

Corrigés des TD du chapitre 13

Exercice 1

1) Chaque appel téléphonique est une expérience aléatoire ayant deux issues : on obtient le correspondant (probabilité p) ou pas (probabilité $1-p$). Cette expérience de Bernoulli est répétée n fois de manière indépendante : on a un schéma de Bernoulli. Le nombre X de succès, autrement dit le nombre de correspondants obtenus, suit donc une loi binomiale de paramètres n et p .

La variable X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

2) a. Si l'évènement $(X=i)$ est réalisé, la secrétaire a joint i correspondants lors de la première vague d'appels. Elle va donc en rappeler $n-i$ lors de la seconde vague.

Comme X , la variable Y représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels suit une loi binomiale de paramètres $n-i$ et p , et donc pour tout $k \in \llbracket 0, n-i \rrbracket$:

$$P_{(X=i)}(Y=k) = \binom{n-i}{k} p^k (1-p)^{n-i-k}$$

b. La variable aléatoire $Z = X + Y$ représente le nombre total de correspondants obtenus après les deux séries d'appels. On a donc $Z(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et, avec la loi des probabilités totales, on a pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} P(Z=k) &= \sum_{i=0}^k P(X=i)P_{(X=i)}(Z=k) = \sum_{i=0}^k P(X=i)P_{(X=i)}(Y=k-i) \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \binom{n-i}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n-i-(k-i)} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i} p^k (1-p)^{2n-k-i} \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k-i} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \left(\frac{1}{1-p}\right)^i \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \left(1 + \frac{1}{1-p}\right)^k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2(n-k)} (2-p)^k \end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$P(Z=k) = \binom{n}{k} (2p-p^2)^k [1-(2p-p^2)]^{n-k}.$$

Et donc :

$Z = X + Y$ suit une loi binomiale de paramètres n et $2p-p^2$.

Exercice 2

1) Remarquons que N est entier et Np aussi car c'est le nombre de boules blanches.

La variable X représente le nombre de boules blanches obtenues à l'issue d'un tirage donné, donc :

$$X(\Omega) = \llbracket 0, Np \rrbracket.$$

Les tirages possibles sont équiprobables, donc pour tout $k \in \llbracket 0, Np \rrbracket$:

$$P(X = k) = \frac{\text{Nombre de tirages contenant } k \text{ boules blanches}}{\text{Nombre total de tirages possibles}}.$$

Enfin, on choisit sans remise de n boules distinctes parmi les N de l'urne, donc le modèle est celui des combinaisons. Il y a $\binom{N}{n}$ tirages possibles et pour obtenir exactement k boules blanches (donc $n-k$ boules noires), il faut choisir ces k boules blanches parmi les Np dans l'urne $\binom{Np}{k}$ possibilités et pour chacune de ces possibilités, il y a $\binom{N(1-p)}{n-k}$ possibilités de choisir les $n-k$ boules noires parmi les $N - Np = N(1-p)$ de l'urne. Il y a donc $\binom{Np}{k} \binom{N(1-p)}{n-k}$ tirages contenant k boules blanches et ainsi, pour tout $k \in \llbracket 0, Np \rrbracket$:

$$P(X = k) = \frac{\binom{Np}{k} \binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

On a $a! \underset{a \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi a} \left(\frac{a}{e}\right)^a$, donc pour tout entier b fixé :

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} \underset{a \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi a} \left(\frac{a}{e}\right)^a}{b! \sqrt{2\pi(a-b)} \left(\frac{a-b}{e}\right)^{a-b}}.$$

Et :

$$\frac{\sqrt{2\pi a} \left(\frac{a}{e}\right)^a}{b! \sqrt{2\pi(a-b)} \left(\frac{a-b}{e}\right)^{a-b}} = \frac{e^{-b}}{b!} \sqrt{\frac{a}{a-b}} e^{-a \ln\left(1 - \frac{b}{a}\right)} (a-b)^b \underset{a \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a^b}{b!}$$

Donc, à b fixé, $\binom{a}{b} \underset{a \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a^b}{b!}$ et, à n, p et k fixés :

$$P(X = k) = \frac{\binom{Np}{k} \binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\frac{(Np)^k}{k!} \frac{N^{n-k} (1-p)^{n-k}}{(n-k)!}}{\frac{N^n}{n!}} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Ainsi :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Donc :

Lorsque N tend vers l'infini, la loi hypergéométrique tend vers la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

2) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ et $S = X + Y$.

On a $S(\Omega) = \llbracket 2, 2n \rrbracket$ et, avec la loi des probabilités totales, on a pour tout $k \in \llbracket 2, 2n \rrbracket$:

$$P(S = k) = \sum_{\substack{i+j=k \\ 1 \leq i, j \leq n}} P(X = i, Y = j).$$

Comme X et Y sont indépendantes et suivent une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, on a, pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j) = \frac{1}{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} P(S = k) &= \sum_{\substack{i+j=k \\ 1 \leq i, j \leq n}} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} \text{Card} \left\{ (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i + j = k \right\} = \frac{1}{n^2} \text{Card} \left\{ (i, k - i) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \right\} \\ &= \frac{1}{n^2} \text{Card} \left\{ i \in \llbracket 1, n \rrbracket, 1 \leq k - i \leq n \right\} = \frac{1}{n^2} \text{Card} \left\{ i \in \llbracket 1, n \rrbracket, k - n \leq i \leq k - 1 \right\} \\ &= \frac{1}{n^2} \text{Card} \llbracket \max(1, k - n), \min(k - 1, n) \rrbracket = \frac{\min(k - 1, n) - \max(1, k - n) + 1}{n^2} \end{aligned}$$

Or :

$$k - 1 \leq n \Leftrightarrow k - n \leq 1.$$

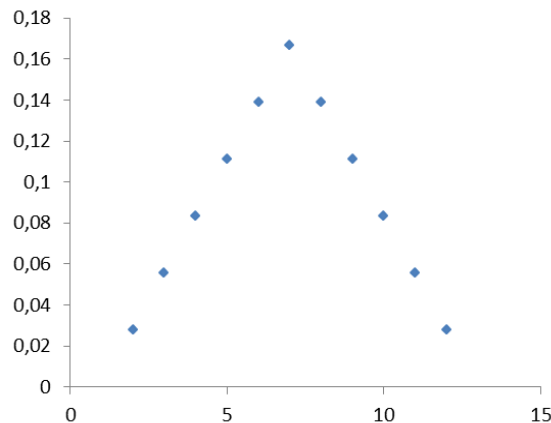
Donc :

$$\min(k - 1, n) = k - 1 \Leftrightarrow \max(1, k - n) = 1.$$

Et ainsi, on a :

$$P(S = k) = \begin{cases} \frac{k - 1}{n^2} & \text{quand } 2 \leq k \leq n + 1 \\ \frac{2n + 1 - k}{n^2} & \text{quand } n + 1 \leq k \leq 2n \end{cases}$$

