

Corrigés des TD du chapitre 10

Exercice 1

1) a. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1} dt$ est impropre en 0, 1 et $+\infty$.

- $\lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{\ln t}{t^2-1} \right) = \lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{1}{t+1} \frac{\ln t}{t-1} \right) = \frac{1}{2}$, donc $t \mapsto \frac{\ln t}{t^2-1}$, prolongée par continuité en 1, est continue sur $\mathbb{R}_+^*$;
- $\frac{\ln t}{t^2-1} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\ln t$ et $t \mapsto -\ln t$ est intégrable au voisinage de 0^+ ;
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(t^{1.5} \frac{\ln t}{t^2-1} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} = 0$ donc $\frac{\ln t}{t^2-1} = o\left(\frac{1}{t^{1.5}}\right)$ et $t \mapsto \frac{1}{t^{1.5}}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Donc :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1} dt \text{ converge.}}$$

b. L'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x}$ est impropre en 1.

- $x \mapsto \frac{1}{\arccos x}$ est continue sur $[0, 1[$;
- Pour tout $a \in [0, 1[$, $\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x} \underset{x=\arccos t}{=} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{t} dt$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$.

Donc :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x} \text{ converge.}}$$

c. L'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^a (\ln t)^b}$ est impropre en $+\infty$.

- Si $a < 1$, alors $\frac{1}{t} = o\left(\frac{1}{t^a (\ln t)^b}\right)$ et $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge, donc $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^a (\ln t)^b}$ diverge.
- Si $a > 1$, alors $\frac{1}{t^a (\ln t)^b} = o\left(\frac{1}{t^{(a+1)/2}}\right)$ et $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{(a+1)/2}}$ converge car $\frac{a+1}{2} > 1$, donc $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^a (\ln t)^b}$ converge.
- Si $a = b = 1$, alors pour $X \geq 2$, $\int_2^X \frac{dt}{t \ln t} = \ln\left(\frac{\ln X}{\ln 2}\right) \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} +\infty$, donc $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t}$ diverge.
- Si $a = 1$ et $b \neq 1$, alors pour tout $X \geq 2$, $\int_2^X \frac{dt}{t (\ln t)^b} = \frac{1}{1-b} \left[\frac{1}{(\ln X)^{b-1}} - \frac{1}{(\ln 2)^{b-1}} \right]$, donc $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t (\ln t)^b}$ converge quand $b > 1$.

Donc :

$$\boxed{\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^a (\ln t)^b} \text{ converge si et seulement si } a > 1 \text{ ou } (a = 1 \text{ et } b > 1).}$$

d. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}} - a - \frac{b}{x} \right] dx$ est impropre en $+\infty$.

On a :

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right) \right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)$$

Donc :

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}} - a - \frac{b}{x} = e^{\left(1+\frac{1}{x}\right) \ln \left(1+\frac{1}{x}\right)} - a - \frac{b}{x} = e^{\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)} - a - \frac{b}{x} = 1 - a + \frac{1-b}{x} + \frac{1}{x^2} + o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, mais $x \mapsto 1 - a + \frac{1-b}{x}$ ne l'est pas sauf si elle est nulle, autrement dit si $a = b = 1$. Ainsi :

$$\int_1^{+\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}} - a - \frac{b}{x} \right] dx \text{ converge si et seulement si } a = b = 1.$$

e. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin^2 x \, dx$ est impropre en $+\infty$.

La fonction $x \mapsto \sin^2 x$ est non nulle et périodique, donc :

$$\int_0^{+\infty} \sin^2 x \, dx \text{ diverge.}$$

f. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{it^2} \, dt$ est impropre en $+\infty$.

Pour tout $x \geq 1$, on a en intégrant par parties :

$$\int_1^x e^{it^2} \, dt = \int_1^x \frac{1}{2it} 2it e^{it^2} \, dt = \left[\frac{1}{2it} e^{it^2} \right]_1^x + \frac{1}{2i} \int_1^x \frac{1}{t^2} e^{it^2} \, dt = \frac{1}{2i} \left(\frac{e^{ix^2}}{x} - e^i + \int_1^x \frac{1}{t^2} e^{it^2} \, dt \right).$$

Et :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ix^2}}{x} = 0$;
- $\left| \frac{1}{t^2} e^{it^2} \right| = \frac{1}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} \, dt$ converge, donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} e^{it^2} \, dt$ converge ($t \mapsto \frac{1}{t^2} e^{it^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$).

Ainsi :

$$\int_0^{+\infty} e^{it^2} \, dt \text{ converge.}$$

g. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos(e^x) \, dx$ est impropre en $+\infty$.

On fait la même technique que ci-dessus :

$$\int_0^{+\infty} \cos(e^x) \, dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} e^x \cos(e^x) \, dx = \left[e^{-x} \sin(e^x) \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin(e^x) \, dx = \sin 1 + \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin(e^x) \, dx.$$

Comme $|e^{-x} \sin(e^x)| \leq e^{-x}$ et $\int_0^{+\infty} e^{-x} \, dx$ converge, $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin(e^x) \, dx$ converge.

Ainsi :

$$\int_0^{+\infty} \cos(e^x) dx \text{ converge.}$$

h. L'intégrale $\int_0^{+\infty} x^3 \sin(x^8) dx$ est impropre en $+\infty$.

Once again :

$$\int_1^{+\infty} x^3 \sin(x^8) dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{8x^4} 8x^7 \sin(x^8) dx = \left[-\frac{1}{8x^4} \cos(x^8) \right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{2x^5} \cos(x^8) \right) dx.$$

Et les deux termes du membre de droite convergent, donc :

$$\int_0^{+\infty} x^3 \sin(x^8) dx \text{ converge.}$$

2) Les deux intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ et $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx$ sont impropres en 0 et $+\infty$.

On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, donc $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ et $x \mapsto \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2$ se prolongent par continuité en 0, et ainsi :

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \text{ et } \int_0^1 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx \text{ convergent.}$$

Pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a $0 \leq \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \leq \frac{1}{x^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge, donc $x \mapsto \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et ainsi :

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx \text{ converge.}$$

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $a < b$, on a en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx &= \int_a^b \frac{1}{x^2} \sin^2 x dx = \left[\left(-\frac{1}{x} \right) \sin^2 x \right]_a^b - \int_a^b \left(-\frac{1}{x} \right) 2 \cos x \sin x dx \\ &= \frac{\sin^2 a}{a} - \frac{\sin^2 b}{b} + \int_a^b \frac{\sin(2x)}{x} dx = \frac{\sin^2 a}{a} - \frac{\sin^2 b}{b} + \int_a^b \frac{\sin(2x)}{2x} 2 dx \end{aligned}$$

Et en posant $t = 2x$, on obtient :

$$\int_a^b \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \frac{\sin^2 a}{a} - \frac{\sin^2 b}{b} + \int_{2a}^{2b} \frac{\sin t}{t} dt$$

Or, on a $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin^2 a}{a} = \lim_{a \rightarrow 0} \left(\sin a \frac{\sin a}{a} \right) = 0 \times 1 = 0$ et $\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{\sin^2 b}{b} = 0$, donc, en faisant tendre a vers 0 et b vers

$+\infty$ dans la relation ci-dessus, on obtient la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

L'intégrale de Dirichlet est $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$, donc on vient de voir qu'elle converge. On montre que qu'elle est semi-convergente et vaut $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 2

a. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^2} dt$ est impropre en $+\infty$, mais $\frac{\arctan t}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi/2}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge, donc $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^2} dt$ converge.

Pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{\arctan t}{t^2} dt &= \left[-\frac{\arctan t}{t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{dt}{t(t^2+1)} = \arctan 1 - \frac{\arctan x}{x} + \int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1} \right) dt \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\arctan x}{x} + \left[\ln t - \frac{1}{2} \ln(t^2+1) \right]_1^x = \frac{\pi}{4} - \frac{\arctan x}{x} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2}{x^2+1} \right) + \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

Enfin, en en faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^2} dt = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2}$$

b. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3}$ est impropre en $+\infty$, mais $\frac{1}{1+t^3} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^3}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt$ converge, donc $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3}$ converge.

