

Complément sur la trigonalisation

Pour trigonaliser une matrice A (3×3) :

- Calculer χ_A . Si χ_A est scindé, A est trigonalisable.
- Chercher les sous-espaces propres.
 - S'il y a trois vap distinctes ou deux vap distinctes, mais avec un sep de dimension 2 ou une seule vap, mais avec un sep de dimension 3 (dans ce cas, A est scalaire) : A est diagonalisable dans une base de vep.
 - Si $\chi_A = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)^2$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et les deux sep sont des droites, alors A est semblable à

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & a \\ 0 & \lambda_2 & b \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$
 dans une base (e_1, e_2, e_3) où e_1 est un vep associé à λ_1 , e_2 est un vep associé à λ_2 et e_3 complète e_1 et e_2 en une base.
 - Si $\chi_A = (X - \lambda_1)^3$, et $\ker(A - \lambda_1 I_3)$ est un plan, on procède comme ci-dessus avec (e_1, e_2) une base de $\ker(A - \lambda_1 I_3)$.
 - Si $\chi_A = (X - \lambda_1)^3$, et $\ker(A - \lambda_1 I_3)$ est une droite, c'est un tout petit peu plus délicat.

Voici deux méthodes.

▪ Première méthode

Si e_1 dirige $\ker(A - \lambda_1 I_3)$, alors on peut le compléter en une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^3$ dans laquelle la matrice

A devient $\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$ avec $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et $P = P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}}$ où $\mathcal{B}_c$ est la base canonique de $\mathbb{K}^3$.

Alors, $\chi_A = (X - \lambda_1)\chi_B = (X - \lambda_1)^3$ donc $\chi_B = (X - \lambda_1)^2$ et λ_1 est vap de B .

Si $e'_1 \in \mathbb{K}^2$ est un vep de B associé à λ_1 , on le complète en une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{K}^2$, avec $Q = P_{\mathcal{B}'_c}^{\mathcal{B}'}$ où $\mathcal{B}'_c$

est la base canonique de $\mathbb{K}^2$. Alors, $\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \lambda_1 & a \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = R^{-1}AR$ avec $R = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & Q \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

▪ Seconde méthode

Posons $B = A - \lambda_1 I_3$ (donc $\ker B$ est une droite). On a $\chi_A(A) = B^3 = 0_3$, mais $B^2 \neq 0_3$ (car sinon $\text{Im } B \subset \ker B$ donc $\text{rg}(B) = 3 - \dim(\ker B) \leq \dim(\ker B)$, donc $\dim(\ker B) \geq \frac{3}{2} > 1$ ce qui est absurde).

Ainsi, il existe $e_3 \in \mathbb{K}^3$ tel que $B^2 e_3 \neq 0$ et on prouve facilement que $(B^2 e_3, B e_3, e_3)$ est libre, donc

une base de $\mathbb{K}^3$. Dans cette base, B devient $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc A devient $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$

$$\begin{aligned} \chi_{A(t)} &= \begin{vmatrix} X-2 & -1 & 2 \\ -1 & X-2 & 2 \\ -3 & 1 & X+1 \end{vmatrix} \stackrel{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 2 \\ X-1 & X-2 & 2 \\ X-1 & 1 & X+1 \end{vmatrix} \\ &= (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & X-2 & 2 \\ 1 & 1 & X+1 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & X-1 & 0 \\ 0 & 2 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)^3 \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y = z.$$

Donc, $\ker(A - \lambda_1 I_3) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et on est dans le dernier cas.

Avec $B = A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, on a $B^2 = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, donc si $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$,

on a $B^2 e_2 = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$, donc $(B^2 e_2, B e_2, e_2) = \left(4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et avec $P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$