Si on représente cette loi pour $n = 6$ (ce qui correspond à l'expérience : lancer de deux dés standards et non pipés, S est la somme des deux chiffres obtenus), on obtient :



Ceci illustre bien l'aspect « triangulaire » de la loi. Numériquement, ceci correspond à pour tout $k \in \llbracket 2, 2n \rrbracket$:

$$P(S = 2n + 2 - k) = P(S = k).$$

Exercice 3

- 1) On a $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \llbracket 1, 4 \rrbracket$ et, comme on procède avec remise, X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent toutes les deux une loi uniforme sur $\llbracket 1, 4 \rrbracket$. Alors, pour tout $(k, \ell) \in \llbracket 1, 4 \rrbracket^2$:

$$P(X_1 = k, X_2 = \ell) = P(X_1 = k) = P(X_2 = \ell) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}.$$

Ainsi :

$$\text{Pour tout } (k, \ell) \in \llbracket 1, 4 \rrbracket^2, P(X_1 = k, X_2 = \ell) = \frac{1}{16}.$$

On a aussi $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1, 4 \rrbracket$ et $X = X_1 \leq \max(X_1, X_2) = Y$. Alors, pour tout $(k, \ell) \in \llbracket 1, 4 \rrbracket^2$:

$$P(X = k, Y = \ell) = \begin{cases} P(X_1 = k, X_2 = \ell) & \text{quand } \ell > k \\ P(X_1 = k, X_2 \leq k) = \sum_{i=1}^k P(X_1 = k, X_2 = i) & \text{quand } \ell = k \\ 0 & \text{quand } \ell < k \end{cases}$$

Soit :

$$\text{Pour tout } (k, \ell) \in \llbracket 1, 4 \rrbracket^2, P(X = k, Y = \ell) = \begin{cases} \frac{1}{16} & \text{quand } \ell > k \\ \frac{k}{16} & \text{quand } \ell = k \\ 0 & \text{quand } \ell < k \end{cases}.$$

- 2) Comme $X = X_1$, on a pour tout $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, $P(X = k) = P(X_1 = k) = \frac{1}{4}$.

De plus, $(Y = 1) = (X_1 = 1, X_2 = 1)$, donc $P(Y = 1) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{1}{16}$ et pour tout $k \in \llbracket 2, 4 \rrbracket$:

$$P(Y = k) = \sum_{\ell=1}^4 P(X = \ell, Y = k) = \sum_{\ell=1}^{k-1} P(X = \ell, Y = k) + P(X = k, Y = k) = \sum_{\ell=1}^{k-1} \frac{1}{16} + \frac{k}{16} = \frac{2k-1}{16}.$$

La formule ci-dessus reste valable pour $k = 1$, donc, pour tout $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$:

$$P(X = k) = \frac{1}{4} \quad P(Y = k) = \frac{2k-1}{16}$$

- 3) On a $P(Y = 3) = \frac{5}{16} \neq 0$ et pour tout $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, on a $P_{(Y=3)}(X = k) = \frac{P(X = k, Y = 3)}{P(Y = 3)}$, donc avec les résultats de la question 1, on obtient :

$$\text{Pour tout } k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket, P_{(Y=3)}(X = k) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{quand } 3 > k \\ \frac{k}{5} & \text{quand } 3 = k \\ 0 & \text{quand } 3 < k \end{cases}.$$

- 4) De la même façon que ci-dessus, on a pour tout $\ell \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, $P(Y = \ell) = \frac{2\ell-1}{16} \neq 0$ et :

$$\text{Pour tous } k, \ell \in \llbracket 1, 4 \rrbracket, P_{(Y=\ell)}(X = k) = \frac{P(X = k, Y = \ell)}{P(Y = \ell)} = \begin{cases} \frac{1}{2\ell-1} & \text{quand } k < \ell \\ \frac{k}{2\ell-1} & \text{quand } k = \ell \\ 0 & \text{quand } k > \ell \end{cases}$$

- 5) Si X et Y sont indépendantes, alors pour tous $k, \ell \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, $P_{(Y=\ell)}(X = k) = P(X = k) = \frac{1}{4}$, ce qui est faux.

Par exemple, $P_{(Y=3)}(X = 2) = \frac{1}{5} \neq \frac{1}{4}$. Ainsi :

Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

- 6) On a $(X + Y)(\Omega) = \llbracket 2, 8 \rrbracket$. On a $P(X + Y = 2) = P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{16}$ et pour $s \in \llbracket 3, 8 \rrbracket$:

$$P(X + Y = s) = \sum_{k=1}^s P(X = k, Y = s - k) = \sum_{1 \leq k \leq s-k, k \leq 4} P(X = k, Y = s - k) = \sum_{k=\max(1, s-4)}^{\lfloor s/2 \rfloor} P(X = k, Y = s - k).$$

D'où la loi de $X + Y$ résumée dans un tableau :

$X + Y$	2	3	4	5	6	7	8
Probabilité	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$

Pour XY , il est plus délicat de préciser $(XY)(\Omega)$. Enumérons les cas.

Soit $\omega \in \Omega$.

Si $X_1(\omega) \geq X_2(\omega)$, alors $X(\omega) = Y(\omega) = X_1(\omega)$, donc :

$$(XY)(\omega) = X_1(\omega)^2 = \begin{cases} 1 & \text{quand } X_1(\omega) = X_2(\omega) = 1 \\ 4 & \text{quand } X_1(\omega) = 2 \text{ et } X_2(\omega) = 1 \text{ ou } 2 \\ 9 & \text{quand } X_1(\omega) = 3 \text{ et } X_2(\omega) = 1 \text{ ou } 2 \text{ ou } 3 \\ 16 & \text{quand } X_1(\omega) = 4 \text{ et } X_2(\omega) = 1 \text{ ou } 2 \text{ ou } 3 \text{ ou } 4 \end{cases}$$

Si $X_1(\omega) < X_2(\omega)$, alors $X(\omega) = X_1(\omega)$ et $Y(\omega) = X_2(\omega)$, donc :

$$(XY)(\omega) = X_1(\omega)X_2(\omega) = \begin{cases} 2 & \text{quand } X_1(\omega) = 1 \text{ et } X_2(\omega) = 2 \\ 3 & \text{quand } X_1(\omega) = 1 \text{ et } X_2(\omega) = 3 \\ 6 & \text{quand } X_1(\omega) = 2 \text{ et } X_2(\omega) = 3 \\ 4 & \text{quand } X_1(\omega) = 1 \text{ et } X_2(\omega) = 4 \\ 8 & \text{quand } X_1(\omega) = 2 \text{ et } X_2(\omega) = 4 \\ 12 & \text{quand } X_1(\omega) = 3 \text{ et } X_2(\omega) = 4 \end{cases}$$

