

Révisions de 1^{ère} année

Analyse asymptotique

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

- On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et $u_n + u_{n+1} \sim \frac{2}{n}$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0^+ et donner un équivalent simple de u_n .
- On suppose que $u_n \rightarrow 0^+$ et $u_n + u_{n+1} \sim \frac{2}{n}$. A-t-on $u_n \sim \frac{1}{n}$?
- On suppose que $u_n \rightarrow 0$ et $u_n + u_{2n} \sim \frac{3}{2n}$. Montrer que $u_n \sim \frac{1}{n}$.

a. Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} \leq u_n \leq u_{n-1} \Rightarrow u_n + u_{n+1} \leq u_n + u_n \leq u_{n-1} + u_n \Rightarrow \frac{n}{2}(u_n + u_{n+1}) \leq n u_n \leq \frac{n}{2}(u_{n-1} + u_n).$$

Or, $u_n + u_{n+1} \sim \frac{2}{n}$, donc $\frac{n}{2}(u_n + u_{n+1}) \rightarrow 1$. Ceci implique que $\frac{n}{2}(u_n + u_{n+1}) > 0$ apcr et que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{n}{2}(u_{n-1} + u_n) \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n-1} \left[\frac{n-1}{2}(u_{n-1} + u_n) \right] \right) = 1 \times 1 = 1.$$

Alors, $n u_n \geq \frac{n}{2}(u_n + u_{n+1}) > 0$ apcr et d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n = 1$. Ceci prouve que :

$$u_n \sim \frac{1}{n} \text{ et } u_n \rightarrow 0^+.$$

b. Si $u_n + u_{n+1} \sim \frac{2}{n}$, alors $n(u_n + u_{n+1}) = n u_n + n u_{n+1} \rightarrow 2$ et comme $u_n \rightarrow 0^+$, on a $u_{n+1} \rightarrow 0$ donc :

$$n u_n + (n+1) u_{n+1} \rightarrow 2.$$

Si $v_n = n u_n$, on a $v_n \geq 0$ apcr ($u_n \rightarrow 0^+$ donc $u_n \geq 0$ apcr) $v_n + v_{n+1} \rightarrow 2$ et la question devient : a-t-on $v_n \rightarrow 1$?

Telle qu'elle est formulée, on penche pour une réponse négative. Il nous faut donc trouver un contre-exemple, à savoir une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positive (apcr), telle que $v_n + v_{n+1} \rightarrow 2$, mais pas $v_n \rightarrow 1$.

Si on pose $v_n = \frac{1}{2}$ si n est pair et $\frac{3}{2}$ si n est impair, alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n + v_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$ donc on a bien $v_n + v_{n+1} \rightarrow 2$, mais $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = \frac{1}{4n}$ $u_{2n+1} = \frac{3}{2(2n+1)}$ vérifie alors les hypothèses

$(u_n \rightarrow 0^+ \text{ et } u_n + u_{n+1} \sim \frac{2}{n})$ mais on n'a pas $u_n \sim \frac{1}{n}$. Ainsi :

Les hypothèses $u_n \rightarrow 0^+$ et $u_n + u_{n+1} \sim \frac{2}{n}$ n'impliquent pas $u_n \sim \frac{1}{n}$.

c. Posons à nouveau $v_n = nu_n$. On a $u_n + u_{2n} \sim \frac{3}{2n}$, donc $nu_n + nu_{2n} \rightarrow \frac{3}{2}$, soit $v_n + \frac{1}{2}v_{2n} \rightarrow \frac{3}{2}$.

Soit un réel $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$, on a $\left|v_n + \frac{1}{2}v_{2n} - \frac{3}{2}\right| \leq \varepsilon$.

Alors, pour tout entier $n \geq N$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $2^k n \geq n \geq N$, donc :

$$\left|v_{2^k n} + \frac{1}{2}v_{2^{k+1}n} - \frac{3}{2}\right| \leq \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{(-1)^k}{2^k} \left(v_{2^k n} + \frac{1}{2}v_{2^{k+1}n} - \frac{3}{2}\right)\right| \leq \varepsilon \left|\frac{(-1)^k}{2^k}\right| \Rightarrow \left|\frac{(-1)^k}{2^k} v_{2^k n} - \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}} v_{2^{k+1}n} - \frac{3}{2} \frac{(-1)^k}{2^k}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Alors, pour tout entier $n \geq N$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left|\sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{(-1)^k}{2^k} v_{2^k n} - \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}} v_{2^{k+1}n} - \frac{3}{2} \frac{(-1)^k}{2^k}\right)\right| \leq \sum_{k=0}^{p-1} \left|\frac{(-1)^k}{2^k} v_{2^k n} - \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}} v_{2^{k+1}n} - \frac{3}{2} \frac{(-1)^k}{2^k}\right| \leq \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Or, $\sum_{k=0}^{p-1} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\varepsilon \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) \leq 2\varepsilon$ et par télescopage :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{(-1)^k}{2^k} v_{2^k n} - \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}} v_{2^{k+1}n} - \frac{3}{2} \frac{(-1)^k}{2^k}\right) &= \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{(-1)^k}{2^k} v_{2^k n} - \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}} v_{2^{k+1}n}\right) - \frac{3}{2} \sum_{k=0}^{p-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \\ &= v_n - \frac{(-1)^p}{2^p} v_{2^p n} - \frac{3}{2} \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^p}{1 + \frac{1}{2}} = v_n - \frac{(-1)^p}{2^p} v_{2^p n} - 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^p \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier $n \geq N$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left|v_n - \frac{(-1)^p}{2^p} v_{2^p n} - 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^p\right| \leq 2\varepsilon \quad (1).$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ donc, pour $n \geq N$ donné, on a $\lim_{p \rightarrow +\infty} 2^p n = +\infty$ et :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^p}{2^p} v_{2^p n} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^p}{2^p} 2^p n u_{2^p n} = \lim_{p \rightarrow +\infty} (-1)^p n u_{2^p n} = 0.$$

Et, en faisant tendre p vers $+\infty$ dans (1), on obtient alors :

$$|v_n - 1| \leq 2\varepsilon.$$

Finalement :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |v_n - 1| \leq 2\varepsilon.$$

Ceci veut dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 1$ et donc que :

$$u_n \sim \frac{1}{n}$$

Exercice 2

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f_a(x) = (x^2 - ax + 1) \tan\left(\frac{\pi x}{6}\right)$.

a. Donner un équivalent simple de $f_a(x)$ en $x = 3$.

Pour quelle(s) valeur(s) de a peut-on prolonger f_a par continuité en 3 ?

b. Plus généralement, soit g est une fonction définie au voisinage de 3 et dérivable en 3. A quelle condition sur g la fonction $f : x \mapsto g(x) \tan\left(\frac{\pi x}{6}\right)$ est-elle prolongeable par continuité en 3 ?

Donner alors $f(3)$ en fonction de $g'(3)$.

a. En posant $x = 3 + h$, on a :

$$\begin{aligned} f_a(x) &= f_a(3+h) = ((3+h)^2 - a(3+h) + 1) \tan\left(\frac{\pi(3+h)}{6}\right) \\ &= (10 - 3a + (6-a)h + h^2) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi h}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi h}{6}\right)} = - \frac{10 - 3a + (6-a)h + h^2}{\tan\left(\frac{\pi h}{6}\right)} \end{aligned}$$

On a $\tan\left(\frac{\pi h}{6}\right) \underset{0}{\sim} \frac{\pi h}{6}$ et deux cas se présentent :

- si $10 - 3a \neq 0$, soit $a \neq \frac{10}{3}$, $10 - 3a + (6-a)h + h^2 \underset{0}{\sim} 10 - 3a$;
- si $10 - 3a = 0$, soit $a = \frac{10}{3}$, $10 - 3a + (6-a)h + h^2 = \frac{8}{3}h + h^2 \underset{0}{\sim} \frac{8}{3}h$.

