

Corrigés des TD du chapitre 12

Exercice 1

1) a. Pour tous $p, q \in \mathbb{N}^*$, p et $p-1$ sont deux entiers naturels consécutifs, donc l'un des deux est pair et $p(p-1)$ est un entier naturel pair et $\frac{p(p-1)}{2}$ est entier naturel.

Comme q est un entier naturel non nul, $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p(p-1)}{2} + q \geq q \geq 1$ est bien un entier naturel non nul, donc :

f est à images dans $\mathbb{N}^*$.

b. Supposons qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux, tels que $p \geq q \geq 1$ et $\frac{p(p-1)}{2} + q = 3$.

Comme $p \geq q \geq 1$, on a $0 \leq \frac{p(p-1)}{2} = 3 - q \leq 2$, ce qui donne trois possibilités :

- $\frac{p(p-1)}{2} = 0$, soit $p = 1$ et $q = 3 > p$: exclu (car $p \geq q$) ;
- $\frac{p(p-1)}{2} = 1$, soit $p^2 - p - 2 = 0$, qui donne $p = q = 2$: exclu (car p et q sont premiers entre eux) ;
- $\frac{p(p-1)}{2} = 2$, soit $p^2 - p - 4 = 0$: exclu (car cette équation n'admet pas de solution entière).

Finalement, toutes les possibilités sont exclues, donc :

3 n'a pas d'antécédent par f et ainsi, $f : \mathbb{Q}_1 \rightarrow \mathbb{N}^*$ n'est pas surjective.

c. i. On a $f(r) = f\left(\frac{p}{q}\right) = f(r') = f\left(\frac{p'}{q'}\right)$, soit :

$$\begin{aligned} \frac{p(p-1)}{2} + q = \frac{p'(p'-1)}{2} + q' &\Leftrightarrow p'(p'-1) - p(p-1) = 2q - 2q' \\ &\Leftrightarrow p'^2 - p^2 - (p' - p) = 2(q - q') \\ &\Leftrightarrow (p' + p)(p' - p) - (p' - p) = 2(q - q') \\ &\Leftrightarrow (p' - p)(p' + p - 1) = 2(q - q') \\ &\Rightarrow |p' - p||p' + p - 1| = 2|q - q'| = 2|q' - q| \end{aligned}$$

Et comme $p' \geq p \geq 1$, on a $|p' - p||p' + p - 1| = (p' - p)(p' + p - 1)$, donc :

$$(p' - p)(p' + p - 1) = 2|q' - q|$$

ii. On a $p \geq q \geq 1$ et $p' \geq q' \geq 1$, donc :

$$p + p' - 1 \geq q + q' - 1 > 0.$$

Et $(q + q' - 1)^2 - (q' - q)^2 = (2q - 1)(2q' - 1) > 0$, donc :

$$q + q' - 1 > |q' - q|.$$

Et ainsi :

$$p + p' - 1 > |q' - q|$$

On a alors $2|q' - q| < 2(p + p' - 1)$, donc avec $(p' - p)(p + p' - 1) = 2|q' - q|$, on a :

$$(p' - p)(p + p' - 1) < 2(p + p' - 1).$$

Or, $p + p' - 1 \geq 1 > 0$, donc :

$$p' - p < 2$$

iii. Par hypothèse, p et p' sont deux entiers, donc $p' - p < 2$ se récrit $p' - p \leq 1$ et $p' \geq p$. Alors :

$$0 \leq p' - p \leq 1 \Leftrightarrow p' - p = 0 \text{ ou } 1.$$

Si $p' - p = 1$, alors $p' = p + 1$ et la relation $(p' - p)(p' + p - 1) = 2(q - q')$ se simplifie en $p = q - q'$.

Or, $q' > 0$ et donc $p = q - q'$ implique $p < q$, qui est contradictoire. Ainsi, $p' - p \neq 1$, donc $p' - p = 0$, soit $p' = p$ et $(p' - p)(p' + p - 1) = 2(q - q')$ donc aussi $q' = q$.

Ainsi, on a $p' = p$ et $q' = q$, soit :

$$r' = r$$

Nous venons de prouver que si $f(r) = f(r')$, alors $r' = r$, autrement dit que :

$$f \text{ est injective.}$$

d. Soit $\tilde{f} : \mathbb{Q}_1 \rightarrow f(\mathbb{Q}_1); r \mapsto f(r)$. Comme f est injective, $\tilde{f}$ l'est aussi. De plus, $\tilde{f}$ est surjective par construction, donc $\tilde{f}$ est bijective. Or, on a vu que $f(\mathbb{Q}_1) \subset \mathbb{N}^*$, donc $f(\mathbb{Q}_1)$ est finie ou dénombrable.