Ainsi, $(XY)(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16\}$ et :

$$P(XY = 1) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{1}{16}$$

$$P(XY = 2) = P(X_1 = 1, X_2 = 2) = \frac{1}{16}$$

$$P(XY = 3) = P(X_1 = 1, X_2 = 3) = \frac{1}{16}$$

$$P(XY = 4) = P(X_1 = 1, X_2 = 4) + P(X_1 = 2, X_2 = 1) + P(X_1 = 2, X_2 = 2) = \frac{3}{16}$$

$$P(XY = 6) = P(X_1 = 2, X_2 = 3) = \frac{1}{16}$$

$$P(XY = 6) = P(X_1 = 2, X_2 = 4) = \frac{1}{16}$$

$$P(XY = 9) = \sum_{k=1}^3 P(X_1 = 3, X_2 = k) = \frac{3}{16}$$

$$P(XY = 12) = P(X_1 = 3, X_2 = 4) = \frac{1}{16}$$

$$P(XY = 16) = \sum_{k=1}^4 P(X_1 = 4, X_2 = k) = \frac{4}{16}$$

D'où la loi de XY résumée dans un tableau :

$X + Y$	1		2	3	4	6	8	9	12	16
Probabilité	$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$

Exercice 4

1) a. On a $N(\Omega) = \mathbb{N}$ et $0 \leq X \leq N$, donc :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}$$

b. Comme il choisit au hasard son entrée, chaque visiteur a 1 chance sur 4 de choisir l'entrée n° 1 (épreuve de Bernoulli, probabilité de succès = 1/4). Les k visiteurs se présentent successivement et leur choix est indépendant de celui des autres. Nous sommes en présence d'un schéma de Bernoulli et donc :

Quand $N = k$, le nombre X de visiteurs qui entrent par l'entrée 1 suit une loi binomiale de paramètres k et $\frac{1}{4}$.

c. On a $(X = n) = \bigcup_{k=n}^{+\infty} (N = k, X = n)$ et pour $k \neq k'$, $(N = k, X = n) \cap (N = k', X = n) = \emptyset$, donc la famille $((N = k, X = n))_{n \geq k}$ forme une partition de l'évènement $(X = n)$.

La loi des probabilités totales donne alors $P(X = n) = \sum_{k=n}^{+\infty} P(N = k, X = n)$, soit :

$$P(X = n) = \sum_{k=n}^{+\infty} P(N = k) P_{(N=k)}(X = n)$$

Comme N suit une loi de Poisson de paramètre λ , on a $P(N=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$. Or, d'après la question b, sachant

$N=k$, X suit une loi binomiale de paramètres k et $\frac{1}{4}$, soit $P_{(N=k)}(X=n) = \binom{k}{n} \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{3}{4}\right)^{k-n}$, on a :

$$\begin{aligned} P(X=n) &= \sum_{k=n}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \binom{k}{n} \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{3}{4}\right)^{k-n} = \sum_{k=n}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{k!}{n!(k-n)!} \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{3}{4}\right)^{k-n} \\ &= e^{-\lambda} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{4}\right)^n \lambda^n \sum_{k=n}^{+\infty} \lambda^{k-n} \frac{1}{(k-n)!} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-n} = e^{-\lambda} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{4}\right)^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{3\lambda}{4}\right)^k = e^{-\lambda} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{4}\right)^n e^{\frac{3\lambda}{4}} \end{aligned}$$

Ainsi, $P(X=n) = e^{-\frac{\lambda}{4}} \frac{(\lambda/4)^n}{n!}$, donc :

La variable X suit une loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{4}$.

2) a. Comme le joueur réussit de façon certaine le premier lancer ($P(S_1)=1$) mais peut ratier le deuxième, Z vaut au minimum 1 et peut valoir n'importe quel entier supérieur ou égal à 1 (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'évènement $(Z=n)$ est l'évènement : « les n premiers lancers sont réussis et le $(n+1)^{\text{ième}}$ est raté »). Ainsi :

$Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$

b. On vient de voir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'évènement $(Z=n)$ est l'évènement : « les lancers 1 et 2 et ... et n sont réussis et le $(n+1)^{\text{ième}}$ est raté », donc :

$(Z=n) = S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n \cap \bar{S}_{n+1}$

On a alors :

$$P(Z=n) = P(S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n \cap \bar{S}_{n+1}) = P(S_1) P_{S_1}(S_2) P_{S_1 \cap S_2}(S_3) \dots P_{S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_{n-1}}(S_n) P_{S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n}(\bar{S}_{n+1}).$$

Par hypothèse, $P(S_1)=1$ et pour tout $i \geq 2$, $P_{S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_{i-1}}(S_i) = \frac{1}{i}$, donc $P_{S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_{i-1}}(\bar{S}_i) = 1 - \frac{1}{i} = \frac{i-1}{i}$. Alors :

$$P(Z=n) = 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \dots \times \frac{1}{n} \times \frac{n}{n+1}.$$

Soit :

$P(Z=n) = \frac{n}{(n+1)!}$

c. On a :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} P(Z=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right) = \frac{1}{1!} \quad (\text{par télescopage}).$$

Ainsi, on a bien :

$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} P(Z=n) = 1$

Exercice 5

1) On a pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} P(X \geq m) &= \sum_{k=m}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k=m}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p = (1-p)^{m-1} p \sum_{k=m}^{+\infty} (1-p)^{k-m} \\ &= (1-p)^{m-1} p \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^k = (1-p)^{m-1} p \frac{1}{1-(1-p)} \end{aligned}$$

Soit :

$$P(X \geq m) = (1-p)^{m-1}$$

2) On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, donc si $Z = \min(X, Y)$, on a aussi $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= P(\min(X, Y) = k) = P(X = k, Y \geq k) + P(X \geq k+1, Y = k) \\ &= \sum_{i=k}^{+\infty} P(X = k, Y = i) + \sum_{i=k+1}^{+\infty} P(X = i, Y = k) \\ &= \sum_{i=k}^{+\infty} P(X = k) P(Y = i) + \sum_{i=k+1}^{+\infty} P(X = i) P(Y = k) \\ &= \sum_{i=k}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p (1-p)^{i-1} p + \sum_{i=k+1}^{+\infty} (1-p)^{i-1} p (1-p)^{k-1} p \\ &= (1-p)^{2(k-1)} p^2 + 2(1-p)^{k-1} p^2 \sum_{i=k+1}^{+\infty} (1-p)^{i-1} \\ &= (1-p)^{2(k-1)} p^2 + 2(1-p)^{k-1} p^2 (1-p)^k \sum_{i=0}^{+\infty} (1-p)^i \\ &= (1-p)^{2(k-1)} p^2 + 2(1-p)^{2(k-1)} p^2 (1-p) \frac{1}{1-(1-p)} \\ &= (1-p)^{2(k-1)} p^2 + 2(1-p)^{2(k-1)} p(1-p) \\ &= (2-p)(1-p)^{2(k-1)} p \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(Z = k) = (2-p)p(1-p)^{2(k-1)}$$

