

Corrigés des TD du chapitre 15
Exercice 1

Comme $X(\Omega)$ est fini, G_X est définie sur $\mathbb{R}$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{k=2}^{2n} P(X=k)t^k = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{k-1}{n^2} t^k + \sum_{k=n+2}^{2n} \frac{2n+1-k}{n^2} t^k = \frac{1}{n^2} \left[\sum_{k=2}^{n+1} (k-1)t^k + \sum_{k=n+2}^{2n} (2n+1-k)t^k \right] \\ &= \frac{1}{n^2} \left[\sum_{k=1}^n k t^{k+1} + t^n \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)t^{k+1} \right] = \frac{1}{n^2} \left[\sum_{k=1}^n k t^{k+1} + t^n \sum_{k=1}^n (n-k)t^{k+1} \right] \\ &= \frac{1}{n^2} \left[(1-t^n) \sum_{k=1}^n k t^{k+1} + n t^n \left(\sum_{k=1}^n t^{k+1} \right) \right] = \frac{1}{n^2} \left[(1-t^n) t^2 f'(t) + n t^n \left(\sum_{k=1}^n t^{k+1} \right) \right] \end{aligned}$$

avec $f(t) = \sum_{k=0}^n t^k$ et pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(t) = \frac{1-t^{n+1}}{1-t}$ et $f'(t) = \frac{n t^{n+1} - (n+1)t^n + 1}{(1-t)^2}$, donc :

$$G_X(t) = \frac{1}{n^2} \left[(1-t^n) t^2 \frac{n t^{n+1} - (n+1)t^n + 1}{(1-t)^2} + n t^n \left(t^2 \frac{1-t^n}{1-t} \right) \right] = \frac{1}{n^2} \frac{(1-t^n)t^2}{(1-t)^2} \left[n t^{n+1} - (n+1)t^n + 1 + n t^n (1-t) \right].$$

Alors, après simplifications, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$G_X(t) = \frac{1}{n^2} \frac{(1-t^n)^2 t^2}{(1-t)^2}$$

Pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on peut écrire :

$$G_X(t) = \frac{1}{n^2} \left(t \frac{1-t^n}{1-t} \right)^2 = \frac{1}{n^2} \left(t \left(\sum_{k=0}^{n-1} t^k \right) \right)^2 = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n t^k \right)^2.$$

Et la formule reste vraie pour $t = 1$.

Comme G_X est polynomiale, elle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$G_X'(t) = \frac{2}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n k t^{k-1} \right) \left(\sum_{k=1}^n t^k \right) \quad \text{et} \quad G_X''(t) = \frac{2}{n^2} \left[\left(\sum_{k=1}^n k t^{k-1} \right)^2 + \left(\sum_{k=2}^n k(k-1) t^{k-2} \right) \left(\sum_{k=1}^n t^k \right) \right].$$

On a alors $G_X'(1) = \frac{2}{n^2} n \left(\sum_{k=1}^n k \right) = n+1$, et :

$$\begin{aligned} G_X''(1) &= \frac{2}{n^2} \left[\left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 + n \left(\sum_{k=2}^n k(k-1) \right) \right] = \frac{2}{n^2} \left[\left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 + n \left(\sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k \right) \right] \\ &= \frac{2}{n^2} \left[\left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + n \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) \right] = \frac{(n+1)(7n-1)}{6} \end{aligned}$$

Avec $E(X) = G_X'(1)$ et $V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2$, on obtient :

$$E(X) = n+1 \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{6}$$

Exercice 2

L'expression de la fonction génératrice d'une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $\llbracket 2, 2n \rrbracket$ est :

$$G_X(t) = \sum_{k=2}^{2n} P(X=k)t^k = \sum_{k=2}^{2n} \frac{1}{2n-2+1} t^k.$$

Soit :

$$G_X(t) = \frac{1}{2n-1} \sum_{k=2}^{2n} t^k$$

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. On a alors :

$$G_{X_1+X_2} = G_{X_1} G_{X_2}$$

Comme X_1 et X_2 suivent la même loi de probabilité, on a $G_{X_1} = G_{X_2}$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$G_{X_1+X_2}(t) = (G_{X_1}(t))^2 = \left(\sum_{k=1}^n P(X_1=k)t^k \right)^2.$$

Ceci permet de conclure que toutes les racines de $G_{X_1+X_2}$ sont au moins doubles.