Or, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $f\left(\frac{p}{1}\right) = \frac{p(p-1)}{2} + 1 \in f(\mathbb{Q}_1)$ et $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{p(p-1)}{2} = +\infty$, donc $f(\mathbb{Q}_1)$ est infini et ainsi, $f(\mathbb{Q}_1)$ est dénombrable. Comme $\mathbb{Q}_1$ et $f(\mathbb{Q}_1)$ sont en bijection :

$$\mathbb{Q}_1 \text{ est dénombrable.}$$

e. Posons $\mathbb{Q}_2 = \mathbb{Q} \cap]0, 1]$. L'application inverse est alors une bijection de $\mathbb{Q}_1$ dans $\mathbb{Q}_2$, donc $\mathbb{Q}_2$ est dénombrable. Alors, $\mathbb{Q}_1 \cup \mathbb{Q}_2 = \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+^*$ est dénombrable.

Or, l'application $x \mapsto -x$ est une bijection de $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_-^*$, donc $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_-^*$ est dénombrable.

Ainsi, $\mathbb{Q}^* = (\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_-^*) \cup (\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+^*)$ est dénombrable, et rajouter un élément (ici 0) ne change pas le caractère dénombrable d'un ensemble, donc :

$\mathbb{Q}$ est dénombrable.

2) a. Remarquons préalablement que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $10^n x - 1 < d_n(x) = \lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x$, donc :

$$x - \frac{1}{10^n} < \frac{d_n(x)}{10^n} \leq x.$$

Le théorème des gendarmes permet alors de conclure que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d_n(x)}{10^n} = x.$$

Remarquons de plus que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$10^n \lfloor x \rfloor \leq 10^n x < 10^n (\lfloor x \rfloor + 1) \Rightarrow 10^n \lfloor x \rfloor \leq d_n(x) < 10^n (\lfloor x \rfloor + 1)$$

Or, $10^{n+1} \lfloor x \rfloor - 10^n (\lfloor x \rfloor + 1) = 10^n (9 \lfloor x \rfloor - 1) > 0$ car $\lfloor x \rfloor \geq 1$. Donc :

$$d_n(x) < 10^n (\lfloor x \rfloor + 1) < 10^{n+1} \lfloor x \rfloor \leq d_{n+1}(x).$$

La suite $(d_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante avec $d_0(x) = \lfloor x \rfloor \geq 1$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $g(x) = g(y)$. On a alors :

$$\{d_n(x), n \in \mathbb{N}\} = \{d_n(y), n \in \mathbb{N}\}.$$

Avec la stricte croissance des suites $(d_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(d_n(y))_{n \in \mathbb{N}}$, ceci implique que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, d_n(x) = d_n(y).$$

Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d_n(x)}{10^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d_n(y)}{10^n} \Leftrightarrow x = y.$$

Ainsi, $g(x) = g(y)$ implique $x = y$, donc :

g est injective.

b. Soit $\tilde{g} : [1, +\infty[\rightarrow g([1, +\infty[); x \mapsto g(x)$. Comme g est injective, $\tilde{g}$ l'est aussi. De plus, $\tilde{g}$ est surjective par construction, donc $\tilde{g}$ est bijective. Alors, comme $[1, +\infty[$ n'est pas dénombrable, $g([1, +\infty[)$ ne l'est pas non plus. Or, $g([1, +\infty[) \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$, donc si $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ était dénombrable, $g([1, +\infty[)$ le serait aussi, ce qui est faux. Ainsi :

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

Exercice 2

1) Toute tribu de E contenant A , contient aussi E , $\bar{A}$ et $\emptyset$.

Si on pose $\mathcal{T} = \{\emptyset, A, \bar{A}, E\}$, on a $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(E)$, $E \in \mathcal{T}$, $E \setminus \emptyset = E$, $E \setminus A = \bar{A}$, $E \setminus \bar{A} = A$, $E \setminus E = \emptyset$ appartiennent à $\mathcal{T}$ et toute union d'éléments de $\mathcal{T}$ est encore dans $\mathcal{T}$.

Ainsi, $\mathcal{T}$ est une tribu de E contenant A , et $\mathcal{T}$ est inclus dans toute tribu de E contenant A . Ainsi :

La plus petite tribu de E contenant A est $\mathcal{T} = \{\emptyset, A, \bar{A}, E\}$.

2) Posons $\mathcal{A} = \{A \subset E \setminus A \text{ ou } \bar{A} \text{ est fini ou dénombrable}\}$.

- On a $\bar{E} = \emptyset$ est fini, donc $E \in \mathcal{A}$.
- Soit $A \in \mathcal{A}$. Alors, A ou $\bar{A}$ est fini ou dénombrable, et c'est aussi le cas de $\bar{A}$ et $\bar{\bar{A}} = A$. Donc, $\bar{A} \in \mathcal{A}$.
- Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$. Si $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, on a :

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \notin A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \setminus x \notin A_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \setminus x \in \bar{A}_n \Leftrightarrow x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{A}_n.$$

Ainsi, $\bar{A} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{A}_n$ et donc $\bar{A} \subset \bar{A}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\bar{A}_n$ est fini ou dénombrable, on a $\bar{A}$ est fini ou dénombrable (car inclus dans $\bar{A}_n$).