On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, donc si $W = X - Y$, on a aussi $W(\Omega) = \mathbb{Z}$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} P(W = k) &= P(X - Y = k) = P(X = Y + k) = \sum_{i=\max(1-k, 1)}^{+\infty} P(X = i+k, Y = i) = \sum_{i=\max(1-k, 1)}^{+\infty} P(X = i+k) P(Y = i) \\ &= \sum_{i=\max(1-k, 1)}^{+\infty} (1-p)^{i+k-1} p (1-p)^{i-1} p = p^2 (1-p)^{k-2} \sum_{i=\max(1-k, 1)}^{+\infty} [(1-p)^2]^i \\ &= p^2 (1-p)^{k-2} [(1-p)^2]^{\max(1-k, 1)} \frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{p(1-p)^{k-2+2\max(1-k, 1)}}{2-p} \end{aligned}$$

Et :

- si $k \geq 0$, $k - 2 + 2 \max(1 - k, 1) = k - 2 + 2 = k$;
- si $k < 0$, $k - 2 + 2 \max(1 - k, 1) = -k$.

Soit, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $k - 2 + 2 \max(1 - k, 1) = |k|$ et :

$$P(W = k) = \frac{p(1-p)^{|k|}}{2-p}$$

3) Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$. On a :

$$P(Z = i, W = j) = P(\min(X, Y) = i, X - Y = j) = P(\min(Y + j, Y) = i, X = Y + j)$$

Si $j \geq 0$, $\min(Y + j, Y) = Y$, donc :

$$P(Z = i, W = j) = P(Y = i, X = i + j) = p(1-p)^{i-1} p(1-p)^{i+j-1} = p^2 (1-p)^{2i+j-2}$$

Si $j < 0$, $\min(Y + j, Y) = Y + j$, donc :

$$P(Z = i, W = j) = P(Y + j = i, X = Y + j) = P(Y = i - j, X = i) = p(1-p)^{i-j-1} p(1-p)^{i-1} = p^2 (1-p)^{2i-j-2}$$

Donc :

$$P(Z = i, W = j) = p^2 (1-p)^{2i+|j|-2} = p^2 (1-p)^{2(i-1)+|j|}.$$

Or :

$$P(Z = i) P(W = j) = (2-p) p(1-p)^{2(i-1)} \frac{p(1-p)^{|j|}}{2-p} = p^2 (1-p)^{2(i-1)+|j|}.$$

Ainsi, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$, on a $P(Z = i, W = j) = P(Z = i) P(W = j)$, donc :

Les variables aléatoires W et Z sont indépendantes.

Exercice 6

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$.

L'équation caractéristique associée à (E) : $y'' + (a-1)y' + by = 0$ est $r^2 + (a-1)r + b = 0$, de discriminant $\Delta = (a-1)^2 - 4b$. La forme des solutions de (E) dépend du signe de Δ , mais dans tous les cas, l'ensemble des solutions est un plan vectoriel $\text{Vect}(f_1, f_2)$ où f_1 et f_2 sont deux solutions de (E) non proportionnelles.

Remarquons que comme $a, b \in \mathbb{N}^*$, on a $a-1 \geq 0$, $b > 0$ et $\Delta = (a-1)^2 - 4b < (a-1)^2$.

- Si $a-1 > 2\sqrt{b} > 0$, soit $\Delta > 0$, on a $f_1 : t \mapsto e^{-\frac{a-1-\sqrt{\Delta}}{2}t}$ et $f_2 : t \mapsto e^{-\frac{a-1+\sqrt{\Delta}}{2}t}$.

Comme $0 < \sqrt{\Delta} < a-1$, on a $a-1+\sqrt{\Delta} > a-1-\sqrt{\Delta} > 0$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} f_2 = 0$.

- Si $a-1 = 2\sqrt{b} > 0$, soit $\Delta = 0$, on a $f_1 : t \mapsto e^{-\frac{a-1}{2}t}$ et $f_2 : t \mapsto t e^{-\frac{a-1}{2}t}$.

Comme $a-1 > 0$, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} f_2 = 0$.

- Si $a-1 < 2\sqrt{b}$, soit $\Delta < 0$, $f_1 : t \mapsto e^{-\frac{a-1}{2}t} \cos(\sqrt{|\Delta|}t)$ et $f_2 : t \mapsto e^{-\frac{a-1}{2}t} \sin(\sqrt{|\Delta|}t)$.
 - Si $a > 1$, on a $\lim_{+\infty} f_1 = \lim_{+\infty} f_2 = 0$.
 - Si $a = 1$, alors $f_1 : t \mapsto \cos(2\sqrt{b}t)$ et $f_2 : t \mapsto \sin(2\sqrt{b}t)$, qui n'ont pas de limite en $+\infty$.

Finalement :

$$\lim_{+\infty} f_1 = \lim_{+\infty} f_2 = 0 \Leftrightarrow a \neq 1.$$

Or, toutes les solutions de (E) tendent vers 0 en $+\infty$ si et seulement c'est le cas pour f_1 et f_2 , donc :

$$\text{Toutes les solutions de l'équation (E) tendent vers 0 en } +\infty \Leftrightarrow a \neq 1$$

Ainsi, la probabilité pour que toutes les solutions de l'équation $y'' + (A-1)y' + By = 0$ tendent vers 0 en $+\infty$ est la probabilité que $A \neq 1$, soit $P(A \neq 1) = P(A > 1) = 1 - P(A = 1)$.

Si p est le paramètre de la loi géométrique suivie par A , on a $P(A = 1) = p$, donc :

La probabilité pour que toutes les solutions de l'équation $y'' + (A-1)y' + By = 0$ tendent vers 0 en $+\infty$ est $1 - p$ où est le paramètre de la loi géométrique suivie par A .

Exercice 7

$$1) \text{ On a } A = \begin{pmatrix} z_1 & 0 & \cdots & 0 & z_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & z_n & 0 & \cdots & 0 & z_n^2 \\ z_1^2 & 0 & \cdots & 0 & -z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & z_n^2 & 0 & \cdots & 0 & -z_n \end{pmatrix}.$$

Notons $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, \dots, e_{2n})$ la base canonique de $\mathbb{C}^{2n}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^{2n}$ canoniquement associé à A . Dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_{n+1}, e_2, e_{n+2}, \dots, e_k, e_{n+k}, \dots, e_n, e_{2n})$, on a :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & 0_2 & \cdots & 0_2 \\ 0_2 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_2 \\ 0_2 & \cdots & 0_2 & A_n \end{pmatrix} \text{ avec } A_k = \begin{pmatrix} z_k & z_k^2 \\ z_k^2 & -z_k \end{pmatrix} \text{ pour tout } k \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Et $A = M_{\mathcal{B}_c}(f)$ et $M_{\mathcal{B}}(f)$ sont semblables.