On a :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3} &= \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+t} - \frac{t-2}{t^2-t+1} \right) dt = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{2} \frac{2t-1}{t^2-t+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{t^2-t+1} \right) dt \\ &= \frac{1}{3} \left[\ln(1+t) - \frac{1}{2} \ln(t^2-t+1) + \sqrt{3} \arctan \left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^{+\infty} \\ &= \left[\frac{1}{3} \ln \left(\frac{1+t}{\sqrt{t^2-t+1}} \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^{+\infty} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}}$$

c. L'intégrale $\int_0^1 \frac{x \ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ est impropre en 0 et 1, mais :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{\ln x}{1-x} \right) = 0.$$

Donc, $\int_0^1 \frac{x \ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ converge.

Avec une IPP, on a pour tout $(a, b) \in]0, 1[^2$:

$$\int_a^b \frac{x \ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx = - \int_a^b \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \ln x dx = - \left[\sqrt{1-x^2} \ln x \right]_a^b + \int_a^b \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} dx.$$

En posant $t = \sqrt{1-x^2}$:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} dx &= - \int_a^b \frac{1-x^2}{x^2} \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} dx = - \int_{\sqrt{1-a^2}}^{\sqrt{1-b^2}} \frac{t^2}{1-t^2} dt = \int_{\sqrt{1-a^2}}^{\sqrt{1-b^2}} \left(1 - \frac{1}{1-t^2} \right) dt \\ &= \left[t \right]_{\sqrt{1-a^2}}^{\sqrt{1-b^2}} - \frac{1}{2} \int_{\sqrt{1-a^2}}^{\sqrt{1-b^2}} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt = \left[t \right]_{\sqrt{1-a^2}}^{\sqrt{1-b^2}} - \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+t}{1-t} \right) \right]_{\sqrt{1-a^2}}^{\sqrt{1-b^2}} \\ &= \left[t \right]_{\sqrt{1-a^2}}^{\sqrt{1-b^2}} - \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{(1+t)^2}{1-t^2} \right) \right]_{\sqrt{1-a^2}}^{\sqrt{1-b^2}} = \left[t \right]_{\sqrt{1-a^2}}^{\sqrt{1-b^2}} - \left[\ln \left(\frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}} \right) \right]_{\sqrt{1-a^2}}^{\sqrt{1-b^2}} \\ &= \sqrt{1-b^2} - \sqrt{1-a^2} - \ln \left(\frac{1+\sqrt{1-b^2}}{b} \right) + \ln \left(\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a} \right) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{x \ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= -\sqrt{1-b^2} \ln b + \sqrt{1-a^2} \ln a + \sqrt{1-b^2} - \sqrt{1-a^2} - \ln \left(\frac{1+\sqrt{1-b^2}}{b} \right) + \ln \left(\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a} \right) \\ &= \sqrt{1-a^2} \ln a + \ln \left(1 + \sqrt{1-a^2} \right) - \ln a - \sqrt{1-a^2} - \sqrt{1-b^2} \ln b + \sqrt{1-b^2} - \ln \left(\frac{1+\sqrt{1-b^2}}{b} \right) \\ &= \left[\sqrt{1-a^2} - 1 \right] \ln a + \ln \left(1 + \sqrt{1-a^2} \right) - \sqrt{1-a^2} - \sqrt{1-b^2} \ln b + \sqrt{1-b^2} - \ln \left(\frac{1+\sqrt{1-b^2}}{b} \right) \\ &= \frac{-a^2 \ln a}{\sqrt{1-a^2} + 1} + \ln \left(1 + \sqrt{1-a^2} \right) - \sqrt{1-a^2} - \sqrt{1-b^2} \ln b + \sqrt{1-b^2} - \ln \left(\frac{1+\sqrt{1-b^2}}{b} \right) \end{aligned}$$

En faisant tendre a vers 0 et b vers 1, on obtient :

$$\boxed{\int_a^b \frac{x \ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \ln 2 - 1}$$

d. L'intégrale $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x} dx$ est impropre en $\frac{\pi}{2}$, mais $\sqrt{\tan \left(\frac{\pi}{2} - h \right)} = \sqrt{\cotan h} \underset{h \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{h}}$ et $\int_0^a \frac{1}{\sqrt{h}} dh$ converge,

donc $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x} dx$ converge.

Posons carrément $t = \sqrt{\tan x}$. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x} dx &= \int_0^{+\infty} t \frac{2t}{1+t^4} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} - \frac{t}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} \right) dt \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} \left(\frac{2t - \sqrt{2}}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} - \frac{2t + \sqrt{2}}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} + \frac{\sqrt{2}}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} + \frac{\sqrt{2}}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} \right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x} \, dx &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} \left(\frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1} - \frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1} \right) dt + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1} \right) dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \left(\frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1} \right) dt \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} \left(\frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1} - \frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1} \right) dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1} \right) dt \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} \left(\frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1} - \frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1} \right) dt + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}t-1)^2+1} dt \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\ln \left(\frac{t^2-\sqrt{2}t+1}{t^2+\sqrt{2}t+1} \right) \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\arctan(\sqrt{2}t-1) \right]_{-\infty}^{+\infty}
\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x} \, dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}}$$

e. L'intégrale $\int_0^{+\infty} (\sqrt{t} + a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t+2}) \, dt$ est impropre en $+\infty$. Or :

$$\begin{aligned}
\sqrt{t} + a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t+2} &= \sqrt{t} \left(1 + a\sqrt{1+\frac{1}{t}} + b\sqrt{1+\frac{2}{t}} \right) \\
&= \sqrt{t} \left[1 + a + b + \frac{a+2b}{2t} - \frac{a+4b}{8t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right) \right] \\
&= (1+a+b)\sqrt{t} + \frac{a+2b}{2\sqrt{t}} - \frac{a+4b}{8t\sqrt{t}} + o\left(\frac{1}{t\sqrt{t}}\right)
\end{aligned}$$

Comme $\int_0^{+\infty} \sqrt{t} \, dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \, dt$ divergent et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}} \, dt$ converge, l'intégrale converge si et seulement si :

$$\begin{cases} 1+a+b=0 \\ a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}.$$

Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} (\sqrt{t} - 2\sqrt{t+1} + \sqrt{t+2}) \, dt &= \left[\frac{2}{3}t\sqrt{t} - 2\frac{2}{3}(t+1)\sqrt{t+1} + \frac{2}{3}(t+2)\sqrt{t+2} \right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{2}{3} \left[t(\sqrt{t} - 2\sqrt{t+1} + \sqrt{t+2}) + 2(\sqrt{t+2} - \sqrt{t+1}) \right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{2}{3} \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[t(\sqrt{t} - 2\sqrt{t+1} + \sqrt{t+2}) + 2(\sqrt{t+2} - \sqrt{t+1}) \right] - \frac{4(\sqrt{2}-1)}{3} \\
&= \frac{2}{3} \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[t\sqrt{t} \left(1 - 2\sqrt{1+\frac{1}{t}} + \sqrt{1+\frac{2}{t}} \right) + 2\frac{1}{\sqrt{t+2}+\sqrt{t+1}} \right] - \frac{4(\sqrt{2}-1)}{3} \\
&= \frac{2}{3} \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{4\sqrt{t}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \right] - \frac{4(\sqrt{2}-1)}{3}
\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} (\sqrt{t} - 2\sqrt{t+1} + \sqrt{t+2}) \, dt = -\frac{4(\sqrt{2}-1)}{3}}$$

f. Pour que la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{(1-t)(1+at)}}$ soit définie sur $]0,1[$, il faut que $1+at > 0$ sur $]0,1[$.

C'est toujours le cas quand $a \geq 0$ et si $a < 0$, $1+at > 0$ équivaut à $t < -\frac{1}{a}$, donc si $-\frac{1}{a} \in]0,1[$, c'est-à-dire $a < -1$, la fonction n'est pas définie sur $]0,1[$.

Ainsi, il faut que $a \geq -1$ et dans ce cas, l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1+at)}}$ est impropre en 1.

Il y a deux cas à distinguer.