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\bar{A}_n$ n'est ni fini, ni dénombrable, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n est fini ou dénombrable (car les A_n sont tous dans $\mathcal{A}$). Dans ce cas, A est une réunion dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables, donc est fini ou dénombrable.

Ainsi, soit A , soit $\bar{A}$ est fini ou dénombrable, donc $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Tout ceci prouve que :

$\mathcal{A} = \{A \subset E \setminus A \text{ ou } \bar{A} \text{ est fini ou dénombrable}\}$ est une tribu de E .

3) Posons $\mathcal{A}' = \{A \subset E \setminus A \text{ ou } \bar{A} \text{ est fini}\}$. On a encore :

- On a $\bar{E} = \emptyset$ est fini, donc $E \in \mathcal{A}'$.
- Si $A \in \mathcal{A}'$, alors, A ou $\bar{A}$ est fini, et c'est aussi le cas de $\bar{A}$ et $\bar{\bar{A}} = A$. Donc, $\bar{A} \in \mathcal{A}'$.
- Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}'$ et $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

On peut refaire le raisonnement de la question précédente jusqu'à un certain point.

S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\bar{A}_n$ est fini, on a $\bar{A}$ est fini (car c'est une partie de $\bar{A}_n$).

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\bar{A}_n$ n'est pas fini, leur intersection $\bar{A}$ peut être infinie (*exemple* : $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[0, 1 + \frac{1}{n+1}\right]$) et

tous les A_n sont finis (car ils sont tous dans $\mathcal{A}'$). Or, la réunion des A_n n'est pas forcément finie (*exemple* : $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\}$) et ainsi, $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ n'appartient pas forcément à $\mathcal{A}'$.

Finalement :

$\mathcal{A}' = \{A \subset E \setminus A \text{ ou } \bar{A} \text{ est fini}\}$ n'est pas forcément une tribu de E .

Exercice 3

1) Appelons A l'évènement « la pièce a donné pile » et $B_k =$ « on obtient une boule blanche au $k^{\text{ième}}$ tirage ».

Si on a tiré pile (*resp.* face), il y a dans l'urne k boules blanches (*resp.* noires) et 1 boule noire (*resp.* blanche) juste avant le $k^{\text{ième}}$ tirage.

On cherche $P(B_k)$. La loi des probabilités totales donne alors :

$$P(B_k) = P(A)P_A(B_k) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B_k) = \frac{1}{2} \frac{k}{k+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi :

La probabilité de tirer une boule blanche au $k^{\text{ième}}$ tirage est $\frac{1}{2}$.

2) On cherche $P_{B_k}(A)$. La formule de Bayes donne alors :

$$P_{B_k}(A) = \frac{P(A)P_A(B_k)}{P(B_k)} = \frac{\frac{1}{2} \frac{k}{k+1}}{\frac{1}{2}} = \frac{k}{k+1}.$$

Ainsi :

La probabilité p_k d'avoir obtenu pile, sachant qu'on a tiré une boule blanche au $k^{\text{ième}}$ tirage est $\frac{k}{k+1}$.

3) On cherche $P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_k)$. La loi des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} P(B_1 \cap \dots \cap B_k) &= P(A)P_A(B_1 \cap \dots \cap B_k) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B_1 \cap \dots \cap B_k) \\ &= \frac{1}{2}P_A(B_1 \cap \dots \cap B_k) + \frac{1}{2}P_{\bar{A}}(B_1 \cap \dots \cap B_k) \end{aligned}$$

Et, avec la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P_A(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_k) &= P_A(B_1)P_{A \cap B_1}(B_2)P_{A \cap B_1 \cap B_2}(B_3) \dots P_{A \cap B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{k-1}}(B_k) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{k}{k+1} = \frac{1}{k+1} \\ P_{\bar{A}}(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_k) &= P_{\bar{A}}(B_1)P_{\bar{A} \cap B_1}(B_2)P_{\bar{A} \cap B_1 \cap B_2}(B_3) \dots P_{\bar{A} \cap B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{k-1}}(B_k) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \dots \times \frac{1}{k+1} = \frac{1}{(k+1)!} \end{aligned}$$

Ainsi :

La probabilité d'obtenir k boules blanches lors des k premiers tirages est $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)!} \right)$.

Exercice 4

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, définissons les évènements :

- $A_n =$ « Alfred l'emporte lors du tir numéro $2n+1$ » ;
- $B_n =$ « Barnabé l'emporte lors du tir numéro $2n+2$ ».

Pour que A_n soit réalisé, il faut que les deux archers ne touchent pas la cible lors des $2n$ premiers essais (Alfred rate n fois et Barnabé aussi) et qu'Alfred l'atteigne au $(2n+1)^{ième}$ tir.