Les plans $\text{Vect}(e_k, e_{n+k})$ sont stables par f , donc si f est diagonalisable, les endomorphismes induits par f sur $\text{Vect}(e_k, e_{n+k})$ sont tous diagonalisables, donc les A_k sont toutes diagonalisables.

Réciproquement, si les A_k sont toutes diagonalisables, alors avec $A_k = P_k D_k P_k^{-1}$, D_k diagonale et $P_k \in GL_2(\mathbb{C})$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} P_1 D_1 P_1^{-1} & 0_2 & \cdots & 0_2 \\ 0_2 & P_2 D_2 P_2^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_2 \\ 0_2 & \cdots & 0_2 & P_n D_n P_n^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & 0_2 & \cdots & 0_2 \\ 0_2 & P_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_2 \\ 0_2 & \cdots & 0_2 & P_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & 0_2 & \cdots & 0_2 \\ 0_2 & D_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_2 \\ 0_2 & \cdots & 0_2 & D_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1^{-1} & 0_2 & \cdots & 0_2 \\ 0_2 & P_2^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_2 \\ 0_2 & \cdots & 0_2 & P_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Et } \begin{pmatrix} P_1 & 0_2 & \cdots & 0_2 \\ 0_2 & P_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_2 \\ 0_2 & \cdots & 0_2 & P_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1^{-1} & 0_2 & \cdots & 0_2 \\ 0_2 & P_2^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_2 \\ 0_2 & \cdots & 0_2 & P_n^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 P_1^{-1} & 0_2 & \cdots & 0_2 \\ 0_2 & P_2 P_2^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_2 \\ 0_2 & \cdots & 0_2 & P_n P_n^{-1} \end{pmatrix} = I_{2n}, \text{ donc :}$$

$$\begin{pmatrix} P_1^{-1} & 0_2 & \cdots & 0_2 \\ 0_2 & P_2^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_2 \\ 0_2 & \cdots & 0_2 & P_n^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & 0_2 & \cdots & 0_2 \\ 0_2 & P_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_2 \\ 0_2 & \cdots & 0_2 & P_n \end{pmatrix}^{-1}.$$

Ainsi, $M_B(f)$ est semblable à $\text{diag}(D_1, D_2, \dots, D_n)$ qui est diagonale, donc f est diagonalisable.

Ainsi, f , et donc A , est diagonalisable si et seulement si toutes les A_k le sont.

Soit $C = \begin{pmatrix} z & z^2 \\ z^2 & -z \end{pmatrix}$ avec $z \in \mathbb{C}$. On a $\chi_C = \begin{vmatrix} X - z & -z^2 \\ -z^2 & X + z \end{vmatrix} = (X - z)(X + z) - z^4 = X^2 - z^2(z^2 + 1)$.

Si $z^2(z^2 + 1) \neq 0$, ($z \neq 0$ et $z \neq \pm i$) alors C admet deux valeurs distinctes, donc est diagonalisable.

Si $z = 0$, alors $C = 0_2$ et C est diagonale, donc diagonalisable.

Si $z = \pm i$, alors $\chi_C = X^2$, donc la seule valeur propre de C est 0 et C n'est pas diagonalisable (sinon elle serait semblable à la matrice nulle, donc nulle).

Ceci permet de conclure que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, A_k est diagonalisable si et seulement si $z_k \neq \pm i$, donc :

La matrice A est diagonalisable si et seulement si $z_k \neq \pm i$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

2) Notons Adz l'évènement $L = \begin{pmatrix} M & M^2 \\ M^2 & -M \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

D'après ce qui précède et avec l'indépendance des X_k :

$$p_n = P(Adz) = P(X_1 \neq \pm i, X_2 \neq \pm i, \dots, X_n \neq \pm i) = \prod_{k=1}^n P(X_k \neq \pm i).$$

De plus, pour tout pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$P(X_k \neq \pm i) = 1 - P((X_k = -i) \cup (X_k = i)) = 1 - P(X_k = -i) - P(X_k = i).$$

Sachant que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X_k(\Omega) = \mathbb{U}_n$, considérons alors deux cas suivant la parité de n .

- Si n n'est pas divisible par 4, alors $i \notin \mathbb{U}_n$ et $-i \notin \mathbb{U}_n$, donc : $p_n = 1$.
- Si n est divisible par 4, alors $i, -i \in \mathbb{U}_n$ et, comme les X_k suivent toutes une loi uniforme sur $\mathbb{U}_n$,

qui est de cardinal n , on a $P(X_k = -i) = P(X_k = i) = \frac{1}{n}$ et donc : $p_n = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{2}{n}\right) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$.

Ainsi :

$$p_n = \begin{cases} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n & \text{quand 4 divise } n \\ 1 & \text{quand 4 ne divise pas } n \end{cases}$$

On a $\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{2}{n}\right)\right) = \exp\left(n\left(-\frac{2}{n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp\left(-2 + o_{n \rightarrow +\infty}(1)\right)$ donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{4n} = e^{-2} \neq 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_{4n+1}.$$

Ceci prouve que :

La suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas.

3) D'après la première question, pour tout $\omega \in \Omega$, $L(\omega)$ est semblable à la matrice diagonale par blocs

$\text{diag}(A_1(\omega), A_2(\omega), \dots, A_n(\omega))$ où $A_k = \begin{pmatrix} X_k(\omega) & X_k^2(\omega) \\ X_k^2(\omega) & -X_k(\omega) \end{pmatrix}$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, donc :

$$\chi_{L(\omega)} = \prod_{k=1}^n \chi_{A_k(\omega)} = \prod_{k=1}^n (X_k^2 - X_k(\omega)^2 (X_k(\omega)^2 + 1)).$$

Les $X_k(\omega)$ sont des racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité, donc $X_k(\omega) = e^{i \frac{2\ell\pi}{n}}$ avec $\ell \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Alors :

$$X_k(\omega)^2 (X_k(\omega)^2 + 1) = e^{i \frac{4\ell\pi}{n}} (e^{i \frac{4\ell\pi}{n}} + 1) = e^{i \frac{6\ell\pi}{n}} (e^{i \frac{2\ell\pi}{n}} + e^{-i \frac{2\ell\pi}{n}}) = 2e^{i \frac{6\ell\pi}{n}} \cos\left(\frac{2\ell\pi}{n}\right).$$

Les valeurs propres de $L(\omega)$ sont les complexes λ tels que $\lambda^2 = X_k(\omega)^2 (X_k(\omega)^2 + 1)$.