Or, si $X_1 + X_2$ suit une loi uniforme sur $\llbracket 2, 2n \rrbracket$, on a $G_{X_1+X_2}(t) = \frac{1}{2n-1} \sum_{k=2}^{2n} t^k$, donc :

$$G_{X_1+X_2}(t) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=2}^{2n} t^k = 0 \Leftrightarrow t^2(t-1) \sum_{k=0}^{2n-2} t^k = 0 \text{ avec } t \neq 1 \Leftrightarrow t^2(t^{2n-1}-1) = 0 \text{ avec } t \neq 1.$$

Comme $n \geq 2$, on a $2n-1 \geq 3$, donc $X^{2n-1}-1$ admet au moins une racine et toutes ses racines sont simples (ce sont les racines $(2n-1)^{\text{ièmes}}$ de l'unité). Ainsi, toutes les racines de $G_{X_1+X_2}$, hormis 0, sont simples. D'après ce qui précède, ceci est absurde et ainsi :

$$X_1 + X_2 \text{ ne peut suivre une loi uniforme sur } \llbracket 2, 2n \rrbracket.$$

Exercice 3

1) Remarquons déjà que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $x^n e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, donc $\int_a^{+\infty} x^n e^{-x} dx$ converge, pour tout réel a . Ainsi, $u_n = \int_{\lambda}^{+\infty} x^n e^{-x} dx$ est bien défini. De plus, on a déjà vu que $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$P(X \leq n) = \sum_{k=0}^n P(X=k) = \sum_{k=0}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Or, la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre n appliquée à la fonction exponentielle (qui est C^∞ sur $\mathbb{R}$) entre 0 et λ donne :

$$e^\lambda = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} + \int_0^\lambda \frac{(\lambda-t)^n}{n!} e^t dt.$$

Et en posant $x = \lambda - t$ dans l'intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned} e^\lambda &= \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} + \int_0^\lambda \frac{x^n}{n!} e^{\lambda-x} dx = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{1}{n!} e^\lambda \int_0^\lambda x^n e^{-x} dx \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{1}{n!} e^\lambda \left(\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx - \int_\lambda^{+\infty} x^n e^{-x} dx \right) = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{1}{n!} e^\lambda (n! - u_n) = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} + e^\lambda \left(1 - \frac{1}{n!} u_n \right). \end{aligned}$$

Donc $\sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} = e^\lambda \frac{1}{n!} u_n$ et ainsi :

$$P(X \leq n) = \frac{1}{n!} u_n$$

2) Si pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = (X \leq n)$, on a $A_n \subset A_{n+1}$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega$. Par continuité croissante, on a alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X \leq n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = P(\Omega) = 1.$$

Donc :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n!$$

3) Comme X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, on a $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$, donc :

$$G_X(1) = 1 \text{ et } G_X(-1) = e^{-2\lambda}.$$

4) Si B est l'évènement « X prend une valeur paire », on a :

$$P(B) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{+\infty} P(X = k).$$

Or, pour tout réel t , $G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)t^k$, donc :

$$G_X(1) + G_X(-1) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) + \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)(-1)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)[1 + (-1)^k] = 2 \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{+\infty} P(X = k).$$

Ainsi :

$$P(B) = \frac{G_X(1) + G_X(-1)}{2}.$$

Donc :

$$\text{La probabilité que } X \text{ prenne une valeur paire est } \frac{1 + e^{-2\lambda}}{2}.$$

5) Si B' est l'évènement « X prend une valeur divisible par 4 », on a :

$$P(B') = \sum_{k=0, 4|k}^{+\infty} P(X = k).$$

Et :

$$\begin{aligned} G_X(1) + G_X(-1) + G_X(i) + G_X(-i) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) + \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)(-1)^k + \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)i^k + \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)(-i)^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) \left[1 + (-1)^k + i^k + (-i)^k \right] = 4 \sum_{\substack{k=0 \\ 4|k}}^{+\infty} P(X=k) \end{aligned}$$