- Si $a = -1$, alors $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1+at)}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1-t)}} = \int_0^1 \frac{dt}{1-t}$ qui diverge.
- Si $a > -1$, alors $\frac{1}{\sqrt{(1-t)(1+at)}} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-a}} \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ et $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$ converge, donc $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1+at)}}$ converge.

Ainsi :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1+at)}} \text{ converge si et seulement si } a > -1.$$

Si $a = 0$, on a :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1+at)}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = -2 \left[\sqrt{1-t} \right]_0^1 = 2.$$

Si $a \neq 0$:

$$(1-t)(1+at) = 1 - (1-a)t - at^2 = \frac{(1+a)^2}{4a} \left[1 - \left(\frac{2at+1-a}{1+a} \right)^2 \right].$$

Alors, en posant $x = \frac{2at+1-a}{1+a}$, on a (avec $1+a > 0$) :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1+at)}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\frac{(1+a)^2}{4a} \left[1 - \left(\frac{2at+1-a}{1+a} \right)^2 \right]}} = \int_{\frac{1-a}{1+a}}^1 \frac{\frac{1+a}{2a} dx}{\sqrt{\frac{(1+a)^2}{4a} [(1-x^2)]}} = \int_{\frac{1-a}{1+a}}^1 \frac{dx}{a \sqrt{\frac{1}{a} [(1-x^2)]}}.$$

Sur $] -1, +\infty[$, la fonction $a \mapsto \frac{1-a}{1+a}$ est strictement décroissante de $+\infty$ à -1 et vaut 1 en 0. Il faut donc distinguer deux cas.

Si $a > 0$, on a $\frac{1-a}{1+a} \in] -1, 1[$ et :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1+at)}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\frac{1-a}{1+a}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \left[-\arccos x \right]_{\frac{1-a}{1+a}}^1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \arccos \left(\frac{1-a}{1+a} \right).$$

Si $-1 < a < 0$, on a $\frac{1-a}{1+a} > 1$ et :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1+at)}} = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_1^{\frac{1-a}{1+a}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \left[\operatorname{argch} x \right]_1^{\frac{1-a}{1+a}} = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \operatorname{argch} \left(\frac{1-a}{1+a} \right).$$

Remarquons que la fonction argch n'est pas au programme...

Finalement :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1+at)}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|a|}} \operatorname{argch}\left(\frac{1-a}{1+a}\right) & \text{quand } -1 < a < 0 \\ 2 & \text{quand } a = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \arccos\left(\frac{1-a}{1+a}\right) & \text{quand } a > 0 \end{cases}$$

g. L'intégrale $\int_0^1 t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt$ est impropre en 0.

Commençons par effectuer le changement de variable $x = \frac{1}{t}$. On obtient :

$$\int_0^1 t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt = \int_1^{+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x^3} dx.$$

Or, pour tout $x \in [1, +\infty[$, $0 < \lfloor x \rfloor \leq x$, donc $0 < \frac{\lfloor x \rfloor}{x^3} \leq \frac{1}{x^2}$ et, comme $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge, $\int_1^{+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x^3} dx$ converge.

On a alors :

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x^3} dx &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{\lfloor x \rfloor}{x^3} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{n}{x^3} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{n}{2x^2} \right]_n^{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Et ainsi :

$$\int_0^1 t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt = \frac{\pi^2}{12}$$

h. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\lambda)}$ est impropre en $+\infty$ et en 0 quand $\lambda < 0$.

Si $\lambda > 0$, on a $\frac{1}{(1+t^2)(1+t^\lambda)} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2+\lambda}}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2+\lambda}}$ converge (car $2+\lambda > 1$), donc $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\lambda)}$ converge.

Si $\lambda = 0$, on a $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\lambda)} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$, donc $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\lambda)}$ converge.

Si $\lambda < 0$, on a

- $\frac{1}{(1+t^2)(1+t^\lambda)} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge, donc $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\lambda)}$ converge ;
- $\frac{1}{(1+t^2)(1+t^\lambda)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{-\lambda}$ et $\int_0^1 t^{-\lambda} dt$ converge (car $-\lambda > 0$), donc $\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\lambda)}$ converge.

Ainsi, $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\lambda)}$ converge.

Effectuons le changement de variable $x = \frac{1}{t}$. On obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\lambda)} = \int_0^{+\infty} \frac{x^\lambda dx}{(1+x^2)(1+x^\lambda)}.$$

On a alors :

$$2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\lambda)} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\lambda)} + \int_0^{+\infty} \frac{t^\lambda dt}{(1+t^2)(1+t^\lambda)} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Et donc :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\lambda)} = \frac{\pi}{4}}$$

i. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor x \rfloor}}{x} dx$ est impropre en $+\infty$.

Soit $X \geq 2$ et $N = E(X) \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} \int_1^X \frac{(-1)^{\lfloor x \rfloor}}{x} dx &= \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} \frac{(-1)^{\lfloor x \rfloor}}{x} dx + \int_N^X \frac{(-1)^{\lfloor x \rfloor}}{x} dx = \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^n \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} + (-1)^N \int_N^X \frac{dx}{x} \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^n [\ln(n+1) - \ln n] + (-1)^N \ln\left(\frac{X}{N}\right) = \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + (-1)^N \ln\left(\frac{X}{N}\right) \end{aligned}$$

On a $N \leq X < N+1$, donc $1 \leq \frac{X}{N} < 1 + \frac{1}{N}$ et quand $X \rightarrow +\infty$, $N \rightarrow +\infty$, donc $\frac{X}{N} \rightarrow 1$ et ainsi :

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} (-1)^N \ln\left(\frac{X}{N}\right) = 0.$$

La série $\sum (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ vérifie de CSSA, donc converge et ainsi :

$$\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor x \rfloor}}{x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Or, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) &= \sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{p=1}^N \ln\left(\frac{2p+1}{2p}\right) - \sum_{p=1}^N \ln\left(\frac{2p}{2p-1}\right) \\ &= \sum_{p=1}^N \ln\left(\frac{2p+1}{2p}\right) + \sum_{p=1}^N \ln\left(\frac{2p-1}{2p}\right) \\ &= \ln\left(\frac{3 \times 5 \times \dots \times (2N-1) \times (2N+1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2N-2) \times (2N)}\right) + \ln\left(\frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2N-1) \times (2N-1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2N-2) \times (2N)}\right) \\ &= \ln\left(\frac{(2N+1)!}{[2 \times 4 \times \dots \times (2N-2) \times (2N)]^2}\right) + \ln\left(\frac{(2N)!}{[2 \times 4 \times \dots \times (2N-2) \times (2N)]^2}\right) \\ &= \ln\left(\frac{(2N+1)!}{(2^N N!)^2}\right) + \ln\left(\frac{(2N)!}{(2^N N!)^2}\right) = \ln\left((2N+1) \left[\frac{(2N)!}{2^{2N} (N!)^2}\right]^2\right) \end{aligned}$$

Et avec la formule de Stirling, on a :

$$(2N+1) \left[\frac{(2N)!}{2^{2N} (N!)^2} \right]^2 \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} (2N+1) \frac{\left[\frac{\sqrt{4\pi N} \left(\frac{2N}{e} \right)^{2N}}{2^{2N} \times 2\pi N \left(\frac{N}{e} \right)^{2N}} \right]^2}{1} = \frac{2N+1}{\pi N} \rightarrow \frac{2}{\pi}.$$

Ainsi $\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \rightarrow \ln \left(\frac{2}{\pi} \right)$, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \ln \left(\frac{2}{\pi} \right)$, d'où :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{[x]}}{x} dx = \ln \left(\frac{2}{\pi} \right)}$$

j. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx$ est impropre en 0 et en $+\infty$.

On a $\frac{f(bx)}{x} = o_{x \rightarrow +\infty}(f(bx))$ et comme f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, alors $x \mapsto f(bx)$ l'est aussi et donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(bx)}{x} dx$ converge. De même, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(ax)}{x} dx$ converge, et donc $\int_1^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx$ converge.