Si $\lambda \in \text{Sp}(L(\omega))$ est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité, alors :

$$|\lambda^2| = |X_k(\omega)^2 (X_k(\omega)^2 + 1)| = \left| 2e^{i \frac{6\ell\pi}{n}} \cos\left(\frac{2\ell\pi}{n}\right) \right| = 2 \left| \cos\left(\frac{2\ell\pi}{n}\right) \right| = 1.$$

Or, $\ell \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ donc $0 \leq \frac{2\ell\pi}{n} < 2\pi$, donc :

$$|\lambda^2| = 1 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{2\ell\pi}{n}\right) = \pm \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2\ell\pi}{n} \in \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\} \Leftrightarrow \ell \in \left\{ \frac{n}{6}, \frac{2n}{6}, \frac{4n}{6}, \frac{5n}{6} \right\}.$$

On obtient deux cas.

- Si n n'est pas divisible par 6, aucune valeur propre de $L(\omega)$ n'est de module 1, donc aucune valeur propre de $L(\omega)$ n'est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité et on a $q_n = 0$.
- Si n est divisible par 6, soit $n = 6p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$|\lambda^2| = 1 \Leftrightarrow \ell \in \{p, 2p, 4p, 5p\}.$$

On a alors $X_k(\omega)^2 (X_k(\omega)^2 + 1) = -1$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, donc les valeurs propres de $L(\omega)$ sont $-i$ et i .

Mais alors, $i^n = (-i)^n = i^{6p} = (-1)^{3p} = (-1)^p$.

- Si p est impair, aucune valeur propre de $L(\omega)$ n'est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité et on a $q_n = 0$.
- Si p est pair, i.e. n est divisible par 12, alors les valeurs propres de $L(\omega)$ sont des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité si et seulement si $X_k(\omega) \in U = \left\{ e^{i \frac{2\ell\pi}{n}}, \ell \in \left\{ \frac{n}{6}, \frac{2n}{6}, \frac{4n}{6}, \frac{5n}{6} \right\} \right\}$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Dans ce cas, on a $q_n = P(X_1 \in U, X_2 \in U, \dots, X_n \in U)$. Avec l'indépendance et la loi uniforme commune des X_k , on obtient :

$$q_n = \prod_{k=1}^n P(X_k \in U) = (P(X_1 \in U))^n = \left(\frac{\text{Card } U}{\text{Card } \mathbb{U}_n} \right)^n = \left(\frac{4}{n} \right)^n.$$

Finalement :

$$q_n = \begin{cases} \left(\frac{4}{n} \right)^n & \text{quand 12 divise } n \\ 0 & \text{quand 12 ne divise pas } n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq q_n \leq \frac{4}{n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = 0$$

Exercice 8

1) On a $X^+ : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}; \omega \mapsto \max(X(\omega), 0)$ et $X^- : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}; \omega \mapsto \min(X(\omega), 0)$.

X^+ et X^- sont donc des applications définies sur Ω , avec $X^+(\Omega) = \mathbb{N}$ et $X^-(\Omega) = \{-n, n \in \mathbb{N}\}$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $X^{-1}(\{n\}) \in \mathcal{A}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $(X^+)^{-1}(\{n\}) = X^{-1}(\{n\}) \in \mathcal{A}$;
- $(X^-)^{-1}(\{-n\}) = X^{-1}(\{-n\}) \in \mathcal{A}$.

Ainsi :

$X^+ \text{ et } X^- \text{ sont bien des variables aléatoires.}$

2) Pour tout $\omega \in \Omega$, $X^+(\omega) = \max(X(\omega), 0)$ et $X^-(\omega) = \min(X(\omega), 0)$, et :

- si $X(\omega) \geq 0$, $X^+(\omega) = X(\omega)$ et $X^-(\omega) = 0$;
- si $X(\omega) \leq 0$, $X^+(\omega) = 0$ et $X^-(\omega) = X(\omega)$.

Soient $n, m \in \mathbb{N}$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on a :

$$\omega \in (X^+ = n) \cap (X^- = -m) \Leftrightarrow \begin{cases} X^+(\omega) = \max(X(\omega), 0) = n \\ X^-(\omega) = \min(X(\omega), 0) = -m \end{cases}$$

Ceci est impossible si n et m sont tous les deux non nuls, d'où :

- si $n, m \in \mathbb{N}^*$, $P(X^+ = n, X^- = -m) = 0$;
 - si $n \in \mathbb{N}$, $P(X^+ = n, X^- = 0) = P(X = n)$;
 - si $m \in \mathbb{N}$, $P(X^+ = 0, X^- = -m) = P(X = -m)$.

Comme X n'est ni positive presque sûrement, ni négative presque sûrement, il existe $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $P(X = n) \neq 0$ et $P(X = -m) \neq 0$, donc $0 < P(X \geq 0) < 1$.

On a alors :

$$\begin{aligned} P(X^+ = n, X^- = 0) &= P(X = n) \\ P(X^+ = n)P(X^- = 0) &= P(X = n)P(X \geq 0) \end{aligned}$$

Or, $P(X = n) \neq P(X = n)P(X \geq 0)$ (sinon $P(X \geq 0) = 1$ car $P(X = n) \neq 0$).

Donc, $P(X^+ = n, X^- = 0) \neq P(X^+ = n)P(X^- = 0)$ et ainsi :

Les variables X^+ et X^- ne sont pas indépendantes.

Exercice 9

- 1) La variable aléatoire $T+1$, qui est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, suit une loi géométrique de paramètre $1/2$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(T = n) = P(T+1 = n+1) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n+1-1} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

On a $(T > n) = \overline{(T \leq n)}$ et $(T \leq n) = \bigcup_{k=0}^n (T = k)$, et l'union est disjointe, donc par σ -additivité :

$$P(T > n) = 1 - P(T \leq n) = 1 - \sum_{k=0}^n P(T = k) = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{1 - (1/2)^{n+1}}{1 - 1/2} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

On a $(T > n) = \left(\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} (T = k) \right) \cup (T = +\infty)$ et l'union est disjointe, donc par σ -additivité :

$$\begin{aligned} P(T > n) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(T = k) + P(T = +\infty) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} + P(T = +\infty) \\ &= \frac{1}{2^{n+2}} \frac{1}{1 - 1/2} + P(T = +\infty) = \frac{1}{2^{n+1}} + P(T = +\infty) \end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} + P(T = +\infty)$, donc $P(T = +\infty) = 0$.