La probabilité qu'Alfred rate la cible est $1-p_1$ et la probabilité que Barnabé rate la cible est $1-p_2$. Les tirs étant indépendants, on a :

$$P(A_n) = (1-p_1)^n (1-p_2)^n p_1$$

Pour que B_n soit réalisé, il faut que les deux archers ne touchent pas la cible lors des $2n+1$ premiers essais (Alfred rate $n+1$ et Barnabé rate n fois) et qu'Alfred l'atteigne au $(2n+1)^{ième}$ tir.

Comme ci-dessus, on a alors :

$$P(B_n) = (1-p_1)^{n+1} (1-p_2)^n p_2$$

2) Notons A (*resp.* B) l'évènement Alfred gagne (*resp.* Barnabé gagne).

On a $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ et cette union est disjointe, donc :

$$P(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (1-p_1)^n (1-p_2)^n p_1 = p_1 \sum_{n \in \mathbb{N}} [(1-p_1)(1-p_2)]^n.$$

Comme $p_1 \in]0,1[$ et $p_2 \in]0,1[$, on a $(1-p_1)(1-p_2) \in]0,1[$, donc la série géométrique ci-dessus converge bien et :

$$P(A) = p_1 \frac{1}{1-(1-p_1)(1-p_2)} = \frac{p_1}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}.$$

De la même façon :

$$P(B) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(B_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (1-p_1)^{n+1} (1-p_2)^n p_2 = (1-p_1)p_2 \sum_{n \in \mathbb{N}} [(1-p_1)(1-p_2)]^n = \frac{p_2 - p_1 p_2}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}.$$

Ainsi :

$$\text{La probabilité pour qu'Alfred (resp. Barnabé) gagne est } \frac{p_1}{p_1 + p_2 - p_1 p_2} \text{ (resp. } \frac{p_2 - p_1 p_2}{p_1 + p_2 - p_1 p_2} \text{).}$$

3) Si C est l'évènement « le jeu ne se termine jamais », alors (A, B, C) est un système complet d'évènements (deux de ces évènements ne peuvent être réalisés en même temps et l'un ou l'autre est réalisé car le jeu s'arrête quand Alfred ou Barnabé gagne). Alors :

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1.$$

Or, $P(A) + P(B) = \frac{p_1}{p_1 + p_2 - p_1 p_2} + \frac{p_2 - p_1 p_2}{p_1 + p_2 - p_1 p_2} = 1$, donc $P(C) = 0$ et ainsi :

La probabilité pour que le jeu ne se termine jamais est nulle.

4) Le jeu est équitable si et seulement si Alfred et Barnabé ont les mêmes chances de gagner, autrement dit si et seulement si $P(A) = P(B)$.

Or, on a :

$$P(A) = P(B) \Leftrightarrow \frac{p_1}{p_1 + p_2 - p_1 p_2} = \frac{p_2 - p_1 p_2}{p_1 + p_2 - p_1 p_2} \Leftrightarrow p_1 = p_2 - p_1 p_2 \Leftrightarrow p_2 = \frac{p_1}{1 - p_1}.$$

Ainsi :

Le jeu est équitable si et seulement si $p_2 = \frac{p_1}{1 - p_1}$.

On a $\frac{p_1}{1 - p_1} = \frac{1}{1 - p_1} - 1$. Comme $p_1 \in]0, 1[$, si $p_1 > 0,5$, on a alors :

$$\frac{1}{2} < p_1 < 1 \Leftrightarrow 0 < 1 - p_1 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{1 - p_1} - 1 > 1.$$

Donc la CNS énoncée ci-dessus ne peut être remplie. De plus :

$$\frac{p_1}{1 - p_1} = \frac{1}{1 - p_1} - 1 > 1 \Rightarrow \frac{p_1}{1 - p_1} > p_2 \Leftrightarrow p_1 > p_2(1 - p_1) \Leftrightarrow P(A) > P(B).$$

Ainsi :

Si $p_1 > 0,5$, le jeu est en faveur d'Alfred.

Si Barnabé commence, il faut changer les événements définis dans la question 1 en :

- $A_n = \text{« Alfred l'emporte lors du tir numéro } 2n + 2 \text{ »}$;
- $B_n = \text{« Barnabé l'emporte lors du tir numéro } 2n + 1 \text{ »}$.