Ainsi :

$$f_a(x) \underset{3}{\sim} \begin{cases} -\frac{6(10-3a)}{\pi(x-3)} & \text{pour } a \neq \frac{10}{3} \\ -\frac{16}{\pi} & \text{pour } a = \frac{10}{3} \end{cases}$$

On a alors immédiatement :

$$\text{On peut prolonger } f_a \text{ par continuité en 3 si et seulement si } a = \frac{10}{3}.$$

b. Si g est définie au voisinage de 3 et dérivable en 3, alors on a $g(3+h) = g(3) + g'(3)h + o_0(h)$, donc

$$f(3+h) = - \frac{g(3+h)}{\tan\left(\frac{\pi h}{6}\right)} = - \frac{g(3) + g'(3)h + o_0(h)}{\frac{\pi h}{6} + o_0(h)}.$$

Si $g(3) \neq 0$, $f(3+h)$ n'admet pas de limite finie quand $h \rightarrow 0$ et si $g(3) = 0$, on a :

$$f(3+h) = - \frac{g'(3)h + o_0(h)}{\frac{\pi h}{6} + o_0(h)} = - \frac{g'(3) + o_0(1)}{\frac{\pi}{6} + o_0(1)} \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(3+h) = - \frac{6g'(3)}{\pi}.$$

Ainsi :

f est prolongeable par continuité en 3 si et seulement si $g(3) = 0$ avec, dans ce cas, $f(3) = -\frac{6g'(3)}{\pi}$.

Exercice 3

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $f_\lambda(x) = \arctan(x + \lambda) - x + \lambda$.

- 1) Prouver que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, f_λ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En déduire que l'équation $f_\lambda(x) = 0$ admet une unique solution, notée $g(\lambda)$.

On cherche à étudier la fonction g . On appelle C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- 2) Justifier que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f_{-\lambda}(x) = -f_\lambda(-x)$. En déduire que g est impaire.

- 3) Que vaut $g(0)$?

- 4) Justifier que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $g(\lambda) = \arctan(g(\lambda) + \lambda) + \lambda$.

- 5) Soit $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda < \lambda'$. Montrer que $f_\lambda(g(\lambda')) < 0$ et en déduire le sens de variation de g .

- 6) Justifier que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $g(\lambda) > \lambda - \frac{\pi}{2}$ et en déduire la limite de g en $+\infty$.

- 7) Prouver que C admet une asymptote oblique en $+\infty$. Donner une équation de cette asymptote, puis sa position relative par rapport à C .

- 8) Démontrer que $g(\lambda) = \lambda + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

- 9) Prouver que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $g(\lambda) = f_0^{-1}(-2\lambda) - \lambda$ et en déduire que g est continue sur $\mathbb{R}$.

- 10) Prouver que $g(\lambda) \sim \sqrt[3]{6\lambda}$. En déduire que g n'est pas dérivable en 0, mais que C admet une tangente verticale en O , l'origine du repère.

- 1) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction f_λ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de telles fonctions et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'_\lambda(x) = \frac{1}{1+(x+\lambda)^2} - 1$.

f'_λ est négative sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en 0, donc f_λ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_\lambda(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\lambda(x) = -\infty$. Comme f_λ est continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}$ et strictement décroissante de $+\infty$ à $-\infty$:

f_λ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Alors, 0 qui appartient à l'ensemble d'arrivée de f_λ admet un unique antécédent par f_λ , donc :

L'équation $f_\lambda(x) = 0$ admet une unique solution.

- 2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f_{-\lambda}(x) &= \arctan(x - \lambda) - x - \lambda = \arctan(-(-x + \lambda)) - x - \lambda \\ &= -\arctan(-x + \lambda) - x - \lambda = -(\arctan(-x + \lambda) - (-x) + \lambda) = -f_\lambda(-x) \end{aligned}$$

Donc, on a bien :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, f_{-\lambda}(x) = -f_{\lambda}(-x).$$

g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0 et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, d'après le résultat précédent :

$$f_{-\lambda}(g(-\lambda)) = 0 \Leftrightarrow f_{\lambda}(-g(-\lambda)) = 0 \Leftrightarrow -g(-\lambda) = g(\lambda) \Leftrightarrow g(-\lambda) = -g(\lambda).$$

Ainsi :

g est impaire.

3) Comme g est impaire, on a forcément :

$$g(0) = 0$$

4) Par définition de g , on a $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $f_{\lambda}(g(\lambda)) = \arctan(g(\lambda) + \lambda) - g(\lambda) + \lambda = 0$, donc :

$$g(\lambda) = \arctan(g(\lambda) + \lambda) + \lambda$$

5) Soit $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda < \lambda'$. On a avec la question précédente :

$$f_{\lambda}(g(\lambda')) = \arctan(g(\lambda') + \lambda) - g(\lambda') + \lambda = \arctan(g(\lambda') + \lambda) - \arctan(g(\lambda') + \lambda') + \lambda - \lambda'.$$

Or, $\lambda < \lambda'$ donc $g(\lambda') + \lambda < g(\lambda') + \lambda'$. Alors, comme la fonction arctangente est strictement croissante, on a $\arctan(g(\lambda') + \lambda) < \arctan(g(\lambda') + \lambda')$, soit $\arctan(g(\lambda') + \lambda) - \arctan(g(\lambda') + \lambda') < 0$.

Avec $\lambda - \lambda' < 0$, on obtient bien :

$$f_{\lambda}(g(\lambda')) < 0$$

Or, $f_{\lambda}(g(\lambda)) = 0$ donc $f_{\lambda}(g(\lambda')) < f_{\lambda}(g(\lambda))$, et comme f_{λ} est strictement décroissante, on a $g(\lambda) < g(\lambda')$.

Ainsi, $\forall (\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2$, $\lambda < \lambda' \Rightarrow g(\lambda) < g(\lambda')$ donc :

g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

6) On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan x > -\frac{\pi}{2}$, donc $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\arctan(g(\lambda) + \lambda) > -\frac{\pi}{2}$.

Avec $g(\lambda) = \arctan(g(\lambda) + \lambda) + \lambda$, on obtient immédiatement $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$g(\lambda) > \lambda - \frac{\pi}{2}$$

On a $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(\lambda - \frac{\pi}{2} \right) = +\infty$, donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} g(\lambda) = +\infty$$

7) D'après ce qui précède, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (g(\lambda) + \lambda) = +\infty$ donc :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (g(\lambda) - \lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \arctan(g(\lambda) + \lambda) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \arctan X = \frac{\pi}{2}.$$

Ceci prouve que :

La droite d'équation $y = x + \frac{\pi}{2}$ est asymptote oblique à C en $+\infty$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a $g(\lambda) - \left(\lambda + \frac{\pi}{2} \right) = \arctan(g(\lambda) + \lambda) - \frac{\pi}{2} < 0$, donc :

C est toujours en dessous de son asymptote en $+\infty$.

8) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda \left[g(\lambda) - \left(\lambda + \frac{\pi}{2} \right) \right] = \lambda \left[\arctan(g(\lambda) + \lambda) - \frac{\pi}{2} \right]$.

On a vu que g est strictement croissante et $g(0) = 0$. Alors, $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on a $g(\lambda) > 0$, donc $g(\lambda) + \lambda > 0$ et :

$$\arctan(g(\lambda) + \lambda) - \frac{\pi}{2} = -\arctan\left(\frac{1}{g(\lambda) + \lambda}\right).$$

Comme $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (g(\lambda) + \lambda) = +\infty$, on a $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{g(\lambda) + \lambda} = 0$. Or, $\arctan x \underset{0}{\sim} x$ donc

$\arctan\left(\frac{1}{g(\lambda) + \lambda}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{g(\lambda) + \lambda}$ et :

$$\lambda \left[g(\lambda) - \left(\lambda + \frac{\pi}{2} \right) \right] \underset{+\infty}{\sim} \frac{-\lambda}{g(\lambda) + \lambda} = -\frac{1}{\frac{g(\lambda)}{\lambda} + 1}.$$

Or, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (g(\lambda) - \lambda) = \frac{\pi}{2}$ donc $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(\frac{g(\lambda)}{\lambda} - 1 \right) = 0$, soit $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{g(\lambda)}{\lambda} = 1$. Ainsi :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \left[g(\lambda) - \left(\lambda + \frac{\pi}{2} \right) \right] = -\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{g(\lambda)}{\lambda} + 1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow g(\lambda) - \left(\lambda + \frac{\pi}{2} \right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2\lambda}.$$

Et finalement :

$$g(\lambda) = \lambda + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

9) On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = \arctan x - x$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $g(\lambda) = \arctan(g(\lambda) + \lambda) + \lambda$. Donc $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$0 = \arctan(g(\lambda) + \lambda) - g(\lambda) + \lambda = \arctan(g(\lambda) + \lambda) - (g(\lambda) + \lambda) + 2\lambda = f_0(g(\lambda) + \lambda) + 2\lambda.$$

Soit $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $f_0(g(\lambda) + \lambda) = -2\lambda$.