Soit $h > 0$. Comme $\int_h^{+\infty} \frac{f(ax)}{x} dx$ et $\int_h^{+\infty} \frac{f(bx)}{x} dx$ convergent, on peut écrire :

$$\int_h^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = \int_h^{+\infty} \frac{f(bx)}{x} dx - \int_h^{+\infty} \frac{f(ax)}{x} dx.$$

Et en posant $t = ax$, on obtient :

$$\int_h^{+\infty} \frac{f(ax)}{x} dx = \int_{ah}^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt.$$

On a le même résultat avec b , d'où :

$$\int_h^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = \int_{bh}^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{ah}^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_{bh}^{ah} \frac{f(t)}{t} dt.$$

La fonction f est continue en 0, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [0, \alpha]$, on a :

$$f(0) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(0) + \varepsilon.$$

Alors, pour tout $h \in \left[0, \frac{\alpha}{b} \right]$, on a $0 \leq ah < bh \leq \alpha$, donc pour tout $t \in [ah, bh]$, $f(0) - \varepsilon \leq f(t) \leq f(0) + \varepsilon$, d'où :

$$\int_{ah}^{bh} \frac{f(0) - \varepsilon}{t} dt \leq \int_{ah}^{bh} \frac{f(t)}{t} dt \leq \int_{ah}^{bh} \frac{f(0) + \varepsilon}{t} dt \Leftrightarrow (f(0) - \varepsilon) \int_{ah}^{bh} \frac{dt}{t} \leq \int_{ah}^{bh} \frac{f(t)}{t} dt \leq (f(0) + \varepsilon) \int_{ah}^{bh} \frac{dt}{t}.$$

Or :

$$\int_{ah}^{bh} \frac{dt}{t} = [\ln t]_{ah}^{bh} = \ln(bh) - \ln(ah) = \ln \left(\frac{b}{a} \right).$$

Comme $\ln \left(\frac{b}{a} \right) > 0$, on obtient :

$$f(0) - \varepsilon \leq \frac{1}{\ln \left(\frac{b}{a} \right)} \int_{ah}^{bh} \frac{f(t)}{t} dt \leq f(0) + \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha' = \frac{\alpha}{b} > 0$ tel que pour tout $h \in [0, \alpha']$:

$$f(0) - \varepsilon \leq \frac{1}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \int_{ah}^{bh} \frac{f(t)}{t} dt \leq f(0) + \varepsilon.$$

Ceci prouve que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \int_{ah}^{bh} \frac{f(t)}{t} dt = f(0)$, soit :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_h^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = -f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right) = f(0) \ln\left(\frac{a}{b}\right).$$

Ainsi :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx \text{ converge et } \int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = f(0) \ln\left(\frac{a}{b}\right).}$$

k. L'intégrale $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$ est impropre en 0 et en 1.

Or, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t-1}{\ln t} = 0$ et $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t-1}{\ln t} = 1$, donc la fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}$ est continue sur $]0, 1[$ (quotient) et se prolonge par

continuité en 0 et 1. Ainsi, l'intégrale $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$ converge. Pour tout $x \in]0, 1[$, on a :

$$\int_0^x \frac{t-1}{\ln t} dt = \int_0^x \frac{t}{\ln t} dt - \int_0^x \frac{1}{\ln t} dt = \int_0^x \frac{1}{\ln(t^2)} (2t dt) - \int_0^x \frac{1}{\ln t} dt \underset{u=t^2}{=} \int_0^{x^2} \frac{1}{\ln u} du - \int_0^x \frac{1}{\ln t} dt$$

Donc :

$$\int_0^x \frac{t-1}{\ln t} dt = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt.$$

Pour tout $x \in]0, 1[$ et tout $t \in [x^2, x] \subset]0, 1[$, on a $t \ln t < 0$ et :

$$x^2 \leq t \leq x \Rightarrow \frac{x}{t \ln t} \leq \frac{t}{t \ln t} \leq \frac{x^2}{t \ln t} \Rightarrow \frac{x}{t \ln t} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{x^2}{t \ln t}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \int_{x^2}^x \frac{x^2}{t \ln t} dt &\leq \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln t} dt \leq \int_{x^2}^x \frac{x}{t \ln t} dt \Leftrightarrow \int_x^{x^2} \frac{x}{t \ln t} dt \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt \leq \int_x^{x^2} \frac{x^2}{t \ln t} dt \\ &\Leftrightarrow x \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t} \leq \int_0^x \frac{t-1}{\ln t} dt \leq x^2 \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t} \end{aligned}$$

Or :

$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t} = \left[\ln(\ln t) \right]_x^{x^2} = \ln(\ln x^2) - \ln(\ln x) = \ln(2 \ln x) - \ln(\ln x) = \ln 2 + \ln x - \ln x = \ln 2.$$

Et ainsi, pour tout $x \in]0, 1[$:

$$x \ln 2 \leq \int_0^x \frac{t-1}{\ln t} dt \leq x^2 \ln 2.$$

En passant à la limite quand x tend vers 1, on obtient :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt = \ln 2}$$

Exercice 3

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^3 + x^2}$ est définie et continue (car rationnelle) sur $[0, 1]$, donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t^3 + x^2}$ est défini et F est bien définie sur $D = \mathbb{R}_+^*$.

Quand $x \rightarrow +\infty$, on a $\frac{1}{t^3 + x^2} \sim \frac{1}{x^2}$ quel que soit $t \in [0, 1]$. Nous conjecturons alors que $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_0^1 \frac{dt}{x^2} = \frac{1}{x^2}$.

Pour prouver cela, il faut prouver que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 F(x) = 1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$x^2 F(x) - 1 = \int_0^1 \frac{dt}{t^3 + x^2} - 1 = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{t^3 + x^2} - 1 \right) dt = - \int_0^1 \frac{t^3}{t^3 + x^2} dt.$$

Et, pour tout $t \in [0, 1]$, $0 \leq \frac{t^3}{t^3 + x^2} \leq \frac{t^3}{x^2}$, donc :

$$|x^2 F(x) - 1| = \int_0^1 \frac{t^3}{t^3 + x^2} dt \leq \int_0^1 \frac{t^3}{x^2} dt = \frac{1}{x^2} \int_0^1 t^3 dt = \frac{1}{4x^2}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4x^2} = 0$, on a par le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 F(x) - 1) = 0$ et ainsi :

$$\boxed{F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}}$$

Remarquons que cet exercice n'est pas sur les intégrales généralisées, donc est un exercice de 1^{ère} année.

2) La fonction $t \mapsto \frac{1}{(\arctan t)^2}$ est définie et continue (inverse) sur $D = \mathbb{R}_+^*$, donc on peut l'intégrer entre x et 1 quel que soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et ainsi, F est bien définie sur $D = \mathbb{R}_+^*$.

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^2} - \frac{1}{(\arctan t)^2}$ est définie et continue (différence) sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{(\arctan t)^2} = \frac{(\arctan t)^2 - t^2}{t^2 (\arctan t)^2}.$$

Et :

$$\left. \begin{aligned} (\arctan t)^2 - t^2 &= \left(t - \frac{1}{3}t^3 + o_0(t^3) \right)^2 - t^2 \underset{0}{\sim} -\frac{2}{3}t^4 \\ t^2 (\arctan t)^2 &\underset{0}{\sim} t^4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\longrightarrow} -\frac{2}{3}.$$

On peut alors prolonger f par continuité en 0, et ainsi prolongée, f est continue sur le segment $[0, 1]$, donc peut y être intégrée. Ainsi, f est intégrable sur $]0, 1]$. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$F(x) = \int_x^1 \frac{dt}{(\arctan t)^2} = \int_x^1 \left(\frac{1}{t^2} - f(t) \right) dt = \int_x^1 \frac{dt}{t^2} - \int_x^1 f(t) dt = \frac{1}{x} - 1 - \int_x^1 f(t) dt.$$

Comme $x \mapsto -1 - \int_x^1 f(t) dt$ admet une limite finie en 0^+ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, on a :

$$\boxed{F(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}}$$

3) On a $t^2 e^{-t^2} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$, donc $e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge pour tout réel x . Ainsi, F est bien définie sur $D = \mathbb{R}$.