Avec le même raisonnement, on obtient $P(A_n) = (1 - p_1)^n (1 - p_2)^{n+1} p_1$ et $P(B_n) = (1 - p_1)^n (1 - p_2)^n p_2$, puis :

$$P(A) = \frac{p_1(1 - p_2)}{p_1 + p_2 - p_1 p_2} \text{ et } P(B) = \frac{p_2}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}.$$

Et enfin :

$$P(A) - P(B) = \frac{p_1(1 - p_2) - p_2}{p_1 + p_2 - p_1 p_2} = \frac{p_1 + 1}{p_1 + p_2 - p_1 p_2} \left(\frac{p_1}{p_1 + 1} - p_2 \right) < 0 \Leftrightarrow p_2 > \frac{p_1}{p_1 + 1}.$$

Et $\frac{1}{2} < p_1 < 1$ revient à $\frac{1}{3} < \frac{p_1}{p_1 + 1} < \frac{1}{2}$. Donc $p_2 > \frac{p_1}{p_1 + 1}$ est possible et ainsi :

Si $p_1 > 0,5$ et Barnabé commence, il peut gagner quand $p_2 > \frac{p_1}{p_1 + 1}$.

Exercice 5

1) On a $E_n = \text{« on utilise A pour la première fois lors du } n^{\text{ième}} \text{ lancer »}$.

Si $n = 1$, il faut juste choisir A initialement, donc $P(E_1) = \frac{1}{2}$.

On suppose maintenant que $n \geq 2$.

Pour que E_n se réalise, il faut que l'on ait choisi B initialement (probabilité $\frac{1}{2}$) et, s'il y a lieu ($n \geq 3$), obtenu pile aux $n-2$ premiers lancers (tous réalisés avec B) et face au $(n-1)^{ième}$ lancer (lui aussi réalisés avec B).

Avec la pièce B , la probabilité d'obtenir pile est b (donc $1-b$ pour face).

Les lancers étant indépendants, on obtient finalement :

$$P(E_n) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pour } n = 1 \\ \frac{1}{2} b^{n-2} (1-b) & \text{pour } n \geq 2 \end{cases}$$

Notons A_i l'évènement : « on choisit A initialement ». La loi des probabilités totales donne alors :

$$P(V_n) = P(A_i)P_{A_i}(V_n) + P(\overline{A_i})P_{\overline{A_i}}(V_n) = \frac{1}{2}P_{A_i}(V_n) + \frac{1}{2}P_{\overline{A_i}}(V_n).$$

Si on a choisi A initialement, alors pour obtenir n piles lors des n premiers lancers, il ne faut pas changer de pièce, et donc, obtenir n piles avec la pièce A (probabilité a à chaque lancer, indépendant des autres). Donc :

$$P_{A_i}(V_n) = a^n.$$

De la même façon, on a :

$$P_{\overline{A_i}}(V_n) = b^n.$$

Et donc :

$$P(V_n) = \frac{1}{2}(a^n + b^n)$$

2) Les E_n sont deux à deux disjoints, donc :

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} P(E_n) = \frac{1}{2} + \sum_{n \geq 2} \frac{1}{2} b^{n-2} (1-b) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (1-b) \sum_{n \geq 2} b^{n-2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (1-b) \sum_{n \geq 0} b^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (1-b) \frac{1}{1-b}.$$

Donc :

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E_n\right) = 1$$

On a V_n = « on a obtenu n piles lors des n premiers lancers », donc :

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= \text{« on a obtenu } n+1 \text{ piles lors des } n+1 \text{ premiers lancers »} \\ &= \text{« on a obtenu } n \text{ piles lors des } n \text{ premiers lancers } \underline{et} \text{ au } (n+1)^{ième} \text{ lancer »} \end{aligned}$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $V_{n+1} \subset V_n$. On a alors :

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} V_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(V_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}(a^n + b^n).$$

Et comme $a, b \in]0, 1[$, on obtient :

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} V_n\right) = 0$$

Exercice 6

Notons A_n l'évènement : « la personne n° n reçoit l'information initiale ». On a donc $p_n = P(A_n)$.

Par la loi des probabilités totales, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\bar{A}_n)P_{\bar{A}_n}(A_{n+1}) = p_n p + (1 - p_n)(1 - p).$$

Soit :

$$p_{n+1} = (2p - 1)p_n + 1 - p$$

La suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est arithmético-géométrique. On a :

$$x = (2p - 1)x + 1 - p \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

La suite $(p_n - \frac{1}{2})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $2p - 1$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$p_n - \frac{1}{2} = (2p - 1)^{n-1} \left(p_1 - \frac{1}{2} \right).$$

Or, $p_1 = P(A_1) = 1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$p_n = \frac{1}{2} [1 + (2p - 1)^{n-1}]$$

On a $p \in]0, 1[$, donc $2p - 1 \in]-1, 1[$ et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{2}$$

Exercice 7

1) Notons P_n (resp. Q_n , resp. R_n) l'évènement : « la puce est en P (resp. Q , resp. R) au temps n ».