Donc :

$$P(B') = \frac{G_X(1) + G_X(-1) + G_X(i) + G_X(-i)}{4} = \frac{1 + e^{-2\lambda} + e^{\lambda(i-1)} + e^{\lambda(-i-1)}}{4} = \frac{1 + e^{-2\lambda} + e^{-\lambda}(e^{\lambda i} + e^{-\lambda i})}{4}.$$

Et finalement :

La probabilité que X prenne une valeur divisible par 4 est $\frac{1 + e^{-2\lambda} + 2e^{-\lambda} \cos \lambda}{4}$.

6) Appelons C l'évènement « XY est un entier pair ».

Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \{1; 2\}$, XY est toujours entier et :

$$C = \text{« } X \text{ est pair » ou « } Y \text{ est pair »} = B \text{ ou } (Y = 2) = B \cup (Y = 2).$$

On a donc :

$$P(C) = P(B \cup (Y = 2)) = P(B) + P(Y = 2) - P(B \cap (Y = 2)).$$

Et comme X et Y sont indépendantes, on a $P(B \cap (Y = 2)) = P(B)P(Y = 2)$. Ainsi :

$$P(C) = P(B) + P(Y = 2) - P(B)P(Y = 2) = \frac{1 + e^{-2\lambda}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1 + e^{-2\lambda}}{2} \frac{1}{2} = \frac{3 + e^{-2\lambda}}{4}.$$

Finalement :

La probabilité pour que XY soit un entier pair est $\frac{3 + e^{-2\lambda}}{4}$.

Exercice 4

- 1) T_1 donne le rang d'apparition du premier succès lors d'une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même loi, donc :

T_1 suit une loi géométrique de paramètre p .

Son espérance est alors :

$$E(T_1) = \frac{1}{p}$$

- 2) Pour tout $n, k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$P(T_1 = n, T_2 = n + k) = P(T_1 = n) P_{(T_1=n)}(T_2 = n + k).$$

Or, l'expérience est répétée de manière indépendante, donc si le premier succès a lieu au rang n , le succès suivant peut être vu comme le premier succès à partir de la $(n+1)^{\text{ième}}$ répétition de l'expérience, donc son rang suivra (comme X) une loi géométrique de paramètre p . Ainsi, $P_{(T_1=n)}(T_2 = n + k) = (1-p)^{k-1} p$ et donc :

$$P(T_1 = n, T_2 = n + k) = (1-p)^{n-1} p (1-p)^{k-1} p.$$

Soit, pour tout $n, k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(T_1 = n, T_2 = n + k) = (1 - p)^{n+k-2} p^2$$

3) Pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 2$, on a :

$$P(T_2 = k) = \sum_{i=1}^{k-1} P(T_1 = i, T_2 = k) = \sum_{i=1}^{k-1} (1 - p)^{k-2} p^2 = (k-1)(1 - p)^{k-2} p^2.$$

Remarquons que $P(T_2 = 1) = 0$, ce qui est compatible avec la formule ci-dessus.

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(T_2 = k) = (k-1)(1 - p)^{k-2} p^2$$

On a alors :

$$G_{T_2}(t) = \sum_{k=2}^{+\infty} P(T_2 = k) t^k = \sum_{k=2}^{+\infty} (k-1)(1 - p)^{k-2} p^2 t^k = p^2 t^2 \sum_{k=2}^{+\infty} (k-1) [(1 - p)t]^{k-2} = p^2 t^2 \sum_{k=2}^{+\infty} k [(1 - p)t]^{k-1}.$$

Soit $G_{T_2}(t) = p^2 t^2 f'((1 - p)t)$ avec $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1 - x}$.

La série entière f est définie et de classe C^∞ sur $] -1, 1[$, avec $f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1 - x)^2}$.