Pour tous $x, X \in \mathbb{R}_+^*$, on a, en intégrant par parties :

$$\int_x^X e^{-t^2} dt = \int_x^X \left(-\frac{1}{2t}\right) (-2t) e^{-t^2} dt = \left[\left(-\frac{1}{2t}\right) e^{-t^2} \right]_x^X - \int_x^X \frac{1}{2t^2} e^{-t^2} dt = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{e^{-X^2}}{2X} - \int_x^X \frac{1}{2t^2} e^{-t^2} dt$$

Comme $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge et $\frac{e^{-X^2}}{2X} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$, on peut passer à la limite dans la relation ci-dessus, ce qui donne :

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_x^{+\infty} \frac{1}{2t^2} e^{-t^2} dt.$$

On peut recommencer. Pour tous $x, X \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\int_x^X \frac{1}{2t^2} e^{-t^2} dt = \int_x^X \left(-\frac{1}{4t^3}\right) (-2t) e^{-t^2} dt = \left[-\frac{e^{-t^2}}{4t^3} \right]_x^X - \int_x^X \frac{3}{4t^4} e^{-t^2} dt = \frac{e^{-x^2}}{4x^3} - \frac{e^{-X^2}}{4X^3} - \frac{3}{4} \int_x^X \frac{e^{-t^2}}{t^4} dt.$$

Donc :

$$\int_x^{+\infty} \frac{1}{2t^2} e^{-t^2} dt = \frac{e^{-x^2}}{4x^3} - \frac{3}{4} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^4} dt.$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$F(x) = e^{x^2} \left(\frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{e^{-x^2}}{4x^3} + \frac{3}{4} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^4} dt \right) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{4x^3} + \frac{3}{4} e^{x^2} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^4} dt.$$

Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $t \geq x$, on a $0 < e^{-t^2} \leq e^{-x^2}$, donc :

$$0 \leq e^{x^2} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^4} dt \leq \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^4} = \frac{1}{3x^3} \Rightarrow -\frac{1}{4x^3} \leq F(x) - \frac{1}{2x} \leq 0 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Donc :

$$\boxed{F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}}$$

4) Pour tous $x, X \in \mathbb{R}_+^*$, on a, en intégrant par parties :

$$\int_x^X \frac{\cos t}{t} dt = \left[\frac{\sin t}{t} \right]_x^X + \int_x^X \frac{\sin t}{t^2} dt = \frac{\sin X}{X} - \frac{\sin x}{x} + \int_x^X \frac{\sin t}{t^2} dt.$$

Or, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sin t}{t} = 0$ et $\frac{\sin t}{t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc $\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$ converge et ainsi, $\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ converge.

La fonction F est donc bien définie sur $D = \mathbb{R}_+^*$.

Faisons intégration par parties. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\int_x^1 \frac{\cos t}{t} dt = [(\ln t)(\cos t)]_x^1 + \int_x^1 (\ln t)(\sin t) dt = -(\ln x)(\cos x) + \int_x^1 (\ln t)(\sin t) dt.$$

Or, $(\ln t)(\sin t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t \ln t$ donc $\lim_{t \rightarrow 0} (\ln t)(\sin t) = \lim_{t \rightarrow 0} t \ln t = 0$ et la fonction $t \mapsto (\ln t)(\sin t)$ peut être prolongée par continuité en 0, ce qui permet de conclure que $\int_0^1 (\ln t)(\sin t) dt$ converge.

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt = \int_x^1 \frac{\cos t}{t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt = -(\ln x)(\cos x) + \int_x^1 (\ln t)(\sin t) dt + \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow 0} [-(\ln x)(\cos x)] = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\int_x^1 (\ln t)(\sin t) dt + \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt \right] = \int_0^1 (\ln t)(\sin t) dt + \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$, donc :

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -(\ln x)(\cos x).$$

Enfin, comme $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, on a :

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln x$$

Exercice 4

1) Comme f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{x+1} f(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\int_x^{x+1} f(t) dt = \int_0^{x+1} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt$, donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\int_0^{x+1} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt \right] = \int_0^{+\infty} f(t) dt - \int_0^{+\infty} f(t) dt.$$

Soit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} f(t) dt = 0$$

2) Comme f est continue en 0, on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ et donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha \in]0, 1]$ tel que pour tout $t \in [0, \alpha]$, on a $|f(t) - f(0)| \leq \varepsilon$, d'où pour tout $x \in]0, \alpha]$:

$$\left| x \left(\int_x^\alpha \frac{f(t)}{t^2} dt - \int_x^\alpha \frac{f(0)}{t^2} dt \right) \right| = \left| x \int_x^\alpha \frac{f(t) - f(0)}{t^2} dt \right| \leq x \int_x^\alpha \frac{|f(t) - f(0)|}{t^2} dt \leq x \int_x^\alpha \frac{\varepsilon}{t^2} dt = \varepsilon \left(1 - \frac{x}{\alpha} \right) \leq \varepsilon.$$

Or, pour tout $x \in]0, \alpha]$:

$$\begin{aligned} x \int_x^1 \frac{f(t)}{t^2} dt - f(0) &= x \int_x^1 \frac{f(t)}{t^2} dt - x \int_x^1 \frac{f(0)}{t^2} dt + x \int_x^1 \frac{f(0)}{t^2} dt - f(0) \\ &= x \int_x^\alpha \frac{f(t)}{t^2} dt + x \int_\alpha^1 \frac{f(t)}{t^2} dt - x \int_x^\alpha \frac{f(0)}{t^2} dt - x \int_\alpha^1 \frac{f(0)}{t^2} dt + x \int_x^1 \frac{f(0)}{t^2} dt - f(0) \\ &= x \left(\int_x^\alpha \frac{f(t)}{t^2} dt - \int_x^\alpha \frac{f(0)}{t^2} dt \right) + x \left[\int_\alpha^1 \frac{f(t) - f(0)}{t^2} dt - f(0) \right] \end{aligned}$$

En posant $A = \int_{\alpha}^1 \frac{f(t) - f(0)}{t^2} dt - f(0)$ (qui est indépendant de x), on a $\lim_{x \rightarrow 0} Ax = 0$, donc il existe $\alpha' \in]0, 1]$ tel que pour tout $x \in [0, \alpha']$, on a $|Ax| \leq \varepsilon$.

Alors, pour tout $x \in]0, \alpha'']$ avec $\alpha'' = \min(\alpha, \alpha') \in]0, 1]$, on a :

$$\left| x \int_x^1 \frac{f(t)}{t^2} dt - f(0) \right| = \left| x \left(\int_x^{\alpha} \frac{f(t)}{t^2} dt - \int_x^{\alpha} \frac{f(0)}{t^2} dt \right) + Ax \right| \leq \left| x \left(\int_x^{\alpha} \frac{f(t)}{t^2} dt - \int_x^{\alpha} \frac{f(0)}{t^2} dt \right) \right| + |Ax| \leq 2\varepsilon.$$

Finalement, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha'' \in]0, 1]$ tel que pour tout $x \in]0, \alpha'']$, $\left| x \int_x^1 \frac{f(t)}{t^2} dt - f(0) \right| \leq 2\varepsilon$.

Ceci prouve que :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} x \int_x^1 \frac{f(t)}{t^2} dt = f(0)}$$

3) On a vu dans la question 1 que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt$.

On a aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{2x} f(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt$ et donc, pour $g(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\int_0^{2x} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt \right] = \int_0^{+\infty} f(t) dt - \int_0^{+\infty} f(t) dt = 0.$$

Or, f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\forall t \in [x, 2x], f(2x) \leq f(t) \leq f(x) \Rightarrow \int_x^{2x} f(2x) dt \leq g(x) \leq \int_x^{2x} f(x) dt.$$

Ceci donne pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$xf(2x) \leq g(x) \leq xf(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \leq xf(x) \\ 2xf(2x) \leq 2g(x) \end{cases}$$

En remplaçant x par $\frac{x}{2}$ dans la seconde inégalité, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$g(x) \leq xf(x) \leq 2g\left(\frac{x}{2}\right).$$

Et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2g\left(\frac{x}{2}\right) = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0}$$

4) Si f est nulle, alors u et v le sont aussi et le résultat est évident. On suppose f non nulle dans ce qui suit.