On a donc $p_n = P(P_n)$, $q_n = P(Q_n)$ et $r_n = P(R_n)$. La loi des probabilités totales donne pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} p_{n+1} = P(P_{n+1}) = P(P_n)P_{P_n}(P_{n+1}) + P(Q_n)P_{Q_n}(P_{n+1}) + P(R_n)P_{R_n}(P_{n+1}) = \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{2}r_n \\ q_{n+1} = P(Q_{n+1}) = P(P_n)P_{P_n}(Q_{n+1}) + P(Q_n)P_{Q_n}(Q_{n+1}) + P(R_n)P_{R_n}(Q_{n+1}) = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}r_n \\ r_{n+1} = P(R_{n+1}) = P(P_n)P_{P_n}(R_{n+1}) + P(Q_n)P_{Q_n}(R_{n+1}) + P(R_n)P_{R_n}(R_{n+1}) = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}q_n \end{cases}$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_{n+1} = AX_n \text{ avec } A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) On a $2A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $(2A + I_3)^2 = 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3(2A + I_3)$, ce qui donne $4A^2 = 2A + 2I_3$, soit :

$$2A^2 = A + I_3$$

Comme $\deg((X + \frac{1}{2})(X - 1)) = 2$, la division euclidienne de X^n par $(X + \frac{1}{2})(X - 1)$ s'écrit pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X^n = (X + \frac{1}{2})(X - 1)Q_n + \alpha_n X + \beta_n \text{ avec } (\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2.$$

En évaluant en 1 et $-\frac{1}{2}$, on obtient :

$$\begin{cases} \alpha_n + \beta_n = 1 \\ -\frac{1}{2}\alpha_n + \beta_n = (-\frac{1}{2})^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_n = \frac{2}{3} \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right] \\ \beta_n = \frac{1}{3} \left[1 + 2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right] \end{cases}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

Le reste de la division euclidienne de X^n par $(X + \frac{1}{2})(X - 1)$ est $\frac{2}{3} \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right] X + \frac{1}{3} \left[1 + 2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right]$.

On a $P = 2(X + \frac{1}{2})(X - 1) = 2X^2 - X - 1$, donc $P(A) = 0_3$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = \frac{1}{2} P(A) Q_n(A) + \alpha_n A + \beta_n I_3 = \alpha_n A + \beta_n I_3.$$

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = \frac{2}{3} \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right] A + \frac{1}{3} \left[1 + 2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right] I_3$$

3) Comme $P(A) = 0_3$ avec $P = 2(X + \frac{1}{2})(X - 1)$, on a $Sp(A) \subset \left\{ -\frac{1}{2}, 1 \right\}$.

Cherchons les éventuels vecteurs propres.

D'une part :

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\begin{aligned} E_{-\frac{1}{2}} &= \ker\left(A + \frac{1}{2}I_3\right) = \text{Vect}(e_1, e_2) \text{ avec } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ E_1 &= \ker(A - I_3) = \text{Vect}(e_3) \text{ avec } e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}}$$

Comme on est en dimension 3 et $\dim E_{-\frac{1}{2}} + \dim E_1 = 3$, A est diagonalisable et on a :

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}AP \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{A^n = P \begin{pmatrix} (-\frac{1}{2})^n & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Et, en faisant le calcul, on retrouve bien le résultat de la question précédente, soit :

$$\boxed{A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2(-\frac{1}{2})^n & 1-(-\frac{1}{2})^n & 1-(-\frac{1}{2})^n \\ 1-(-\frac{1}{2})^n & 1+2(-\frac{1}{2})^n & 1-(-\frac{1}{2})^n \\ 1-(-\frac{1}{2})^n & 1-(-\frac{1}{2})^n & 1+2(-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}}$$

4) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$ et :

- $X_0 = I_3 X_0 = A^0 X_0$.
- Si $X_n = A^n X_0$, alors $X_{n+1} = AX_n = AA^n X_0 = A^{n+1} X_0$.

Ceci prouve par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$, soit :

$$X_n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} p_0 + q_0 + r_0 \\ p_0 + q_0 + r_0 \\ p_0 + q_0 + r_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2p_0 - q_0 - r_0 \\ -p_0 + 2q_0 + r_0 \\ -p_0 - q_0 + 2r_0 \end{pmatrix}.$$

Enfin, $p_0 + q_0 + r_0 = 1$, donc :

$$X_n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2p_0 - q_0 - r_0 \\ -p_0 + 2q_0 + r_0 \\ -p_0 - q_0 + 2r_0 \end{pmatrix}.$$

Et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$, on obtient :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ qui ne dépend pas de } X_0.}$$

Exercice 8

1) Posons $B_n = \bigcup_{k \geq n} A_k$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $B_n = A_n \cup B_{n+1}$, donc $B_{n+1} \subset B_n$ et par continuité décroissante, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right).$$

Ceci donne immédiatement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) = P(A)$$

2) a. Comme la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$ converge, la série $\sum_{k \geq n} P(A_k)$ converge aussi et par sous additivité, on a :

$$0 \leq P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k).$$

Or, pour $n \geq 1$, $\sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k)$ est le reste d'ordre $n-1$ de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k) = 0$. Alors, d'après la première question et le théorème des gendarmes, on a :

$$P(A) = 0$$

b. L'issue ω appartient à une infinité de A_n s'il existe une suite extraite $(A_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\omega \in A_{\varphi(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, autrement dit, telle que $\omega \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{\varphi(n)}$.