Donc G_{T_2} est définie sur $\left] -\frac{1}{1 - p}, \frac{1}{1 - p} \right[$ et :

$$G_{T_2}(t) = \frac{p^2 t^2}{(1 - (1 - p)t)^2}$$

La fonction G_{T_2} est définie et de classe C^∞ sur $\left] -\frac{1}{1 - p}, \frac{1}{1 - p} \right[$ et :

$$G_{T_2}'(t) = \frac{2p^2 t}{(1 - (1 - p)t)^3} \quad G_{T_2}''(t) = 2p^2 \frac{1 + 2(1 - p)t}{(1 - (1 - p)t)^4}.$$

On a $E(T_2) = G_{T_2}'(1) = \frac{2p^2}{(1 - (1 - p))^3}$, soit :

$$E(T_2) = \frac{2}{p}$$

Et :

$$V(T_2) = G_{T_2}''(1) + G_{T_2}'(1) - G_{T_2}'(1)^2 = 2p^2 \frac{1 + 2(1 - p)}{(1 - (1 - p))^4} + \frac{2}{p} - \frac{4}{p^2}.$$

Soit :

$$V(T_2) = \frac{2(1 - p)}{p^2}$$

4) Pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$, on a $P(T_1 = n, T_2 = m) = (1-p)^{m-2} p^2$ et :

$$P(T_1 = n, T_2 = m) = p(1-p)^{n-1} \times (m-1)p^2(1-p)^{m-2} = (m-1)p^3(1-p)^{n+m-3} \neq P(X = n, Y = m).$$

Ainsi :

Les variables T_1 et T_2 ne sont pas indépendantes.

5) Pour $j \in \mathbb{N}^*$, introduisons la variable aléatoire X_j qui vaut 1 si la $j^{\text{ième}}$ épreuve est un succès et 0 sinon. Comme les épreuves sont indépendantes, les X_j le sont aussi et pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $P(X_j = 1) = p$.

La variable aléatoire $X_1 + \dots + X_j$ donne alors le nombre de succès lors des j premières épreuves.

En notant $(T_n = \infty)$ l'évènement « on obtient strictement moins de n succès », on a :

$$T_n(\Omega) = \{k \in \mathbb{N} \setminus k \geq n\} \cup \{\infty\}.$$

Et pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq n$, on a :

$$(T_n = k) = (X_1 + \dots + X_{k-1} = n-1) \cap (X_k = 1).$$

Les X_j étant indépendantes, le lemme des coalitions permet d'affirmer que $X_1 + \dots + X_{k-1}$ et X_k sont indépendantes, donc :

$$P(T_n = k) = P(X_1 + \dots + X_{k-1} = n-1) P(X_k = 1).$$

Toujours grâce à l'indépendance des X_j , on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$G_{X_1 + \dots + X_{k-1}}(t) = G_{X_1}(t) \times \dots \times G_{X_{k-1}}(t).$$

Comme pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $G_{X_j}(t) = 1 - p + pt$, on obtient :

$$G_{X_1 + \dots + X_{k-1}}(t) = (1 - p + pt)^{k-1} = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} (1-p)^{k-1-j} p^j t^j = \sum_{j=0}^{k-1} P(X_1 + \dots + X_{k-1} = j) t^j.$$

Avec $0 \leq n-1 \leq k-1$, on obtient $P(X_1 + \dots + X_{k-1} = n-1) = \binom{k-1}{n-1} (1-p)^{k-n} p^{n-1}$ et avec $P(X_k = 1) = p$, on obtient, pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq n$:

$$P(T_n = k) = \binom{k-1}{n-1} (1-p)^{k-n} p^n$$

Remarquons que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{+\infty} P(T_n = k) &= \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (1-p)^{k-n} p^n = p^n \sum_{k=n-1}^{+\infty} \binom{k}{n-1} (1-p)^{k-(n-1)} \\ &= \frac{p^n}{(n-1)!} \sum_{k=n-1}^{+\infty} k \times (k-1) \times \dots \times (k-n+2) (1-p)^{k-(n-1)} = \frac{p^n}{(n-1)!} f^{(n-1)}(1-p) \end{aligned}$$

avec $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ et $f^{(n-1)}(x) = \frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$, donc $\sum_{k=n}^{+\infty} P(T_n = k) = \frac{p^n}{(n-1)!} \frac{(n-1)!}{p^n} = 1$ et ainsi :

$$P(T_n = \infty) = 1 - \sum_{k=n}^{+\infty} P(T_n = k) = 0.$$

Ainsi :

$$P(T_n = \infty) = 0, \text{ l'évènement } (T_n = \infty) \text{ est quasi impossible.}$$