On a vu dans question que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, f_λ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En particulier f_0 est bijective et on peut écrire $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $g(\lambda) + \lambda = f_0^{-1}(-2\lambda)$, soit :

$$g(\lambda) = f_0^{-1}(-2\lambda) - \lambda$$

On a vu que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, f_λ est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier f_0 donc d'après le théorème de la bijection continue, f_0^{-1} est continue sur $\mathbb{R}$. Alors, g est la différence de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, donc :

$$g \text{ est continue sur } \mathbb{R}.$$

10) D'après ce qui précède, g est continue en 0, donc $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (g(\lambda) + \lambda) = g(0) + 0 = 0$.

Or, $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o_0(x^3)$ donc :

$$\arctan(g(\lambda) + \lambda) = g(\lambda) + \lambda - \frac{(g(\lambda) + \lambda)^3}{3} + o_0((g(\lambda) + \lambda)^3) = g(\lambda) + \lambda - \frac{(g(\lambda) + \lambda)^3}{3} + (g(\lambda) + \lambda)^3 \varepsilon(\lambda)$$

avec $\varepsilon(\lambda) \rightarrow 0$ quand $\lambda \rightarrow 0$. Alors :

$$g(\lambda) = g(\lambda) + 2\lambda - \frac{(g(\lambda) + \lambda)^3}{3} + (g(\lambda) + \lambda)^3 \varepsilon(\lambda) \Leftrightarrow (g(\lambda) + \lambda)^3 = \frac{6\lambda}{1 - 3\varepsilon(\lambda)} \Leftrightarrow$$

$$g(\lambda) = \frac{\sqrt[3]{6\lambda}}{\sqrt[3]{1 - 3\varepsilon(\lambda)}} - \lambda.$$

Pour $\lambda \neq 0$, on obtient :

$$\frac{g(\lambda)}{\sqrt[3]{6\lambda}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - 3\varepsilon(\lambda)}} - \frac{\lambda}{\sqrt[3]{6\lambda}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - 3\varepsilon(\lambda)}} - \sqrt[3]{\frac{\lambda^2}{6}}.$$

Comme $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \varepsilon(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{\lambda^2}{6}} = 0$, on a $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{g(\lambda)}{\sqrt[3]{6\lambda}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1}} = 1$, soit :

$$g(\lambda) \sim_0 \sqrt[3]{6\lambda}$$

Alors :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{g(\lambda) - g(0)}{\lambda - 0} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{g(\lambda)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{6\lambda}}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{6}{\lambda^2}} = +\infty.$$

Cette limite n'est pas finie, mais infinie donc :

g n'est pas dérivable en 0 et C admet une tangente verticale point d'abscisse 0, qui est O.

Exercice 4

Soit $f :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto x - \ln(1+x)$.

- Montrer que la restriction de f à $] -1, 0]$ (resp. $[0, +\infty[$) définit une bijection $f_- :] -1, 0] \rightarrow \mathbb{R}_+$ (resp. $f_+ : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$).
- Donner l'équivalent le plus simple de $f(x)$ en 0 et en déduire celui de $f_-^{-1}(x)$, puis celui de $f_+^{-1}(x)$.
- Déterminer le développement asymptotique à deux termes de $f_+^{-1}(x)$ en 0^+ .

a. La fonction f est définie et dérivable (donc continue) sur $] -1, +\infty[$ en tant que somme de telles fonctions et pour tout $x \in] -1, +\infty[$, on a : $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$, qui est du signe de x (car $1+x > 0$). Alors :

- sur $] -1, 0]$, f est continue et strictement décroissante de $\lim_{x \rightarrow -1} f = +\infty$ à $f(0) = 0$, donc réalise une bijection de $] -1, 0]$ dans $[0, +\infty[$, d'après le théorème de la bijection continue ;
- sur $[0, +\infty[$, f est continue et strictement croissante de $f(0) = 0$ à $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$ (à l'infini, x l'emporte sur $\ln(1+x)$ par croissances comparées), donc réalise une bijection de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$, d'après le théorème de la bijection continue.

Ainsi :

La restriction de f à $] -1, 0]$ définit une bijection $f_- :] -1, 0] \rightarrow \mathbb{R}_+$.

La restriction de f à $[0, +\infty[$ définit une bijection $f_+ : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$.

b. On a $f(x) = x - \ln(1+x) = x - \left(x - \frac{x^2}{2} + o_0(x^2) \right) = \frac{x^2}{2} + o_0(x^2)$, donc :

$$f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

On a alors :

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f_-(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$ et en posant $y = f_-(x)$, soit $x = f_-^{-1}(y)$, on a $y \rightarrow f_-(0) = 0^+$ quand $x \rightarrow 0^-$, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f_-(x)}{x^2} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{(f_-^{-1}(y))^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{y}}{|f_-^{-1}(y)|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{|f_-^{-1}(y)|}{\sqrt{y}} = \sqrt{2}.$$

Or, on a $f_- :] -1, 0] \rightarrow \mathbb{R}_+$ donc $f_-^{-1} : \mathbb{R}_+ \rightarrow] -1, 0]$ et $|f_-^{-1}(y)| = -f_-^{-1}(y)$. Ainsi,

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-f_-^{-1}(y)}{\sqrt{y}} = \sqrt{2}, \text{ d'où :}$$

$$f_-^{-1}(y) \underset{0^+}{\sim} -\sqrt{2y}$$

- De même, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_+(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$ et en posant $y = f_+(x)$, soit $x = f_+^{-1}(y)$, on a

$$y \rightarrow f_+(0) = 0^+ \text{ quand } x \rightarrow 0^+, \text{ on obtient comme plus haut : } \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{|f_+^{-1}(y)|}{\sqrt{y}} = \sqrt{2}.$$

Or, on a $f_+ : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ donc $f_+^{-1} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $|f_+^{-1}(y)| = f_+^{-1}(y)$. Ainsi, $\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f_+^{-1}(y)}{\sqrt{y}} = \sqrt{2}$, d'où :

$$\boxed{f_+^{-1}(y) \underset{0^+}{\sim} \sqrt{2y}}$$

c. On a $f(x) = x - \ln(1+x) = x - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o_0(x^3) \right) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o_0(x^3)$.

Posons pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, $g(y) = f_+^{-1}(y) - \sqrt{2y}$. On a :

$$\begin{aligned} y &= f(f_+^{-1}(y)) = f(g(y) + \sqrt{2y}) \\ &= \frac{1}{2}(g(y) + \sqrt{2y})^2 - \frac{1}{3}(g(y) + \sqrt{2y})^3 + o_{0^+}\left((g(y) + \sqrt{2y})^3\right) \\ &= \frac{1}{2}g(y)^2 + g(y)\sqrt{2y} + y - \frac{1}{3}g(y)^3 - g(y)^2\sqrt{2y} - 2yg(y) - \frac{1}{3}\sqrt{2y}^3 + o_{0^+}\left((g(y) + \sqrt{2y})^3\right) \end{aligned}$$

Or, $g(y) = o_{0^+}(\sqrt{2y})$ donc $(g(y) + \sqrt{2y})^3 \underset{0^+}{\sim} (\sqrt{2y})^3$ et $o_{0^+}\left((g(y) + \sqrt{2y})^3\right) = o_{0^+}(y^{3/2})$. Alors :

$$y = \frac{1}{2}g(y)^2 + g(y)\sqrt{2y} + y - \frac{1}{3}g(y)^3 - g(y)^2\sqrt{2y} - 2yg(y) - \frac{1}{3}(2y)^{3/2} + o_{0^+}(y^{3/2})$$

D'où :

$$g(y) \left[\sqrt{2y} + \frac{1}{2}g(y) - \frac{1}{3}g(y)^2 - g(y)\sqrt{2y} - 2y \right] \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{3}(2y)^{3/2}$$

Comme $g(y) = o_{0^+}(\sqrt{2y})$, tous les termes sont négligeables devant le premier dans la somme entre crochets.

Ainsi, $\sqrt{2y} + \frac{1}{2}g(y) - \frac{1}{3}g(y)^2 - g(y)\sqrt{2y} - 2y \underset{0^+}{\sim} \sqrt{2y}$ et donc, $g(y)\sqrt{2y} \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{3}(2y)^{3/2}$, soit :

$$g(y) \underset{0^+}{\sim} \frac{2}{3}y.$$

Comme $f_+^{-1}(y) = \sqrt{2y} + g(y)$, on obtient :

$$\boxed{f_+^{-1}(y) = \sqrt{2y} + \frac{2}{3}y + o_{0^+}(y)}$$

Exercice 5

On pose $f(x) = \frac{e^x}{\ln(1+x)} + \frac{\alpha}{x} + \beta$. Déterminer α et β afin que $\lim_{x \rightarrow 0} f = 0$.