Finalement :

$$P(T = n) = P(T > n) = \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{et} \quad P(T = +\infty) = 0.$$

- 2) Pour réaliser $(T' = n)$, il faut réaliser $(X_{n-1} = X_n = 1)$ et $(X_{n-2} = 0)$ quand $n \geq 2$, d'où :

$$\begin{aligned} P(T' = 1) &= P(X_0 = X_1 = 1) \\ P(T' = 2) &= P(X_0 = 0, X_1 = X_2 = 1) \\ P(T' = 3) &= P(X_0 = 0, X_1 = 0, X_2 = X_3 = 1) + P(X_0 = 1, X_1 = 0, X_2 = X_3 = 1) \\ P(T' = 3) &= P(X_0 = 0, X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = X_4 = 1) + P(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = X_4 = 1) \\ &\quad + P(X_0 = 1, X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = X_4 = 1) \end{aligned}$$

Et par indépendance des X_k et avec $P(X_k = 0) = P(X_k = 1) = \frac{1}{2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 P(T' = 1) &= P(X_0 = 1)P(X_1 = 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
 P(T' = 2) &= P(X_0 = 0)P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\
 P(T' = 3) &= P(X_0 = 0)P(X_1 = 0)P(X_2 = 1)P(X_3 = 1) \\
 &\quad + P(X_0 = 1)P(X_1 = 0)P(X_2 = 1)P(X_3 = 1) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^4 \\
 P(T' = 4) &= P(X_0 = 0)P(X_1 = 0)P(X_2 = 0)P(X_3 = 1)P(X_4 = 1) \\
 &\quad + P(X_0 = 0)P(X_1 = 1)P(X_2 = 0)P(X_3 = 1)P(X_4 = 1) \\
 &\quad + P(X_0 = 1)P(X_1 = 0)P(X_2 = 0)P(X_3 = 1)P(X_4 = 1) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^5
 \end{aligned}$$

Et finalement :

$P(T' = 1) = \frac{1}{4} \quad P(T' = 2) = \frac{1}{8} \quad P(T' = 3) = \frac{1}{8} \quad P(T' = 4) = \frac{3}{32}$
--

3) Pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$P(T' > n) = P_{(T' > n-2)}(T' > n)P(T' > n-2).$$

Or, si $(T' > n-2)$ est réalisé, pour obtenir $(T' > n)$, il faut que $\overline{(X_{n-1} = 1)} \cap (X_n = 1)$ soit réalisé, donc :

$$P_{(T' > n-2)}(T' > n) \leq P(\overline{(X_{n-1} = 1)} \cap (X_n = 1)).$$

Et :

$$\overline{(X_{n-1} = 1)} \cap (X_n = 1) = [(X_{n-1} = 0) \cap (X_n = 0)] \cup [(X_{n-1} = 1) \cap (X_n = 0)] \cup [(X_{n-1} = 0) \cap (X_n = 1)].$$

Donc, par sous-additivité et indépendance de X_{n-1} et X_n :

$$\begin{aligned}
 P(\overline{(X_{n-1} = 1)} \cap (X_n = 1)) &\leq P(X_{n-1} = 0, X_n = 0) + P(X_{n-1} = 1, X_n = 0) + P(X_{n-1} = 0, X_n = 1) \\
 &\leq P(X_{n-1} = 0)P(X_n = 0) + P(X_{n-1} = 1)P(X_n = 0) + P(X_{n-1} = 0)P(X_n = 1) \\
 &\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

Ainsi, $P_{(T' > n-2)}(T' > n) \leq \frac{3}{4}$, d'où :

$P(T' > n) \leq \frac{3}{4}P(T' > n-2)$

4) Montrons par récurrence sur p que pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$P(T' > 2p) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^p P(T' > 0)$$

$$P(T' > 2p+1) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^p P(T' > 1)$$

Initialisation : Pour $p = 0$, les deux inégalités sont vérifiées (ce sont même des égalités).

Hérédité : Supposons la propriété vraie à un rang $p \in \mathbb{N}$. On a alors $2(p+1) \geq 2$ et $2(p+1)+1 \geq 2$, donc d'après la question précédente et l'hypothèse de récurrence :

$$P(T' > 2(p+1)) \leq \frac{3}{4} P(T' > 2(p+1)-2) = \frac{3}{4} P(T' > 2p) \leq \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^p P(T' > 0) = \left(\frac{3}{4}\right)^{p+1} P(T' > 0)$$

$$P(T' > 2(p+1)+1) \leq \frac{3}{4} P(T' > 2(p+1)+1-2) = \frac{3}{4} P(T' > 2p+1) \leq \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^p P(T' > 1) = \left(\frac{3}{4}\right)^{p+1} P(T' > 1)$$

Ainsi, la propriété est vraie au rang $p+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Comme les probabilités sont positives et $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^p = 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim_{p \rightarrow +\infty} P(T' > 2p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} P(T' > 2p+1) = 0$ et donc que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(T' > n) = 0$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(T' > n+1) \subset (T' > n) = (T' > n+1) \cup (T' = n+1)$, donc par continuité décroissante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(T' > n) = P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (T' > n)\right) = 0.$$

Or, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (T' > n) = (T' = +\infty)$, d'où :

$$P(T' = +\infty) = 0$$

5) Soit $n \geq 2$.

La famille $((X_0 = 0), (X_0 = 1))$ est un système complet d'évènements, et la formule des probabilités totales donne :

$$P(T' = n) = P(X_0 = 0)P_{(X_0=0)}(T' = n) + P(X_0 = 1)P_{(X_0=1)}(T' = n).$$

La famille $((X_1 = 0), (X_1 = 1))$ est elle aussi un système complet d'évènements, et la formule des probabilités totales donne :

$$P_{(X_0=1)}(T' = n) = P(X_1 = 0)P_{(X_0=1) \cap (X_1=0)}(T' = n) + P(X_1 = 1)P_{(X_0=1) \cap (X_1=1)}(T' = n).$$

De plus :

- $P(X_0 = 0) = P(X_0 = 1) = P(X_1 = 0) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$;
- si $(X_0 = 0)$ est réalisé, la probabilité d'obtenir pour la première fois deux 1 consécutifs aux rangs $n-1$ et n est la même que celle d'obtenir pour la première fois deux 1 consécutifs aux rangs $n-2$ et $n-1$ sans fixer la valeur de X_0 , soit $P_{(X_0=0)}(T' = n) = P(T' = n-1)$;
- si $(X_0 = 1) \cap (X_1 = 0)$ est réalisé, la probabilité d'obtenir pour la première fois deux 1 consécutifs aux rangs $n-1$ et n est la même que celle d'obtenir pour la première fois deux 1 consécutifs aux

rangs $n-3$ et $n-2$ sans fixer la valeur de X_0 , soit $P_{(X_0=1) \cap (X_1=0)}(T'=n) = P(T'=n-2)$ (qui est nulle quand $n=2$) ;

- comme $(X_0=1) \cap (X_1=1) = (T'=1)$ et $n \geq 2$, $P_{(X_0=1) \cap (X_1=1)}(T'=n) = P_{(T'=1)}(T'=n) = 0$.