6) Avec $P(T_n = \infty) = 0$ et des calculs similaires à ceux de la question précédente, on a pour tout $t \in [-1, 1]$:

$$\begin{aligned} G_{T_n}(t) &= \sum_{k=n}^{+\infty} P(T_n = k) t^k = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (1-p)^{k-n} p^n t^k = t^n \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} ((1-p)t)^{k-n} p^n \\ &= \frac{p^n t^n}{(n-1)!} f^{(n-1)}((1-p)t) = \frac{p^n t^n}{(n-1)! (1-(1-p)t)^n} \end{aligned}$$

Soit pour tout $t \in [-1, 1]$:

$$G_{T_n}(t) = \left(\frac{pt}{1-(1-p)t} \right)^n$$

La fonction G_{T_n} est définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{1-p} \right\}$ et comme $p \neq 0$, $\frac{1}{1-p} \neq 1$. Ainsi, G_{T_n} est deux fois dérivable en 1, donc T_n admet une espérance et une variance.

Pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{1-p} \right\}$, $G_{T_n}'(t) = np^n \frac{t^{n-1}}{(1-(1-p)t)^{n+1}}$ et $G_{T_n}''(t) = np^n \frac{(n-1+2(1-p)t)t^{n-2}}{(1-(1-p)t)^{n+2}}$, donc, $G_{T_n}'(1) = \frac{n}{p}$

et $G_{T_n}''(1) = n \frac{n-1+2(1-p)}{p^2}$, d'où :

$$E(T_n) = \frac{n}{p} \quad \text{et} \quad V(T_n) = n \frac{1-p}{p^2}$$

Exercice 5

1) Posons $q = \frac{\theta}{1+\theta} \in]0, 1[$. On a pour tout $t \in [-1, 1]$, on a $qt \in]-1, 1[$ et :

$$G_Z(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Z = n) t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a \frac{\theta^n}{(1+\theta)^n} t^n = a \sum_{n=0}^{+\infty} (qt)^n = a \frac{1}{1-qt}.$$

On doit avoir $G_Z(1) = 1$, soit $a \frac{1}{1-q} = 1$ et ainsi :

$$a = 1-q \quad \text{et} \quad G_Z : t \mapsto \frac{1-q}{1-qt}.$$

2) Le rayon de convergence de la série entière $\sum (qt)^n$ est $\frac{1}{q} > 1$, donc G_Z est de classe C^∞ en 1. Ainsi, Z admet une espérance et une variance données par :

$$E(Z) = G_Z'(1) = \frac{q}{1-q} \quad V(Z) = G_Z''(1) + G_Z'(1) - G_Z'(1)^2 = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

Comme X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, elles sont positives et on a $0 \leq X \leq Z$.

Comme Z admet une espérance, X (et donc Y) en admet une aussi. Comme X et Y suivent la même loi, on a par linéarité de l'espérance :

$$E(Z) = E(X) + E(Y) = 2E(X) = \frac{q}{1-q}.$$

Ainsi, X admet une espérance et :

$$E(X) = \frac{q}{2(1-q)}$$

- 3) On a vu que Z admet une variance, donc Z^2 admet une espérance. Comme $0 \leq X \leq Z$, on a $0 \leq X^2 \leq Z^2$ et donc X^2 admet une espérance, ce qui permet de conclure que X (et donc Y) admet une variance.

Comme X et Y sont indépendantes, on a :

$$V(Z) = V(X) + V(Y) = 2V(X) = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

Ainsi, X admet une variance et :

$$V(X) = \frac{q}{2(1-q)^2}$$

- 4) On a $G_Z = G_{X+Y} = G_X G_Y = (G_X)^2$ car X et Y sont indépendantes et de même loi.