Préciser alors un équivalent simple de f en 0.

Pour répondre aux deux questions en même temps, on « pousse » le DL à l'ordre 2. Au voisinage de 0, on a :

$$\begin{aligned} \frac{e^x}{\ln(1+x)} &= \frac{1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)} = \frac{1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)} = \frac{1}{x} \left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) \left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{12}+o(x^2)\right) \\ &= \frac{1}{x} \left[1+\frac{3x}{2}+\frac{11x^2}{12}+o(x^2)\right] = \frac{1}{x} + \frac{3}{2} + \frac{11x}{12} + o(x) \end{aligned}$$

Donc $\frac{e^x}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} - \frac{3}{2} = \frac{11x}{12} + o(x)$ et ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} - \frac{3}{2} \right) = 0$. D'où :

$$\alpha = -1 \text{ et } \beta = -\frac{3}{2}$$

On a alors $f(x) = \frac{11x}{12} + o(x)$ donc :

$$f(x) \underset{0}{\sim} \frac{11x}{12}$$

Exercice 6

Soit $f_0(x) = 1-x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(x) = \frac{1}{2-f_n(x)}$. Après avoir justifié que les fonctions f_n sont bien définies au voisinage de 0, trouver le développement limité en 0 à l'ordre 5 de $f_n(x)$.

On a :

$$f_0(x) = 1-x \quad f_1(x) = \frac{1}{2-f_0(x)} = \frac{1}{1+x} \quad f_2(x) = \frac{1}{2-f_1(x)} = \frac{1+x}{1+2x} \quad f_3(x) = \frac{1}{2-f_2(x)} = \frac{1+2x}{1+3x}.$$

Prouvons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \frac{1+(n-1)x}{1+nx}$.

- Pour $n=0$, on a $\frac{1+(0-1)x}{1+0x} = 1-x = f_0(x)$, donc la formule est vraie (pour tout réel x).

- Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ donné, on a $f_n : x \mapsto \frac{1+(n-1)x}{1+nx}$.

Alors, $f_n(x) = 2$ quand $1+(n-1)x = 2(1+nx)$, soit $x = -\frac{1}{n+1}$. Donc, pour tout réel $x \neq -\frac{1}{n+1}$, on a :

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{2-f_n(x)} = \frac{1}{2-\frac{1+(n-1)x}{1+nx}} = \frac{1+nx}{2(1+nx)-1-(n-1)x} = \frac{1+nx}{1+(n+1)x}.$$

Donc, $f_{n+1} : x \mapsto \frac{1+nx}{1+(n+1)x}$ et la propriété est vraie au rang $n+1$.

La propriété est initialisée et héréditaire donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, les fonctions f_n sont toutes rationnelles et définies en 0, donc :

Les fonctions f_n sont bien définies, et même de classe C^∞ , au voisinage de 0.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \left] -\frac{1}{n}, +\infty \right[$:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= (1+(n-1)x) \frac{1}{1+nx} = (1+(n-1)x) \left(1 - nx + (nx)^2 - (nx)^3 + (nx)^4 - (nx)^5 + o_0(x^5) \right) \\ &= (1+(n-1)x) \left(1 - nx + n^2x^2 - n^3x^3 + n^4x^4 - n^5x^5 + o_0(x^5) \right) \\ &= 1 + (n-1)x - nx - (n-1)nx^2 + n^2x^2 + (n-1)n^2x^3 - n^3x^3 - (n-1)n^3x^4 + n^4x^4 + (n-1)n^4x^5 - n^5x^5 + o_0(x^5) \end{aligned}$$

Soit :

$$f_n(x) = 1 - x + nx^2 - n^2x^3 + n^3x^4 - n^4x^5 + o_0(x^5)$$

Evidemment, le fait d'avoir une formule explicite pour $f_n(x)$ casse un peu l'intérêt de cet exercice : trouver le DL de fonctions définies par récurrence...

Exercice 7

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$.

Comme $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on peut appliquer (deux fois) la formule de Taylor-Young à l'ordre 2. Ceci donne pour tout $h \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} f(a-h) &= f(a) - f'(a)h + \frac{1}{2} f''(a)h^2 + o_0(h^2) \\ f(a+h) &= f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2} f''(a)h^2 + o_0(h^2) \end{aligned}$$

En additionnant membre à membre, on obtient, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$:

$$f(a-h) + f(a+h) = 2f(a) + f''(a)h^2 + o_0(h^2) \Leftrightarrow \frac{f(a-h) + f(a+h) - 2f(a)}{h^2} = f''(a) + o_0(1).$$

Et on obtient immédiatement :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = f''(a)$$

Equations Différentielles

Dans tous les cas, on notera (H) l'équation homogène associée à (E) .

Exercice 1

Résoudre l'équation différentielle (E) . On cherchera les solutions maximales.

a. $(E): x(x^2 + 1)y' - y = x^3.$

b. $(E): |1 + x| y' + y = 1 + 2x.$

a. Solutions de (H) sur $\mathbb{R} : x \mapsto K \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, K \in \mathbb{R}.$

Solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ (donc toutes maximales) : $x \mapsto x + K \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}},$ avec $K \in \mathbb{R}.$

b. Sur $] -1, +\infty[$, (E) devient $y' + \frac{1}{1+x} y = \frac{1+2x}{1+x},$ solutions :

$$x \mapsto x + \frac{K}{x+1}, \text{ avec } K \in \mathbb{R}.$$

Sur $] -\infty, -1[$, (E) devient $y' - \frac{1}{1+x} y = -\frac{1+2x}{1+x},$ solutions :

$$x \mapsto K(x+1) - 1 - 2(x+1) \ln|x+1|, \text{ avec } K \in \mathbb{R}.$$

Pas de raccordement possible en -1 .

Exercice 2

Résoudre $(E_\lambda): y'' - \lambda y = e^{\lambda t}$ où λ est un paramètre réel.

Solutions de (E_λ) sur $\mathbb{R}$ (donc toutes maximales) :

$$t \mapsto \begin{cases} A \cos(\sqrt{|\lambda|} t) + B \sin(\sqrt{|\lambda|} t) + \frac{1}{\lambda^2 - \lambda} e^{\lambda t} & \text{quand } \lambda < 0 \\ At + B + \frac{1}{2} t^2 & \text{quand } \lambda = 0 \\ Ae^{\sqrt{\lambda} t} + Be^{-\sqrt{\lambda} t} + \frac{1}{\lambda^2 - \lambda} e^{\lambda t} & \text{quand } \lambda > 0, \lambda \neq 1 \\ Ae^t + Be^{-t} + \frac{1}{2} t e^t & \text{quand } \lambda = 1 \end{cases} \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3

Résoudre le système différentiel (S) : $\begin{cases} x'(t) = -x(t) + 3y(t) + e^t \\ y'(t) = -2x(t) + 4y(t) \end{cases}$ avec $x(0) = 0$ et $x'(0) = 4$.

☺ Poser $z = x - y$.

Sur $\mathbb{R}$ (donc solutions maximales) :

- $z'(t) = z(t) + e^t$ $x(0) = 0$ avec $z(0) = -1$ ($y(0) = 1$), donc $z(t) = (t-1)e^t$.
- $x'(t) = -x(t) + 3(x(t) - z(t)) + e^t = 2x(t) - (3t-4)e^t$ avec $x(0) = 0$, donc $x(t) = -e^{2t} - (3t-1)e^t$.
- $y(t) = x(t) - z(t) = -e^{2t} - (4t-2)e^t$.

Exercice 4

On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $(1+t^2)y'' - 2(t-1)^2y' - 2(2t-1)y = 0$.

- a. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose $g(t) = (1+t^2)f'(t) + 2tf(t)$.

Montrer que f est solution de (E) si et seulement si g est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

☺ Après avoir justifié que cela est possible, calculer $g'(t) - 2g(t)$.

- b. Résoudre alors (E).

- a. Si f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, $g : t \mapsto (1+t^2)f'(t) + 2tf(t)$ et est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de telles fonctions.

f est solution de (E) si et seulement si $g' = 2g$.