Posons $F(x) = \int_1^x f(t) dt$.

Comme f est continue sur $[1, +\infty[$, F est de classe C^1 sur cet intervalle.

De plus, comme f est positive sur $[1, +\infty[$, F est croissante et positive sur $[1, +\infty[$.

Enfin, $F(1) = 0$ et, comme f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = I$, avec $I > 0$ car f est non nulle.

Pour tout $x \in [1, +\infty[$, $u(x) = \frac{F(x)}{x^2}$ et $v(x) = \frac{f(x)}{x}$.

Donc, u et v sont positives, u est de classe C^1 et v est continue sur $[1, +\infty[$, en tant que quotients respectifs de fonctions qui le sont.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = I > 0$, on a $u(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{I}{x^2}$ est comme $x \mapsto \frac{I}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, u l'est aussi.

Pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a $F(x) = x^2 u(x)$, donc :

$$v(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{F'(x)}{x} = \frac{2xu(x) + x^2 u'(x)}{x} = 2u(x) + xu'(x).$$

Et, comme u est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$, on peut intégrer par parties :

$$\int_1^x t u'(t) dt = [t u(t)]_1^x - \int_1^x u(t) dt = x u(x) - u(1) - \int_1^x u(t) dt = \frac{F(x)}{x} - \int_1^x u(t) dt.$$

Alors :

$$\int_1^x v(t) dt = \int_1^x [2u(t) + t u'(t)] dt = 2 \int_1^x u(t) dt + \int_1^x t u'(t) dt = 2 \int_1^x u(t) dt + \frac{F(x)}{x} - \int_1^x u(t) dt = \int_1^x u(t) dt + \frac{F(x)}{x}.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = I$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$ et finalement, on a bien :

$$u \text{ et } v \text{ sont intégrables sur } [1, +\infty[\text{ et } \int_1^{+\infty} u = \int_1^{+\infty} v.$$

Exercice 5

1) Les solutions de l'équation homogène $(H): y' - y = 0$ associée à (E) sont les fonctions $x \mapsto ke^x$ avec k constante. Par la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière de la forme $x \mapsto k(x)e^x$ où k est ici une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$k'(x)e^x + k(x)e^x - k(x)e^x = \ln x \Leftrightarrow k'(x) = e^{-x} \ln x.$$

On peut prendre $k(x) = \int_1^x e^{-t} \ln t dt$ et une solution particulière est ainsi : $x \mapsto e^x \int_1^x e^{-t} \ln t dt$.

Finalement :

$$\text{Les solutions de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ sont les fonctions } x \mapsto e^x \left(k + \int_1^x e^{-t} \ln t dt \right) \text{ avec } k \text{ constante.}$$

2) On a $\lim_{t \rightarrow +\infty} (t^2 e^{-t} \ln t) = 0$, donc $e^{-t} \ln t = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et ainsi, $\int_1^{+\infty} e^{-t} \ln t dt$ converge.

On peut donc prendre les solutions de (E) sous la forme $f_a : x \mapsto e^x \left(a - \int_x^{+\infty} e^{-t} \ln t dt \right)$ où a est une constante.

On a alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(a - \int_x^{+\infty} e^{-t} \ln t dt \right) = a$, donc si $a \neq 0$, on a $f_a(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} ae^x$ et f_a n'est pas bornée.

La seule solution bornée éventuelle est donc $f_0 : x \mapsto -e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} \ln t dt$, que nous appellerons juste f pour simplifier.

On a $e^{-t} \ln t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln t$. Comme $\int_0^1 \ln t \, dt$ converge, donc $\int_0^1 e^{-t} \ln t \, dt$ converge aussi et f admet une limite finie en 0, donc est bornée au voisinage de 0. Ainsi, f est bornée si et seulement si elle l'est au voisinage de $+\infty$.

Pour tous $x, X \in \mathbb{R}_+^*$, on a en intégrant par parties :

$$\int_x^X e^{-t} \ln t \, dt = \left[-e^{-t} \ln t \right]_x^X + \int_x^X \frac{e^{-t}}{t} \, dt = e^{-X} \ln X - e^{-x} \ln x + \int_x^X \frac{e^{-t}}{t} \, dt.$$

Et quand $X \rightarrow +\infty$, on a $e^{-X} \ln X \rightarrow 0$, donc $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \, dt$ converge et on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-t} \ln t \, dt = e^{-x} \ln x + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \, dt.$$

En recommençant, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-t} \ln t \, dt = e^{-x} \ln x + \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} \, dt.$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) = -e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} \ln t \, dt = -\ln x - \frac{1}{x} + e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} \, dt.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $t \in [x, +\infty[$, on a :

$$\forall t \in [x, +\infty[, 0 < \frac{e^{-t}}{t^2} \leq \frac{e^{-x}}{t^2} \Rightarrow 0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} \, dt \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-x}}{t^2} \, dt = \frac{e^{-x}}{x} \Rightarrow 0 \leq e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} \, dt \leq \frac{1}{x}.$$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} \, dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} + e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} \, dt \right) = 0$$

Ceci implique que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et donc que f n'est pas bornée.

Finalement :

L'équation différentielle (E) n'admet pas de solution bornée.

Exercice 6

Ici, f^2 , $(f')^2$ et $(f'')^2$ sont toutes les trois continues sur $\mathbb{R}$.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$. On peut appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $|f|$ et $|f''|$ sur $[a, b]$, ce qui donne :

$$\left(\int_a^b |f'' f| \right)^2 \leq \left(\int_a^b |f|^2 \right) \left(\int_a^b |f''|^2 \right) \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f^2 \right) \left(\int_{\mathbb{R}} (f'')^2 \right) \quad (1).$$

Donc :

$f'' f$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, une intégration par parties donne pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b (f')^2 = [f' f]_a^b - \int_a^b f'' f \quad (2).$$

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\int_0^x (f')^2 = f'(x)f(x) - f'(0)f(0) - \int_0^x f''f.$$

Comme la fonction $(f')^2$ est positive, la fonction $x \mapsto \int_0^x (f')^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Si elle n'est pas majorée, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x (f')^2 = +\infty$. Or, $\int_0^x f''f$ admet une limite finie en $+\infty$ (car $f''f$ est intégrable sur $\mathbb{R}$), donc on a aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)f(x) = +\infty$.

Dans ce cas, il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in [a, +\infty[$, on a $2f'(x)f(x) \geq 1$, ce qui implique :

$$\int_a^x 2f'(t)f(t)dt \geq x - a \Leftrightarrow (f')^2(x) \geq x - a + (f')^2(a).$$

Et donc, pour tout $x \in [a, +\infty[$, $\int_a^x (f')^2 \geq \frac{1}{2}x^2 + \alpha x + \beta$ ce qui contredit la convergence de $\int_a^{+\infty} f'^2$.

Ainsi, $x \mapsto \int_0^x (f')^2$ non majorée mène à une absurdité, donc elle est majorée et, d'après le théorème de la limite monotone, elle admet une limite finie en $+\infty$, autrement dit :

$$\int_0^{+\infty} (f')^2 \text{ converge.}$$

Ceci prouve aussi que $f'f$ admet une limite finie L en $+\infty$, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in [A, +\infty[$, $|f'(x)f(x) - L| \leq \varepsilon$.

Alors, pour tout $x \in [A, +\infty[$:

$$(L - \varepsilon)(x - A) \leq \int_A^x f'(t)f(t)dt \leq (L + \varepsilon)(x - A) \Rightarrow 2(L - \varepsilon)x + C_- \leq f(x)^2 \leq 2(L + \varepsilon)x + C_+.$$

où C_- et C_+ sont des constantes.

- Si $L > 0$, alors avec $\varepsilon = \frac{L}{2} > 0$, on obtient pour tout $x \in [A, +\infty[$, $f(x)^2 \geq Lx + C_-$, ce qui contredit la convergence de $\int_A^{+\infty} f'^2$.
- Si $L < 0$, alors avec $\varepsilon = -\frac{L}{2} > 0$, on obtient pour tout $x \in [A, +\infty[$, $f(x)^2 \leq Lx + C_+$, et donc $f(x)^2 < 0$ pour x assez grand, ce qui est absurde.