Ainsi :

$$P(T'=n) = \frac{1}{2}P(T'=n-1) + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}P(T'=n-2) + \frac{1}{2} \times 0 \right].$$

Soit :

$$P(T'=n) = \frac{1}{2}P(T'=n-1) + \frac{1}{4}P(T'=n-2)$$

En posant $u_n = P(T'=n)$ pour tout entier $n \geq 2$, on a $u_2 = u_3 = \frac{1}{8}$ d'après la question 2 et :

$$u_n - \frac{1}{2}u_{n-1} - \frac{1}{4}u_{n-2} = 0.$$

Le polynôme caractéristique associé à la relation de récurrence linéaire double ci-dessus est $X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}$,

dont les racines sont $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$, donc pour tout $n \geq 2$, $u_n = \lambda \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^n + \mu \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^n$ avec :

$$\begin{cases} u_2 = \lambda \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^2 + \mu \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^2 = \frac{1}{8} \\ u_3 = \lambda \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^3 + \mu \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^3 = \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda(1-\sqrt{5})^2 + \mu(1+\sqrt{5})^2 = 2 \\ \lambda(1-\sqrt{5})^3 + \mu(1+\sqrt{5})^3 = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda(3-\sqrt{5}) + \mu(3+\sqrt{5}) = 1 \\ \lambda(2-\sqrt{5}) + \mu(2+\sqrt{5}) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\lambda = \mu = \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

Ainsi, $u_n = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^n - \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^n$.

Comme $P(T'=1) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right) - \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)$ et $P(T'=0) = 0 = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^0 - \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^0$,

on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(T'=n) = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^n \right]$$

On a $(T' > n) = \left(\bigcup_{k \geq n+1} (T'=k) \right) \cup (T' = +\infty)$ et comme l'union est disjointe et $P(T' = +\infty) = 0$:

$$P(T' > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(T'=k) + P(T' = +\infty) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(T'=k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^k \right].$$

Avec $\left| \frac{1-\sqrt{5}}{4} \right| < \left| \frac{1+\sqrt{5}}{4} \right| < 1$, on peut écrire :

$$P(T' > n) = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^k \right] = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^{n+1} \frac{1}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{4}} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^{n+1} \frac{1}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{4}} \right]$$

Et :

$$\frac{1}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{4}} = \frac{4}{3-\sqrt{5}} = \frac{4(3+\sqrt{5})}{9-5} = \frac{2(6+2\sqrt{5})}{4} = 8 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^2.$$

De même $\frac{1}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{4}} = 8 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^2$, donc :

$$P(T' > n) = \frac{4}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^{n+3} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^{n+3} \right]$$

Exercice 10

Comme les lois de variables temporelles sont géométriques, le temps est discrétisé, compté en une unité mystérieuse que nous omettons dans ce qui suit.

1) L'évènement $(Y > k)$, c'est-à-dire A_3 attend strictement plus que k (donc $k+1$ ou plus) pour passer au guichet, se réalise si et seulement si A_1 et A_2 passent un temps strictement supérieur à k au guichet (donc $k+1$ ou plus), c'est-à-dire $(X_1 > k)$ et $(X_2 > k)$, ou encore $(X_1 \geq k+1)$ et $(X_2 \geq k+1)$. Ainsi :

$$P(Y > k) = P((X_1 \geq k+1) \cap (X_2 \geq k+1)).$$

Or, les temps d'attente passé au guichet par les trois individus (qui ne se connaissent pas) sont indépendants, donc :

$$P(Y > k) = P(X_1 \geq k+1) \cdot P(X_2 \geq k+1).$$

Et comme X_1 et X_2 suivent la même loi géométrique de paramètre p , on a :

$$P(X_1 \geq k+1) = P(X_2 \geq k+1) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} P(X_1 = i) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} p(1-p)^{i-1} = p(1-p)^k \sum_{j=0}^{+\infty} (1-p)^j = p(1-p)^k \frac{1}{1-(1-p)}.$$

Finalement, on obtient $P(X_1 \geq k+1) = P(X_2 \geq k+1) = (1-p)^k$ et donc :

$$P(Y > k) = (1-p)^{2k}$$

Remarquons qu'en posant $P(Y > 0) = 1 = (1-p)^0$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(Y = k) = P(Y \geq k) - P(Y > k) = P(Y > k-1) - P(Y > k) = (1-p)^{2k-2} - (1-p)^{2k} = (1-p)^{2k-2} [1 - (1-p)^2].$$

En posant $q = 1 - (1-p)^2$, on a $P(Y = k) = (1-q)^{k-1} q$, donc :

$$Y \text{ suit une loi géométrique de paramètre } q.$$

2) On a $Z = Y + X_3$ et les variables Y et X_3 sont indépendantes : le temps passé au guichet par A_3 ne dépend pas du temps qu'il a attendu (qui ne dépend que des temps passés au guichet par A_1 et A_2).

Comme $Y(\Omega) = X_3(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a $Z(\Omega) = \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 2$:

$$P(Z = k) = \sum_{j=1}^{k-1} P(Y = j, X_3 = k - j) = \sum_{j=1}^{k-1} P(Y = j)P(X_3 = k - j).$$

Comme Y et X_3 suivent des lois géométriques de paramètres respectifs q et p , on obtient :

$$P(Z = k) = \sum_{j=1}^{k-1} (1-q)^{j-1} q (1-p)^{k-j-1} p = pq(1-p)^{k-2} \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{1-q}{1-p} \right)^{j-1} \underset{i=j-1}{=} pq(1-p)^{k-2} \sum_{i=0}^{k-2} \left(\frac{1-q}{1-p} \right)^i.$$

Or :

$$q = p \Leftrightarrow 1 - (1-p)^2 = p \Leftrightarrow (1-p)^2 = 1-p \Leftrightarrow p = 0 \text{ ou } 1.$$

Comme $p \in]0, 1[$, on a $q \neq p$, donc $\frac{1-q}{1-p} \neq 1$ et :

$$P(Z = k) = pq(1-p)^{k-2} \frac{1 - \left(\frac{1-q}{1-p} \right)^{k-1}}{1 - \frac{1-q}{1-p}} = pq \frac{(1-p)^{k-1} - (1-q)^{k-1}}{q-p}.$$

Ainsi :

$$Z(\Omega) = \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \text{ et pour tout } k \in Z(\Omega), P(Z = k) = pq \frac{(1-p)^{k-1} - (1-q)^{k-1}}{q-p}.$$

3) Le temps moyen passé par A_3 à la poste est $E(Z) = E(Y) + E(X_3)$.

Comme Y et X_3 suivent des lois géométriques de paramètres respectifs q et p , on obtient :

$$E(Z) = \frac{1}{q} + \frac{1}{p}.$$

Donc :

$$\text{Le temps moyen passé par } A_3 \text{ à la poste est } \frac{1}{1 - (1-p)^2} + \frac{1}{p}.$$