- b. $g : t \mapsto Ke^{2t}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

$$f : t \mapsto \frac{A}{1+t^2}e^{2t} + \frac{B}{1+t^2} \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5

Soit l'équation (E) : $y'' - y = \frac{1}{cht}$. On cherche à résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

- a. Pour toute fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on définit la fonction $g : t \mapsto e^t f(t)$.

Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si g' est solution de :

$$(E') : y' - 2y = \frac{e^t}{cht}.$$

- b. Résoudre (E') puis (E).

- a. Si f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, $g : t \mapsto e^t f(t)$ l'est aussi en tant que produit de telles fonctions et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$g''(t) - 2g'(t) = (e^t f''(t) + 2e^t f'(t) + e^t f(t)) - 2(e^t f'(t) + e^t f(t)) = e^t (f''(t) - f(t)).$$

Alors, f est une solution de (E) si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f''(t) - f(t) = \frac{1}{cht}$, donc si et

seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g''(t) - 2g'(t) = \frac{e^t}{cht}$ et ainsi :

$$f \text{ est une solution de } (E) \text{ si et seulement si } g' \text{ est solution de } (E') : y' - 2y = \frac{e^t}{cht}.$$

b. Les solutions de (E') sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions :

$$t \mapsto Ke^{2t} + 2te^{2t} - e^{2t} \ln(e^{2t} + 1) \text{ avec } K \in \mathbb{R}.$$

Donc $g : t \mapsto e^t f(t) = Ae^{2t} + B + te^{2t} - \frac{1}{2}(1 + e^{2t}) \ln(1 + e^{2t})$ et les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions :

$$t \mapsto Ae^t + Be^{-t} + te^t - cht \ln(1 + e^{2t}) \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f'(t) + f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$. Montrer que $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.

☺ On pourra considérer f comme solution d'une équation $y' + y = g$.

On pose $g = f' + f$.

Alors f est solution de $y' + y = g$, donc $f : t \mapsto Ke^{-t} + e^{-t} \int_0^t g(u)e^u du$ avec $K \in \mathbb{R}$.

On a $Ke^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ pour tout $K \in \mathbb{R}$, donc il faut montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} \int_0^t g(u)e^u du = 0$.

Comme $g(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $A \geq 0$ tel que pour tout $u \in [A, +\infty[$, on ait

$|g(u)| \leq \varepsilon$. Alors, pour tout $t \in [A, +\infty[$, on a en posant $C = \left| \int_0^A g(u)e^u du \right|$:

$$\begin{aligned} \left| e^{-t} \int_0^t g(u)e^u du \right| &= \left| e^{-t} \int_0^A g(u)e^u du + e^{-t} \int_A^t g(u)e^u du \right| \leq e^{-t} \left| \int_0^A g(u)e^u du \right| + e^{-t} \int_A^t |g(u)| e^u du \\ &\leq Ce^{-t} + e^{-t} \int_A^t \varepsilon e^u du \leq Ce^{-t} + \varepsilon e^{-t} (e^t - e^A) \leq Ce^{-t} + \varepsilon e^{-t} (e^t - e^A) \leq Ce^{-t} + \varepsilon \end{aligned}$$

Et comme $Ce^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, il existe $A' \geq 0$ tel que pour tout $t \in [A', +\infty[$, on ait $Ce^{-t} \leq \varepsilon$.

Finalement, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $M = \max(A, A') \geq 0$ tel que pour tout $t \in [M, +\infty[$, on ait

$\left| e^{-t} \int_0^t g(u)e^u du \right| \leq 2\varepsilon$, ce qui prouve que $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} \int_0^t g(u)e^u du = 0$ et donc que :

$$f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

Exercice 7

Résoudre l'équation différentielle (E). On cherchera les solutions maximales.

a. (E) : $y' = e^{t+y}$ (variable t).

b. (E) : $y' = 1 + y^2$.

Dans les deux cas, (E) est à variables séparables.

a. (E) $\Leftrightarrow y' e^{-y} = e^t$. Solutions $t \mapsto -\ln(k - e^t)$ sur $] -\infty, \ln k [$ avec $k > 0$.

b. (E) $\Leftrightarrow \frac{y'}{1+y^2} = 1$. Solutions $t \mapsto \tan(t+a)$ sur $\left] -a - \frac{\pi}{2} + k\pi, -a + \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Polynômes

Exercice 1

A quelle condition nécessaire et suffisante sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, le polynôme $X^2 + X + 1$ divise-t-il $X^4 + aX^2 + bX + c$? Donner alors le quotient.

$X^2 + X + 1 = (X - j)(X - \bar{j})$ divise $P = X^4 + aX^2 + bX + c$ si et seulement si j et $\bar{j}$ sont racines de P , soit :

$$\begin{cases} j^4 + aj^2 + bj + c = j + \bar{j} + bj + c = 0 \\ \bar{j}^4 + a\bar{j}^2 + b\bar{j} + c = \bar{j} + aj + b\bar{j} + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = a \\ b = a - 1 \end{cases}$$

Alors :

$$P = X^4 + aX^2 + (a-1)X + a = (X^2 - X + a)(X^2 + X + 1).$$

Exercice 2

Factoriser $X^5 - 5X^3 + 5X + 2$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sachant qu'il admet une racine double.

$$P = X^5 - 5X^3 + 5X + 2$$

$$P' = 5(X^4 - 3X^2 + 1) = 5\left(X - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$P = \left(X - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \left(X - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 (X+2).$$

Exercice 3

On pose $P = X^{10} - 2X^9 + X^8 - 2X^6 + 4X^5 - 2X^4 + X^2 - 2X + 1$.

a. Déterminer l'ordre de multiplicité de 1 dans P .

b. Factoriser P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$.

$$P = (X^2 + 1)^2 (X + 1)^2 (X - 1)^4$$

Exercice 4

On pose $P = X^3 + aX + b$ avec a et b réels.

- Montrer que P admet une racine au moins double si et seulement si $4a^3 + 27b^2 = 0$.
- Discuter le nombre de racines réelles de P .

a. On a :

$$\begin{aligned} \begin{cases} P(z) = z^3 + az + b = 0 \\ P'(z) = 3z^2 + a = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}az = -b \\ z^2 = -\frac{1}{3}a \end{cases} \Leftrightarrow a = b = z = 0 \text{ ou } \begin{cases} z = -\frac{3b}{2a} \\ \frac{9b^2}{4a^2} = -\frac{1}{3}a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow a = b = z = 0 \text{ ou } \begin{cases} z = -\frac{3b}{2a} \\ 27b^2 + 4a^3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

b. Avec une étude de la fonction $x \mapsto x^3 + ax + b$, on obtient les résultats suivants.

- Si $a \geq 0$: une seule racine réelle.
- Si $a < 0$ et $27b^2 + 4a^3 < 0$: une seule racine réelle.
- Si $a < 0$ et $27b^2 + 4a^3 = 0$: deux racines réelles.
- Si $a < 0$ et $27b^2 + 4a^3 > 0$: trois racines réelles.

Exercice 5

Factoriser $(X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}$ avec $n \in \mathbb{N}$. En déduire une expression de $\prod_{k=1}^n \cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.

$$\begin{aligned} P(z) = (z+i)^{2n+1} - (z-i)^{2n+1} = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{2n+1} = 1 \quad (z \neq i, z \neq -i) \\ &\Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i} = e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}} \quad (k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket) \\ &\Leftrightarrow z = \frac{e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}} + 1}{e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}} - 1} i = \cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \quad (k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket) \end{aligned}$$

$$P = 2(2n+1)iX^{2n} + \dots + 2i^{2n+1} \Rightarrow \prod_{k=1}^{2n} \cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = (-1)^{2n} \frac{2i^{2n+1}}{2(2n+1)i} = \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{2n} \cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) &= \left[\prod_{k=1}^n \cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \right] \left[\prod_{k=n+1}^{2n} \cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \right] \\ &= \left[\prod_{k=1}^n \cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \right] \left[\prod_{k=1}^n \cotan\left(\pi - \frac{k\pi}{2n+1}\right) \right] = (-1)^n \left[\prod_{k=1}^n \cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \right]^2 \end{aligned}$$

$\prod_{k=1}^n \cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) > 0$, donc :

$$\prod_{k=1}^n \cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Exercice 6

- 1) Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$:

$$P(z + z') = P(z) + P(z').$$

- 2) Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$:

$$P(zz') = P(z)P(z').$$

☺ On pourra commencer par supposer que P admet une racine non nulle.

- 1) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $P(nz) = nP(z)$.

Si P admet une racine $a \neq 0$, alors, na est racine de P pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $P = 0$.