Or, φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$, ce qui implique que $A_{\varphi(n)} \subset \bigcup_{k \geq n} A_k$. Alors, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{\varphi(n)} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) = A$ et donc :

$$0 \leq P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{\varphi(n)}\right) \leq P(A) = 0.$$

Ainsi, $P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{\varphi(n)}\right) = 0$ et donc :

La probabilité que ω appartienne à une infinité de A_n est nulle.

3) a. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq m$.

Comme les A_n sont mutuellement indépendants, les $\bar{A}_n$ le sont aussi, donc :

$$P\left(\bigcap_{n \leq k \leq m} \bar{A}_k\right) = \prod_{n \leq k \leq m} P(\bar{A}_k) = \prod_{n \leq k \leq m} [1 - P(A_k)].$$

Or, pour tout réel x , on a $1 + x \leq e^x$, donc avec $x = -P(A_k)$, on obtient $1 - P(A_k) \leq e^{-P(A_k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Avec $1 - P(A_k) \geq 0$, on a alors :

$$P\left(\bigcap_{n \leq k \leq m} \bar{A}_k\right) = \prod_{n \leq k \leq m} [1 - P(A_k)] \leq \prod_{n \leq k \leq m} e^{-P(A_k)}.$$

Soit :

$$P\left(\bigcap_{n \leq k \leq m} \bar{A}_k\right) \leq e^{-\sum_{n \leq k \leq m} P(A_k)}$$

b. On a :

$$\bar{A} = \overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{k \geq n} A_k \right)} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\overline{\bigcup_{k \geq n} A_k} \right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{k \geq n} \bar{A}_k \right).$$

Si on pose $C_n = \bigcap_{k \geq n} \bar{A}_k$, alors on a $C_n = \bar{A}_n \cap C_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $C_n \subset C_{n+1}$ et par continuité croissante, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(C_n) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{k \geq n} \bar{A}_k\right)\right) = P(\bar{A}).$$

Comme la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$ diverge (avec $P(A_n) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^m P(A_k) = +\infty \Rightarrow \lim_{m \rightarrow +\infty} e^{-\sum_{n \leq k \leq m} P(A_k)} = 0.$$

Avec la question a, ceci implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{n \leq k \leq m} \bar{A}_k\right) = 0 \Leftrightarrow P(C_n) = P\left(\bigcap_{k \geq n} \bar{A}_k\right) = 0.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(C_n) = P(\bar{A})$, on a immédiatement $P(\bar{A}) = 0$, soit :

$$P(A) = 1$$

Exercice 9

1) On a :

$$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) = p_n P_{A_n}(A_{n+1}).$$

Si l'évènement A_n est réalisé, on n'a obtenu que des boules blanches au cours des n premiers tirages et donc ajouté a boules blanches après chacun des n tirages, donc an boules blanches en tout et, à l'issue du $n^{\text{ième}}$ tirage, il y a dans l'urne $2b + an$ boules, donc $b + an$ blanches. Les boules étant équiprobables, la probabilité de tirer une boule blanche au $n^{\text{ième}}$ tirage $P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{b + an}{2b + an}$ et ainsi, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$p_{n+1} = \frac{b + an}{2b + an} p_n$$

2) On a $p_1 = \frac{b}{2b} = \frac{1}{2}$ et pour être compatible avec la formule ci-dessus, on peut poser $p_0 = 1$.

Alors $p_0 > 0$ et si $p_n > 0$, alors $p_{n+1} = \frac{b + an}{2b + an} p_n > 0$ (car $b > 0$). Ceci prouve par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n > 0$. On peut alors poser pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \ln\left(\frac{p_{n+1}}{p_n}\right)$.

D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} u_n &= \ln\left(\frac{p_{n+1}}{p_n}\right) = \ln\left(\frac{b + an}{2b + an}\right) = \ln(b + an) - \ln(2b + an) = \ln\left(1 + \frac{b}{an}\right) + \ln(an) - \ln\left(1 + \frac{2b}{an}\right) - \ln(an) \\ &= \ln\left(1 + \frac{b}{an}\right) - \ln\left(1 + \frac{2b}{an}\right) = \frac{b}{an} - \frac{2b}{an} + o\left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{b}{an} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, $u_n \sim -\frac{b}{an}$ et la série $\sum \left(-\frac{b}{an}\right)$ diverge vers $-\infty$, donc $\sum u_n$ diverge avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k = -\infty$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \ln \left(\frac{p_{n+1}}{p_n}\right) = \ln p_{n+1} - \ln p_n$, donc par télescopage, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \ln p_n - \ln p_0 = \ln p_n.$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln p_n = -\infty$ et, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\ln p_n}$, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0$$

Exercice 10

Commençons par définir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'évènement S_n : « on obtient un 6 au $n^{\text{ième}}$ lancer ».