Ainsi, $L \neq 0$ mène toujours à une absurdité, donc $L = 0$, soit :

$$\lim_{+\infty} f'f = 0.$$

En considérant la fonction $x \mapsto \int_x^0 (f')^2$ qui est décroissante sur $\mathbb{R}_-$, on montre de la même façon que $\int_{-\infty}^0 (f')^2$ converge et $\lim_{-\infty} f'f = 0$.

Finalement, $\int_{-\infty}^{+\infty} (f')^2$ converge et, comme $(f')^2$ est positive sur $\mathbb{R}$, ceci revient à :

$(f')^2 \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}.$

Alors, en faisant $a \rightarrow -\infty$ et $b \rightarrow +\infty$ dans (1) et (2), on obtient, avec $\lim_{-\infty} f' f = \lim_{+\infty} f' f = 0$:

$$\left(\int_{\mathbb{R}} f'' f\right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f^2\right) \left(\int_{\mathbb{R}} (f'')^2\right) \text{ et } \int_{\mathbb{R}} (f')^2 = -\int_{\mathbb{R}} f'' f.$$

Ceci donne immédiatement :

$$\boxed{\left(\int_{\mathbb{R}} (f')^2\right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f^2\right) \left(\int_{\mathbb{R}} (f'')^2\right)}$$

Exercice 7

1) Avec $f(x) = \ln x$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$R_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln k - \ln n.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall t \in [k, k+1], \ln k \leq \ln t \leq \ln(k+1) \Rightarrow \ln k \leq \int_k^{k+1} \ln t dt \leq \ln(k+1)$$

En sommant de $k=1$ à $k=n$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n \ln k \leq \int_1^{n+1} \ln t dt \leq \sum_{k=1}^n \ln(k+1) \Rightarrow \sum_{k=1}^n \ln k \leq \int_1^{n+1} \ln t dt \leq \sum_{k=2}^{n+1} \ln k \Rightarrow \sum_{k=1}^n \ln k \leq \int_1^{n+1} \ln t dt \leq \sum_{k=1}^{n+1} \ln k.$$

L'inégalité de droite reste vraie pour $n=0$ (soit $n+1=1$), ce qui nous permet d'écrire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^n \ln t dt \leq \sum_{k=1}^n \ln k \leq \int_1^{n+1} \ln t dt \leq \int_1^n \ln t dt + \int_n^{n+1} \ln t dt \leq \int_1^n \ln t dt + \ln(n+1).$$

Avec $\int_1^n \ln t dt = n \ln n - n + 1$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$n \ln n - n + 1 \leq \sum_{k=1}^n \ln k \leq n \ln n - n + 1 + \ln(n+1).$$

Et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$-1 + \frac{1}{n} \leq R_n(f) \leq -1 + \frac{1}{n} + \frac{\ln(n+1)}{n}.$$

Enfin, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{1}{n} + \frac{\ln(n+1)}{n}\right) = -1$, donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(f) = -1.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_x^1 \ln t dt = x - x \ln x - 1$, donc $\int_0^1 \ln t dt = -1$ et ainsi, on a :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(f) = \int_0^1 f(t) dt}$$

2) Remarquons que la fonction $-f$ vérifie les mêmes hypothèses que f sur $]0,1]$ (continuité, monotonie et $\lim_{x \rightarrow 0} x(-f(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} x f(x) = 0$). De plus, $R_n(-f) = -R_n(f)$ et $\int_0^1 (-f(t)) dt = -\int_0^1 f(t) dt$, donc, quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que f est croissante sur $]0,1]$.

Alors, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$ et $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$:

$$\forall t \in [k, k+1], f\left(\frac{k}{n}\right) \leq f\left(\frac{t}{n}\right) \leq f\left(\frac{k+1}{n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_k^{k+1} f\left(\frac{t}{n}\right) dt \leq f\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

En sommant de $k=1$ à $k=n-1$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_1^n f\left(\frac{t}{n}\right) dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \Rightarrow \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - f(1) \leq \int_1^n f\left(\frac{t}{n}\right) dt \leq \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right).$$

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$:

$$R_n(f) - \frac{f(1)}{n} \leq \frac{1}{n} \int_1^n f\left(\frac{t}{n}\right) dt \leq R_n(f) - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \int_1^n f\left(\frac{t}{n}\right) dt \leq R_n(f) \leq \frac{f(1)}{n} + \frac{1}{n} \int_1^n f\left(\frac{t}{n}\right) dt.$$

Or, en posant $u = \frac{t}{n}$, on obtient $\frac{1}{n} \int_1^n f\left(\frac{t}{n}\right) dt = \int_{1/n}^1 f(u) du$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$:

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{1/n}^1 f(u) du \leq R_n(f) \leq \frac{f(1)}{n} + \int_{1/n}^1 f(u) du.$$

Enfin, comme $\lim_{x \rightarrow 0} x f(x) = 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{1/n}^1 f(u) du \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(1)}{n} + \int_{1/n}^1 f(u) du \right] = \int_0^1 f(u) du.$$

Et à l'aide du théorème des gendarmes, on obtient immédiatement :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(f) = \int_0^1 f(u) du}$$

Exercice 8

1) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a $(|a| - |b|)^2 = |a|^2 - 2|a||b| + |b|^2 = a^2 + b^2 - 2|ab| \geq 0$, donc :

$$\boxed{|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)}$$

2) On a $L^2(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$ et la fonction nulle appartient à $L^2(I, \mathbb{R})$, donc $L^2(I, \mathbb{R})$ n'est pas vide.

Soient $f, g \in L^2(I, \mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. D'après la question 1, on a $|fg| \leq \frac{1}{2}(f^2 + g^2)$ et :

$$(\lambda f + \mu g)^2 = (|\lambda f + \mu g|)^2 \leq (|\lambda||f| + |\mu||g|)^2 = \lambda^2 f^2 + \mu^2 g^2 + 2|\lambda\mu||fg| \leq \lambda^2 f^2 + \mu^2 g^2 + |\lambda\mu|(f^2 + g^2).$$

Donc :

$$(\lambda f + \mu g)^2 \leq (\lambda^2 + |\lambda\mu|) f^2 + (\mu^2 + |\lambda\mu|) g^2.$$

Et, comme $\int_I f^2$ et $\int_I g^2$ convergent, $\int_I (\lambda f + \mu g)^2$ converge et $\lambda f + \mu g \in L^2(I, \mathbb{R})$.

Ainsi, $L^2(I, \mathbb{R})$ est stable par combinaisons linéaires, donc $L^2(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$, ce qui permet de conclure que :

$$\boxed{(L^2(I, \mathbb{R}), +, \cdot) \text{ est un } \mathbb{R} \text{-espace vectoriel.}}$$

3) Notons $E_2 = L^2(I, \mathbb{R}) \cap C^0(I, \mathbb{R})$ et $\varphi : (f, g) \mapsto \int_I fg$.

- Soient $f, g \in E_2$. On a vu que $|fg| \leq \frac{1}{2}(f^2 + g^2)$. Comme f^2 et g^2 sont intégrables sur I , $\frac{1}{2}(f^2 + g^2)$ l'est aussi, et par comparaison, fg est intégrable sur I . Donc, φ est bien définie sur E_2 et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- L'application φ est symétrique (car $fg = gf$) et bilinéaire (par linéarité de l'intégrale).

De plus, comme pour tout $f \in E_2$, $f^2 \geq 0$, on a $\varphi(f, f) = \int_I f^2 \geq 0$ par positivité de l'intégrale, avec $\varphi(f, f) = \int_I f^2 = 0$ si et seulement si $f^2 = 0$ (car f^2 est continue et positive), soit $f = 0$.

Ainsi :

L'application $(f, g) \mapsto \int_I f^2$ est un produit scalaire sur $L^2(I, \mathbb{R}) \cap C^0(I, \mathbb{R})$.

Remarquons alors que l'on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 9

1) Posons $g(t) = \frac{\sin t}{t}$ sur $\mathbb{R}^*$ et $g(0) = 1$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $g(t) = \frac{\sin t}{t} = \frac{1}{t} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n}$ et cette formule reste valable en $t = 0$.