Si $P \neq 0$, alors $P = \lambda X^n$ et la seule possibilité est $P = \lambda X$.

- 2) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = P(z)P(1)$, donc si $P \neq 0$, $P(1) = 1$ et $(P(-1))^2 = P((-1)^2) = 1$.

Donc, 1 et -1 ne sont pas racines de $P \neq 0$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(z^n) = (P(z))^n$.

Si P admet une racine $a \neq 0$, alors, a^n est racine de P pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc $P = 0$.

Si $P \neq 0$, alors $P = \lambda X^n$ et la seule possibilité est $P = X^n$.

Exercice 7

Soient $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P^2 - XQ^2 = XR^2$. Montrer que $P = Q = R = 0$.

Le résultat reste-t-il vrai si $P, Q, R \in \mathbb{C}[X]$?

Dans $\mathbb{R}[X]$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq P^2(x) = x(Q^2(x) + R^2(x)) \leq 0$, donc $P = 0$ et $Q^2 + R^2 = 0$, donc $P = Q = R = 0$.

Dans $\mathbb{C}[X]$, NON : $P = 0$ et $R = iQ$.

Exercice 8

Soit $P = X^3 + X^2 + X + 1$.

- Montrer que la famille $\mathcal{B} = (P, XP', X^2P'', X^3P''')$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
- Déterminer les coordonnées des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ dans la base $\mathcal{B}$.

a.
$$\begin{aligned} \text{Vect}(\mathcal{B}) &= \text{Vect}(P, XP', X^2P'', X^3P''') = \text{Vect}(X^3 + X^2 + X + 1, 3X^3 + 2X^2 + X, 6X^3 + 2X^2, 6X^3) \\ &= \text{Vect}(X^2 + X + 1, 2X^2 + X, 2X^2, X^3) = \text{Vect}(1, X, X^2, X^3) \end{aligned}$$

b.
$$\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3, P_4) \quad \begin{cases} P_1 = X^3 + X^2 + X + 1 \\ P_2 = 3X^3 + 2X^2 + X \\ P_3 = 6X^3 + 2X^2 \\ P_4 = 6X^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = P_1 - P_2 + \frac{1}{2}P_3 - \frac{1}{6}P_4 \\ X = P_2 - P_3 + \frac{1}{2}P_4 \\ X^2 = \frac{1}{2}P_3 - \frac{1}{2}P_4 \\ X^3 = \frac{1}{6}P_4 \end{cases}$$

Exercice 9

Soit n un entier supérieur ou égal à 3 et $E = \{P \in \mathbb{C}_n[X] \setminus X^2 + 1 \mid P - P(0)\}$.

- Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_n[X]$.
- Déterminer une base et la dimension de E .
- Déterminer un supplémentaire de E dans $\mathbb{C}_n[X]$.

- OK.
- $E = \text{Vect}(X^n + X^{n-2}, \dots, X^3 + X, 1)$, $\dim E = n - 1$.
- $E = \text{Vect}(X, X^2)$.

Exercice 10

Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ de degré $q \in \mathbb{N}$ et unitaire. On définit :

$$\varphi: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]: P \mapsto Q(X+1)P(X-1) + Q(X-1)P(X+1).$$

- Montrer que φ est linéaire.
- Si P est de degré $p \in \mathbb{N}$, donner le degré et le coefficient dominant de $\varphi(P)$ en fonction de ceux de P et Q .
- Déterminer le noyau de φ .
- Existe-t-il des valeurs de $n \in \mathbb{N}$ telles que $\mathbb{R}_n[X]$ soit stable par φ ?
- φ est-elle surjective ?

- OK.
- $Q = X^q + \dots$ et $P = bX^p + \dots$ avec $b \neq 0$. On a $\varphi(P) = 2bX^{p+q} + \dots$ avec $2b \neq 0$.
- $\varphi(P) = 0$ ssi $b = 0$, soit $P = 0$, donc $\ker \varphi = \{0\}$.
- Si $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ , alors $\varphi(X^n) = 2X^{n+q} + \dots \in \mathbb{R}_n[X]$, donc $q = 0$.
 - Si $q > 0$, aucun $\mathbb{R}_n[X]$ n'est stable par φ .
 - Si $q = 0$ ($Q = 1$), $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n , on a $\deg(\varphi(X^n)) = n + q \geq q$, donc :
 - Si $q > 0$, 1 n'a pas d'antécédent par φ , donc φ n'est pas surjective.
 - Si $q = 0$, on a $Q = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(X^n) = (X-1)^n + (X+1)^n$.
Comme la famille $((X-1)^n + (X+1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est échelonnée en degrés, $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) = \mathbb{R}_n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc φ est surjective.

Nombres complexes

Exercice 1

Soient A, B et C trois points du plan complexe, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b et c .
Montrer que :

$$\begin{aligned} ABC \text{ équilatéral} &\Leftrightarrow j \text{ ou } j^2 \text{ est racine de l'équation } az^2 + bz + c = 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} = 0 \end{aligned}$$

D'une part :

$$\begin{aligned} ABC \text{ équilatéral} &\Leftrightarrow C \text{ est l'image de } B \text{ par la rotation de centre } A \text{ et d'angle } \pm \frac{\pi}{3} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a) + a = -j^2(b-a) + a = -j^2b - ja \\ \text{ou} \\ c = e^{-i\frac{\pi}{3}}(b-a) + a = -j(b-a) + a = -j^2a - jb \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(j^2)^2 + bj^2 + c = 0 \\ \text{ou} \\ aj^2 + bj + c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow j \text{ ou } j^2 \text{ est racine de l'équation } az^2 + bz + c = 0 \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{b-c} = \frac{1}{a-c} + \frac{1}{b-a} = \frac{b-c}{(b-a)(a-c)} \Leftrightarrow (b-c)^2 = (b-a)(a-c) \\ &\Leftrightarrow (b-a)^2 + (b-a)(a-c) + (a-c)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{b-a}{a-c}\right)^2 + \frac{b-a}{a-c} + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{b-a}{a-c} = j \text{ ou } j^2 \\ &\Leftrightarrow b = -j(c-a) + a \text{ ou } b = -j^2(c-a) + a \\ &\Leftrightarrow ABC \text{ équilatéral} \end{aligned}$$

Enfin, $\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} = -\frac{a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$, donc :

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \Leftrightarrow \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} = 0.$$

Exercice 2 (Mines-Ponts – PSI – 2017)

Trouver les nombres complexes z tels que z, z^2 et z^5 soient les affixes de points alignés.

Soient M, M', M'' les points sur plan complexe d'affixes respectives z, z^2, z^5 .

Remarquons déjà que si $z \in \mathbb{R}$, alors z^2 et z^5 sont aussi réels et M, M', M'' sont alignés sur l'axe des abscisses.

Cherchons les éventuelles solutions non réelles.

On a $z^2 = z$ seulement pour $z = 0$ ou 1 , donc si $z \notin \mathbb{R}$, M, M', M'' sont alignés si et seulement si :

$$\frac{z^5 - z^2}{z^2 - z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z^5 - z^2}{z^2 - z} = \overline{\left(\frac{z^5 - z^2}{z^2 - z} \right)}.$$

Or, $\frac{z^5 - z^2}{z^2 - z} = \frac{(z^3 - 1)z^2}{(z - 1)z} = (z^2 + z + 1)z = z^3 + z^2 + z$, donc :

$$\begin{aligned} \frac{z^5 - z^2}{z^2 - z} \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow z^3 + z^2 + z = \overline{z^3 + z^2 + z} = \bar{z}^3 + \bar{z}^2 + \bar{z} \\ &\Leftrightarrow z^3 - \bar{z}^3 + z^2 - \bar{z}^2 + z - \bar{z} = 0 \\ &\Leftrightarrow (z^2 + z\bar{z} + \bar{z}^2 + z + \bar{z} + 1)(z - \bar{z}) = 0 \\ &\Leftrightarrow z^2 + z\bar{z} + \bar{z}^2 + z + \bar{z} + 1 = 0 \quad (\text{car } z \notin \mathbb{R}, \text{ donc } z \neq \bar{z}) \end{aligned}$$

Et en posant $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$\frac{z^5 - z^2}{z^2 - z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2(x^2 - y^2) + x^2 + y^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow y^2 = 3x^2 + 2x + 1.$$

Ainsi :

z, z^2 et z^5 sont les affixes de points alignés si et seulement si $z \in \mathbb{R}$ ou $y^2 = 3x^2 + 2x + 1$ avec $z = x + iy$.

