a+1)^2 + 4 = 4(2a+1)^2 \\ a = d \\ c = b = \frac{1}{2a+1} \neq 0 \text{ avec } 2a+1 \neq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 M^2 + M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} ((2a+1)^2 - 1)(2a+1)^2 + 4 = 4(2a+1)^2 \\ a = d \\ c = b = \frac{1}{2a+1} \neq 0 \text{ avec } 2a+1 \neq 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} (2a+1)^4 - 5(2a+1)^2 + 4 = 0 \\ a = d \\ c = b = \frac{1}{2a+1} \neq 0 \text{ avec } 2a+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2a+1)^2 = 1 \text{ ou } 4 \\ a = d \\ c = b = \frac{1}{2a+1} \neq 0 \text{ avec } 2a+1 \neq 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+1 = -1 \text{ ou } 1 \text{ ou } 2 \text{ ou } -2 \\ a = d \\ c = b = \frac{1}{2a+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \text{ ou } 0 \text{ ou } \frac{1}{2} \text{ ou } -\frac{3}{2} \\ d = a \\ c = b = \frac{1}{2a+1} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \boxed{M = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}
 \end{aligned}$$

Réciproquement, on vérifie que ces quatre matrices sont bien solution.

Version spé

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle donc diagonalisable et après réduction, on a :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} P \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{2} P.$$

Donc, en posant $N = P^{-1}MP$, on a :

$$\begin{aligned}
 M^2 + M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow P^{-1}(M^2 + M)P = (P^{-1}MP)^2 + P^{-1}MP = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} P \\
 &\Leftrightarrow N^2 + N = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Comme $N^2 + N$ et N commutent, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et N commutent, ce qui implique que $N = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ et :

$$N^2 + N = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \alpha = 2 \\ \beta^2 + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \text{ ou } -2 \\ \beta = 0 \text{ ou } -1 \end{cases}$$

Donc, avec $M = PNP^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha + \beta & \alpha - \beta \\ \alpha - \beta & \alpha + \beta \end{pmatrix}$, on retrouve :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}$$

Exercice 11

Supposons que $A \notin GL_n(\mathbb{R})$.

Soit alors $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \ker A$ non nul. Notons $|x_k| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i|$. On a $AX = 0$, donc $\sum_{j=1}^n a_{k,j} x_j = 0$, ce qui donne :

$$|a_{k,k}| |x_k| = |a_{k,k} x_k| = \left| - \sum_{j=1, j \neq k}^n a_{k,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{k,j}| |x_j| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{k,j}| |x_k| = \left(\sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{k,j}| \right) |x_k|.$$

Comme X est non nul, on a $|x_k| > 0$, donc on peut diviser $|a_{k,k}| |x_k| \leq \left(\sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{k,j}| \right) |x_k|$ par $|x_k|$ sans changer le sens de l'inégalité, ce qui donne :

$$|a_{k,k}| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{k,j}|.$$

Or, par hypothèse $a_{k,k} = |a_{k,k}| > \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{k,j}|$. L'hypothèse $A \notin GL_n(\mathbb{R})$ mène donc une contradiction et ainsi :

$A \in GL_n(\mathbb{R})$