Les lancers sont indépendants et le dé est équilibré, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(S_n) = \frac{1}{6}$ et $P(\bar{S}_n) = \frac{5}{6}$.

1) On veut ici $P(E_n)$ où $E_n = \bigcap_{1 \leq k \leq n} \bar{S}_k$. Comme les lancers sont indépendants :

$$P(E_n) = P\left(\bigcap_{1 \leq k \leq n} \bar{S}_k\right) = \prod_{1 \leq k \leq n} P(\bar{S}_k) = \prod_{1 \leq k \leq n} \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(E_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

2) On veut ici $P(F_k)$ où $F_k = \left(\bigcap_{1 \leq i \leq n-1} \bar{S}_i\right) \cap S_k$. Toujours par indépendance des lancers :

$$P(F_k) = P\left(\left(\bigcap_{1 \leq i \leq n-1} \bar{S}_i\right) \cap S_k\right) = \left(\prod_{1 \leq i \leq n-1} P(\bar{S}_i)\right) P(S_k) = \left(\prod_{1 \leq i \leq n-1} \frac{5}{6}\right) \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}.$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(F_k) = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$$

3) L'évènement K peut s'écrire :

$$K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} E_n.$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E_{n+1} \subset E_n$, on a par continuité décroissante :

$$P(K) = P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(E_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Et comme $0 < \frac{5}{6} < 1$, on obtient :

$$P(K) = 0$$

4) L'évènement $\bar{K}$: « 6 apparaît au moins une fois ». Le premier 6 peut alors apparaître au 1^{er} lancer *ou* au 2^{ième} *ou* ... *ou* au $k^{\text{ième}}$ *ou* ... Donc, $\bar{K}$ peut s'écrire :

$$\bar{K} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} F_k$$

On a alors :

$$P(\bar{K}) = P\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} F_k\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{i \in [1, k]} F_i\right).$$

Et comme les F_i sont deux à deux incompatibles (le *premier* 6 n'est obtenu qu'à un seul lancer), on obtient pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P\left(\bigcup_{i \in [1, k]} F_i\right) = \sum_{i=1}^k P(F_i) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} = \frac{1}{6} \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k}{1 - \frac{5}{6}} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k.$$

Donc, $P(\bar{K}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k\right) = 1$ et on retrouve bien :

$$P(K) = 0$$

5) On a :

G : « 6 apparaît une infinité de fois » ;

H : « 6 apparaît à tous les lancers, sauf un nombre fini d'entre eux ».

On va calculer $P(\bar{G})$, autrement dit, la probabilité que le 6 apparaisse un nombre fini de fois.

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, notons G_n l'évènement : « le dernier 6 est obtenu au $n^{\text{ième}}$ lancer ou jamais pour $n=0$ » et $G_{n,k}$ l'évènement : « le 6 est obtenu au $n^{\text{ième}}$ lancer (s'il y a lieu, c'est-à-dire si $n \neq 0$) et aucun 6 n'est obtenu entre les lancers $n+1$ et $n+k$ ».

On a $G_n = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} G_{n,k}$ avec $G_{n,k+1} \subset G_{n,k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donc par continuité décroissante :

$$P(G_n) = P\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} G_{n,k}\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} P(G_{n,k}).$$

Or, $G_{n,k} = S_n \cap \left(\bigcap_{n+1 \leq i \leq n+k} \bar{S}_i\right)$, donc avec l'indépendance des lancers :

$$P(G_{n,k}) = P\left(S_n \cap \left(\bigcap_{n+1 \leq i \leq n+k} \bar{S}_i\right)\right) = P(S_n) \prod_{n+1 \leq i \leq n+k} P(\bar{S}_i) = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^k.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(G_n) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^k = 0.$$

Or, $\bar{G} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$ (car si le 6 apparaît un nombre fini de fois, il n'apparaît jamais *ou* apparaît en dernier au rang 1, ou au rang 2, *ou* ... *ou* au $k^{\text{ième}}$ lancer *ou* ...) et l'union est disjointe.

On a alors (comme dans la question précédente) :

$$P(\bar{G}) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{i \in [0, n]} G_i\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sum_{i=0}^n P(G_i)\right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0.$$

Ainsi, $P(\bar{G}) = 0$ et donc :

$$P(G) = 1$$

Nous venons de calculer $P(\bar{G})$ la probabilité que le 6 apparaisse un nombre fini de fois. Or, l'évènement H peut se reformuler en : « *non*6 apparaît un nombre fini de fois ». Le calcul de $P(H)$ est alors le même que celui de $P(\bar{G})$ en intervertissant $\frac{1}{6}$ et $\frac{5}{6}$ quand ils les apparaissent.

On obtient alors de la même façon que plus haut pour $P(\bar{G}) = 0$:

$$P(H) = 0$$