Exercice 3 (Arts et Métiers – PSI – 2017)

On note $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$. Soit f définie sur D par $f(z) = |\cos z|^2$.

On rappelle que $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$.

1. Montrer que f est bornée sur D .
2. Exprimer $f(z)$ en fonction de $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$.
3. Déterminer le maximum et le minimum de f sur D .

En posant $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(z) &= |\cos z|^2 = \frac{1}{4} |e^{ix-y} + e^{-ix+y}|^2 \\ &= \frac{1}{4} (e^{ix-y} + e^{-ix+y}) (\overline{e^{ix-y} + e^{-ix+y}}) \\ &= \frac{1}{4} (e^{ix-y} + e^{-ix+y}) (e^{-ix-y} + e^{ix+y}) \\ &= \frac{1}{4} (e^{-2y} + e^{2ix} + e^{-2ix} + e^{2y}) = \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2} \operatorname{ch}(2y) \end{aligned}$$

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{C}$, donc sur D en tant que somme de telles fonctions. Comme le disque fermé D est fermé et borné, f est bornée sur D (et atteint ses bornes).
2. Cf. plus haut.

3. La fonction $g : (x, y) \mapsto \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2} \operatorname{ch}(2y)$ est de classe C^1 sur l'ouvert $\overset{\circ}{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ et pour tout $z = x + iy \in \overset{\circ}{D}$, on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\sin(2x) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \operatorname{sh}(2y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad (\text{car } -1 \leq x \leq 1, \text{ donc } -\pi < 2x < \pi)$$

Le seul point critique dans $\overset{\circ}{D}$ est donc 0 et $f(0) = 1$. Or :

$$f(1) = \frac{1}{2} \cos(2) + \frac{1}{2} \operatorname{ch}(0) \approx 0,3 < 1$$

$$f(i) = \frac{1}{2} \cos(0) + \frac{1}{2} \operatorname{ch}(2) \approx 2,4 > 1$$

Donc le maximum et le minimum de f sont atteints sur la frontière de D , soit $\{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ et comme $\cos$ et ch sont paires toutes les deux, le minimum et le maximum de f sont atteints (entre autres) sur $D_+ = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1, \operatorname{Re}(z) \geq 0, \operatorname{Im}(z) \geq 0\} = \{z = x + iy \in \mathbb{C}, 0 \leq x \leq 1, y = \sqrt{1-x^2}\}$ et pour tout $z = x + iy \in D_+$:

$$f(z) = \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2} \operatorname{ch}(2\sqrt{1-x^2}).$$

Sur $[0, 1]$:

- $x \mapsto 2x$ est croissante et à valeurs dans $[0, 2] \subset [0, \pi]$, donc avec $\cos$ décroissante sur $[0, \pi]$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{2} \cos(2x)$ est décroissante ;
- $x \mapsto 2\sqrt{1-x^2}$ est décroissante et positive, donc avec ch croissante sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{2} \operatorname{ch}(2\sqrt{1-x^2})$ est décroissante.

Ainsi, et comme on a pour tout $x \in [0, 1]$:

$$\frac{1}{2} \cos(2) + \frac{1}{2} \operatorname{ch}(0) \leq \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2} \operatorname{ch}(2\sqrt{1-x^2}) \leq \frac{1}{2} \cos(0) + \frac{1}{2} \operatorname{ch}(2).$$

Et finalement :

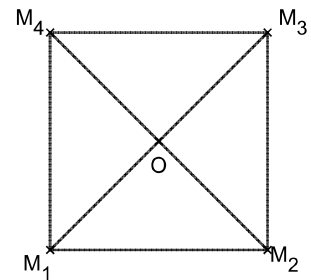
$$\boxed{\begin{aligned} \min_D f &= f(1) = \frac{1 + \cos(2)}{2} \\ \max_D f &= f(i) = \frac{1 + \operatorname{ch}(2)}{2} \end{aligned}}$$

Exercice 4 (Centrale – PSI – 2014)

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ pour que les quatre racines z_1, z_2, z_3, z_4 du polynôme $P = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$ soient les affixes des quatre sommets d'un carré du plan complexe.

Soient M_1, M_2, M_3, M_4 les points d'affixes respectives z_1, z_2, z_3, z_4 . Quitte à renuméroter, on suppose que le quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$ est direct. Comme z_1, z_2, z_3, z_4 sont les racines de $P = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$, on a $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = -a$. On appelle O le centre de gravité de $M_1M_2M_3M_4$, qui est d'affixe $z_O = \frac{1}{4}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4) = -\frac{a}{4}$.

Alors, $M_1M_2M_3M_4$ est un carré si et seulement si, pour tout $k \in \{2, 3, 4\}$, M_k est l'image de M_1 par la rotation de centre O et d'angle $(k-1)\frac{\pi}{2}$, soit :



$$\begin{cases} z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_1 - z_O) + z_O = e^{i\frac{\pi}{2}}\left(z_1 + \frac{a}{4}\right) - \frac{a}{4} \\ z_3 = e^{i\pi}(z_1 - z_O) + z_O = e^{i\pi}\left(z_1 + \frac{a}{4}\right) - \frac{a}{4} \\ z_4 = e^{i\frac{3\pi}{2}}(z_1 - z_O) + z_O = e^{i\frac{3\pi}{2}}\left(z_1 + \frac{a}{4}\right) - \frac{a}{4} \end{cases}$$

Avec $P = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d = (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)(X - z_4)$, ceci revient à :

$$\begin{aligned} P &= X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d \\ &= (X - z_1) \left(X - e^{i\frac{\pi}{2}}\left(z_1 + \frac{a}{4}\right) - \frac{a}{4} \right) \left(X - e^{i\pi}\left(z_1 + \frac{a}{4}\right) - \frac{a}{4} \right) \left(X - e^{i\frac{3\pi}{2}}\left(z_1 + \frac{a}{4}\right) - \frac{a}{4} \right) \\ &= \left(X + \frac{a}{4} - \left(z_1 + \frac{a}{4}\right) \right) \left(X + \frac{a}{4} - e^{i\frac{\pi}{2}}\left(z_1 + \frac{a}{4}\right) \right) \left(X + \frac{a}{4} - e^{i\pi}\left(z_1 + \frac{a}{4}\right) \right) \left(X + \frac{a}{4} - e^{i\frac{3\pi}{2}}\left(z_1 + \frac{a}{4}\right) \right) \\ &= \left(X + \frac{a}{4} \right)^4 - \left(z_1 + \frac{a}{4} \right)^4 \\ &= X^4 + aX^3 + \frac{3a^2}{8}X^2 + \frac{a^3}{16}X + \left(\frac{a}{4} \right)^4 - \left(z_1 + \frac{a}{4} \right)^4 \end{aligned}$$

Donc à :

$$b = \frac{3a^2}{8}, \quad c = \frac{a^3}{16}, \quad d = \left(\frac{a}{4} \right)^4 - \left(z_1 + \frac{a}{4} \right)^4.$$

La dernière relation donne $\left(z_1 + \frac{a}{4} \right)^4 = \left(\frac{a}{4} \right)^4 - d$ qui donne $z_1^4 + az_1^3 + bz_1^2 + cz_1 + d = 0$ avec les deux autres relations, donc dit juste que z_1 est racine de P . Ainsi :

$$M_1M_2M_3M_4 \text{ est un carré (direct) si et seulement si } b = \frac{3a^2}{8} \text{ et } c = \frac{a^3}{16}.$$

Exercice 5 (Une construction du pentagone régulier à la règle et au compas)

On pose $z = e^{i2\pi/5}$, puis $a = z + z^4$ et $b = z^2 + z^3$.

1. Déterminer une équation du second degré dont les solutions sont a et b .
2. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
3. Le cercle C de centre Ω , d'affixe $z_\Omega = -\frac{1}{2}$, passant par le point M d'affixe $z_M = i$ coupe l'axe (Ox) en deux points I et J . Montrer que $x_I + x_J = x_I x_J = -1$ et en déduire une construction à la règle et au compas du pentagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique et dont un des sommets est le point d'affixe 1.
4. La diagonale $[AC]$ d'un pentagone régulier $ABCDE$ est recoupée par deux autres diagonales en deux points F et G . Calculer les rapports $\frac{AF}{AC}$ et $\frac{FG}{AF}$.

1. a et b sont solutions de $x^2 - (a+b)x + ab = 0$.