Ainsi, g est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Il en va de même pour sa primitive qui s'annule en 0, soit $x \mapsto \int_0^x g(t) dt = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$.

Par ailleurs, les fonctions $t \mapsto \frac{1}{t}$ et $t \mapsto -\cos t$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, donc pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, une intégration par parties donne :

$$\int_x^y \frac{\sin t}{t} dt = \left[\frac{-\cos t}{t} \right]_x^y - \int_x^y \frac{\cos t}{t^2} dt = \frac{-\cos y}{y} + \frac{\cos x}{x} - \int_x^y \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

Or, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\left| \frac{\cos t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$ et $\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge, donc $\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ et comme $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\cos y}{y} = 0$, l'intégrale

$\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge et :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\cos x}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

Ainsi, $f(x)$ est défini pour tout réel $x > 0$ et $f(x) = \frac{\cos x}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$.

Ceci prouve aussi que $\int_0^{+\infty} g(t) dt$ converge avec :

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_x^{+\infty} g(t) dt = \int_0^{+\infty} g(t) dt - \int_0^x g(t) dt.$$

Comme $x \mapsto \int_0^x g(t) dt$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$:

f est bien définie et se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$.

2) Comme $t \mapsto t$ et f , prolongée en 0, sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ (avec $f' = -g$), on peut réaliser une intégration par parties qui donne pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t) dt &= [t f(t)]_0^x - \int_0^x t f'(t) dt = [t f(t)]_0^x + \int_0^x t g(t) dt \\ &= x f(x) + \int_0^x \sin t dt = x f(x) + 1 - \cos x \end{aligned}$$

Or, on a vu que pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \frac{\cos x}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$, donc :

$$\int_0^x f(t) dt = \cos x - x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt + 1 - \cos x = 1 - x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

Comme $t \mapsto \sin t$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut procéder à une nouvelle intégration par parties qui donne pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\int_x^y \frac{\cos t}{t^2} dt = \left[\frac{\sin t}{t^2} \right]_x^y - \int_x^y \left(-\frac{2 \sin t}{t^3} \right) dt = \frac{\sin y}{y^2} - \frac{\sin x}{x^2} + \int_x^y \frac{2}{t^3} \sin t dt.$$

Or, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\left| \frac{2}{t^3} \sin t \right| \leq \frac{2}{t^3}$ et $\int_x^{+\infty} \frac{2 dt}{t^3}$ converge, donc $\int_x^{+\infty} \frac{2}{t^3} \sin t dt$ est absolument convergente (donc convergente) et :

$$\left| \int_x^{+\infty} \frac{2}{t^3} \sin t dt \right| \leq \int_x^{+\infty} \left| \frac{2}{t^3} \sin t \right| dt \leq \int_x^{+\infty} \frac{2}{t^3} dt = \frac{1}{x^2}.$$

Avec $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\sin y}{y^2} = 0$, on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\int_0^x f(t) dt = 1 - x \left(-\frac{\sin x}{x^2} + \int_x^{+\infty} \frac{2}{t^3} \sin t dt \right) = 1 + \frac{\sin x}{x} - x \int_x^{+\infty} \frac{2}{t^3} \sin t dt.$$

Enfin, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ et $\left| x \int_x^{+\infty} \frac{2}{t^3} \sin t dt \right| \leq x \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \int_x^{+\infty} \frac{2}{t^3} \sin t dt = 0$ et ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = 1.$$

Ceci prouve que :

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt \text{ converge et vaut } 1.$$

Exercice 10

Posons pour tout $x \in [1, +\infty[$, $F(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt$ et $I = \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$.

Comme f est continue sur $[1, +\infty[$, la fonction F est de classe C^1 sur ce même intervalle, de dérivée f , et, comme $t \mapsto \frac{1}{t}$ est aussi de classe C^1 sur $[1, +\infty[$, on peut procéder à une intégration par parties, qui donne pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$\int_1^x \frac{f(t)}{t} dt = \int_1^x \frac{1}{t} F'(t) dt = \left[\frac{1}{t} F(t) \right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t^2} F(t) dt = \frac{F(x)}{x} + \int_1^x \frac{F(t)}{t^2} dt.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = I$. Il existe alors $A \in [1, +\infty[$ tel que pour tout $x \in [A, +\infty[$, $|I| - 1 \leq F(x) \leq |I| + 1$. Ainsi, F est bornée sur $[A, +\infty[$. De plus, F est continue sur le segment $[1, A]$, donc bornée sur $[1, A]$.

Ceci prouve que F est bornée sur $[1, +\infty[$.

Alors, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$ et $\frac{F(x)}{x^2} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Comme l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2} dt$ converge. Ainsi :

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt \text{ converge (et vaut } \int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2} dt \text{)}.$$

Exercice 11

1) Comme $0 < \cos t < 1$ et $0 < \sin t < 1$ pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, les fonctions $t \mapsto \ln(\cos t)$ et $t \mapsto \ln(\sin t)$ sont définies, continues et négatives sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. De plus :

- $t \mapsto \ln(\sin t)$ est continue en $\frac{\pi}{2}$ et $\ln(\sin t) = \ln\left(\frac{\sin t}{t}\right) + \ln t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln t$, et comme $\int_0^{\pi/2} \ln t dt$ converge, $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt$ converge ;
- $t \mapsto \ln(\cos t)$ est continue en 0 et pour tout $h \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\ln\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - h\right)\right] = \ln(\sin h)$ et on vient de voir que $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin h) dh$ converge, donc $\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) dt$ converge.

Ainsi, $t \mapsto \ln(\cos t)$ et $t \mapsto \ln(\sin t)$ sont de signe constant sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, et $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt$ et $\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) dt$ convergent, donc :

$$t \mapsto \ln(\cos t) \text{ et } t \mapsto \ln(\sin t) \text{ sont intégrables sur } \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\text{ et } I \text{ et } J \text{ sont bien définies.}$$

2) Remarquons que les changements de variable n'altère pas la convergence des intégrales. Donc, tous les changements de variable qui suivent ne créent pas d'intégrales divergentes.

En posant $u = \frac{\pi}{2} - t$ (avec $t \mapsto \frac{\pi}{2} - t$ de classe C^1 et bijective de $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ dans $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$), on a :

$$I = - \int_{\pi/2}^0 \ln \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} - u \right) \right) dt = \int_0^{\pi/2} \ln (\cos u) dt .$$

Ainsi :

$$I = J$$

3) On a :

$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^{\pi/2} \ln (\sin t) dt + \int_0^{\pi/2} \ln (\cos t) dt = \int_0^{\pi/2} [\ln (\sin t) + \ln (\cos t)] dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln (\sin t \cos t) dt = \int_0^{\pi/2} \ln \left(\frac{1}{2} \sin 2t \right) dt = \int_0^{\pi/2} [\ln (\sin 2t) - \ln 2] dt = \int_0^{\pi/2} \ln (\sin 2t) dt - \frac{\pi}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

En posant $u = 2t$ (avec $t \mapsto 2t$ de classe C^1 et bijective de $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ dans $] 0, \pi [$), on a :

$$\int_0^{\pi/2} \ln (\sin 2t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln (\sin u) du = \frac{1}{2} \left[\int_0^{\pi/2} \ln (\sin u) du + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln (\sin u) du \right] .$$

En posant $v = \pi - u$ (avec $u \mapsto \pi - u$ de classe C^1 et bijective de $\left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$ dans $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$), on a :

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \ln (\sin u) du = - \int_{\pi/2}^0 \ln (\sin (\pi - v)) dv = \int_{\pi/2}^{\pi} \ln (\sin v) dv .$$

Donc, $\int_{\pi/2}^{\pi} \ln (\sin u) du = \int_0^{\pi/2} \ln (\sin u) du$, ainsi $\int_0^{\pi/2} \ln (\sin 2t) dt = \int_0^{\pi/2} \ln (\sin u) du = I$ et finalement :

$$I + J = I - \frac{\pi}{2} \ln 2$$

On en déduit immédiatement que :

$$I = J = - \frac{\pi}{2} \ln 2$$