Remarquons que $z^5 = 1$, soit $z^5 - 1 = (z-1)(1+z+z^2+z^3+z^4) = 0$ avec $z \neq 1$ donc :

$$a+b = z+z^2+z^3+z^4 = -1$$

$$ab = (z+z^4)(z^2+z^3) = z^3+z^4+z^6+z^7 = z^3+z^4+z+z^2 = -1$$

Ainsi :

$$a \text{ et } b \text{ sont solutions de } x^2 + x - 1 = 0.$$

2. On a $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} < \frac{4\pi}{5} < \pi$, et :

$$a = z + z^4 = e^{i2\pi/5} + e^{i8\pi/5} = e^{i2\pi/5} + e^{-i2\pi/5} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$$

$$b = z^2 + z^3 = e^{i4\pi/5} + e^{i6\pi/5} = e^{i4\pi/5} + e^{-i4\pi/5} = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) < 0$$

Or, les solutions de $x^2 + x - 1 = 0$ sont $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$, donc $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et

$b = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, et ainsi :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \text{ et } \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

Toujours $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} < \frac{4\pi}{5} < \pi$, on a $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$ et $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) > 0$, donc :

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)} \text{ et } \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{4\pi}{5}\right)}.$$

Soit :

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \text{ et } \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

Enfin, $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$, donc $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) > 0$ et $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) > 0$, donc :

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)}.$$

Soit :

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

3. Le rayon de C est $R = \Omega M = |z_M - z_\Omega| = \left|i + \frac{1}{2}\right| = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et :

$$x_I = -\frac{1}{2} + R = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = a$$

$$x_J = -\frac{1}{2} - R = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} = 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = b$$

Ainsi, d'après la question 1 :

$$x_I + x_J = x_I x_J = -1$$

Notons A le point d'affixe 1 et $ABCDE$ le pentagone régulier direct inscrit dans le cercle trigonométrique. On a alors $z_B = e^{i2\pi/5}$ et $z_C = e^{i4\pi/5}$, donc :

$$x_B = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{2} x_I \quad \text{et} \quad x_C = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{2} x_J.$$

Construire une figure géométrique à la règle (non graduée) et au compas veut dire construire une figure en ne traçant que des droites (ou segments) avec la règle et des cercles (ou arcs de cercle) avec le compas.

Le centre O du repère et l'unité de longueur, donc le point A d'affixe 1, sont donnés.

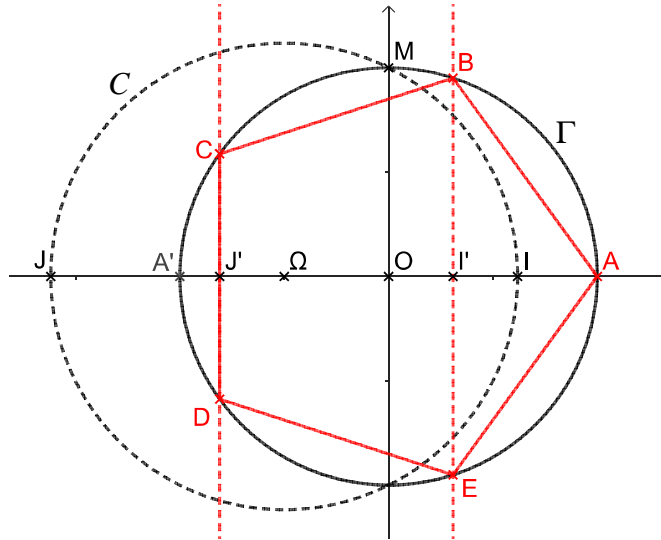
Construction du pentagone régulier $ABCDE$ à la règle et au compas :

- 1) L'axe des abscisses (OA) (règles).
- 2) On construit l'axe des ordonnées, c'est-à-dire la perpendiculaire à (OA) en O (règle et compas : construction de base).
- 3) On trace le cercle trigonométrique Γ , c'est-à-dire le cercle de centre O et passant par A (compas). L'autre intersection de Γ avec (OA) est appelée A' et l'intersection d'ordonnée positive de Γ avec l'axe des ordonnées est le point M .
- 4) On construit le point Ω , milieu de $[OA']$ (règle et compas : construction de base).
- 5) On construit le cercle C de centre Ω et passant par M (compas). On note I et J les intersections de C avec (OA).
- 6) On construit les points I' et J' , milieux respectifs de $[OI]$ et $[OJ]$ (règle et compas : construction de base). On a donc $x_B = x_{I'}$ et $x_C = x_{J'}$.

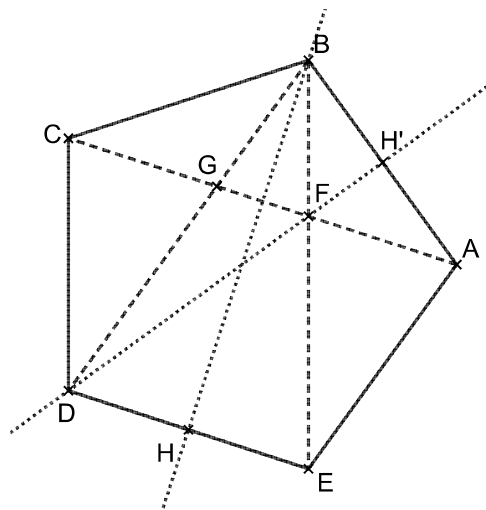
7) On construit les perpendiculaires à (OA) en I' et J' (règle et compas : construction de base). Les intersections de la perpendiculaire en I' avec Γ sont B et E et celles de la perpendiculaire en J' avec Γ sont C et D .

8) On trace la alors le polygone $ABCDE$ (règle) qui est le pentagone régulier voulu.

On obtient la figure :



4. On a la figure :



Soit H le milieu de $[DE]$. Le pentagone est symétrique par rapport à (BH) donc A et C sont symétriques par rapport à (BH) (donc $(AC) \perp (BH)$), ainsi que D et E (donc $(DE) \perp (BH)$). Il en va alors de même pour $F = (BE) \cap (AC)$ et $G = (BD) \cap (AC)$. Tout ceci permet d'affirmer que $(AC) \parallel (DE)$ et $AF = GC$.

On a alors $AC = AF + FG + GC = 2AF + FG$, donc $GF = AC - 2AF$ (1) et avec le théorème de Thalès, on a aussi :

$$\frac{BF}{BE} = \frac{GF}{DE}.$$

Avec (1) et $DE = AB$, ceci donne :

$$\frac{BF}{BE} = \frac{AC - 2AF}{AB} \quad (2).$$

Soit H' le milieu de $[AB]$. Le pentagone est symétrique par rapport à (DH') donc A et B sont symétriques par rapport à (DH') , ainsi que C et E . Alors $F = (BE) \cap (AC)$ est son propre symétrique par rapport à (DH') , donc appartient à (DH') . Ceci permet d'affirmer que $BE = AC$ et $AF = BF$. Alors $\frac{BF}{BE} = \frac{AF}{AC}$ et (2) se réécrit :

$$\frac{AF}{AC} = \frac{AC - 2AF}{AB} = \frac{AC}{AB} \left(1 - 2 \frac{AF}{AC} \right).$$

Donc :

$$\frac{AF}{AC} = \frac{\frac{AC}{AB}}{1 + 2 \frac{AC}{AB}}.$$

Le triangle ABC est isocèle en B et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{3\pi}{5}$, donc avec la formule d'Al-Kashi, on obtient :

$$AC^2 = BC^2 + BA^2 - 2BC \cdot BA \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = 2AB^2 \left(1 - \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) \right).$$

Soit :

$$\left(\frac{AC}{AB} \right)^2 = 2 \left(1 - \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) \right) = 2 \left(1 + \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{5}\right) \right) = 2 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \right) = 4 \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right).$$

Ainsi, $\frac{AC}{AB} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et :

$$\frac{AF}{AC} = \frac{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}{1 + 2 \frac{1 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2(2 + \sqrt{5})} = \frac{(1 + \sqrt{5})(\sqrt{5} - 2)}{2(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)} \Leftrightarrow \boxed{\frac{AF}{AC} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}}.$$

Avec (1), on obtient aussi :

$$\frac{FG}{AF} = \frac{AC - 2AF}{AF} = \frac{AC}{AF} - 2 = \frac{2}{3 - \sqrt{5}} - 2 = \frac{2(3 + \sqrt{5})}{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})} - 2 \Leftrightarrow \boxed{\frac{FG}{AF} = \frac{3\sqrt{5} - 2}{4}}.$$