Or, pour tout $t \in [0, 1]$, $G_X(t) \geq 0$ (et $G_Z(t) \geq 0$), donc $G_X(t) = \sqrt{G_Z(t)}$, soit :

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sqrt{\frac{1-q}{1-qt}} = \sqrt{1-q} (1-qt)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{1-q} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} - k \right) (-qt)^n \right) \\ &= \sqrt{1-q} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2k+1}{2} \right) q^n t^n \right) = \sqrt{1-q} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{q}{4} \right)^n t^n \right) \end{aligned}$$

Ainsi, $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{1-q} \binom{2n}{n} \left(\frac{q}{4} \right)^n t^n$ et donc, par unicité du développement en série entière, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(X=n) = \sqrt{1-q} \binom{2n}{n} \left(\frac{q}{4} \right)^n$$

On a alors :

$$E(X) = G_X'(1) = \frac{q}{2} \sqrt{1-q} (1-q)^{-\frac{3}{2}} = \frac{q}{2(1-q)}$$

$$V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2 = \frac{3q^2}{4} \sqrt{1-q} (1-q)^{-\frac{5}{2}} + \frac{q}{2(1-q)} - \frac{q^2}{4(1-q)^2} = \frac{q}{2(1-q)^2}$$

Ainsi :

Les résultats des deux questions précédentes sont bien vérifiés.

Exercice 6

1) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $0 \leq P(X > n) \leq 1$ donc $0 \leq |P(X > n)t^n| \leq |t|^n$.

Or, si $|t| < 1$, la série géométrique $\sum |t|^n$ converge, donc $\sum |P(X > n)t^n|$ converge.

Ainsi, pour tout $t \in]-1, 1[$, la série $\sum P(X > n)t^n$ est absolument convergente donc convergente et ainsi :

La série entière $\sum P(X > n)t^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1.

2) Soient $N \in \mathbb{N}$ et $t \in]-1, 1[$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N P(X > n)t^n &= \sum_{n=0}^N [1 - P(X \leq n)]t^n = \sum_{n=0}^N t^n - \sum_{n=0}^N P(X \leq n)t^n = \sum_{n=0}^N t^n - \sum_{n=0}^N \left(\sum_{k=0}^n P(X = k) \right) t^n \\ &= \sum_{n=0}^N t^n - \sum_{k=0}^N \sum_{n=k}^N P(X = k)t^n = \sum_{n=0}^N t^n - \sum_{k=0}^N \left(P(X = k) \sum_{n=k}^N t^n \right) = \sum_{n=0}^N t^n - \sum_{k=0}^N \left(P(X = k) t^k \frac{1 - t^{N-k+1}}{1 - t} \right) \end{aligned}$$

Donc :

$$\sum_{n=0}^N P(X > n)t^n = \sum_{n=0}^N t^n - \frac{1}{1-t} \sum_{k=0}^N P(X = k)t^k + \frac{t^{N+1}}{1-t} \sum_{k=0}^N P(X = k).$$

Avec $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1$, on a $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{t^{N+1}}{1-t} \sum_{k=0}^N P(X = k) \right) = 0$ et, quand $N \rightarrow +\infty$, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n - \frac{1}{1-t} \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)t^k.$$

Soit :

$$H(t) = \frac{1 - G_X(t)}{1 - t}$$

3) Si X admet une espérance finie, alors G_X est dérivable à gauche en 1 et $E(X) = G_X'(1)$.

On admet que si G_X est dérivable à gauche en 1, alors X admet une espérance finie et $E(X) = G_X'(1)$.

Ainsi, X admet une espérance finie si et seulement si G_X est dérivable à gauche en 1 et, dans ce cas :

$$E(X) = G_X'(1).$$

Or, on a pour tout $t \in]-1, 1[$, $H(t) = \frac{G_X(t) - 1}{t - 1}$, donc G_X est dérivable à gauche en 1 si et seulement si H admet une limite à gauche en 1 et dans ce cas, $\lim_{t \rightarrow 1^-} H(t) = G_X'(1)$.

Ainsi :

X admet une espérance finie si et seulement si H admet une limite à gauche en 1 et dans ce cas, $E(X) = \lim_{t \rightarrow 1^-} H(t)$.

Exercice 7

1) Pour une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(X = n) = a_n \text{ si et seulement si la suite } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est positive, la série } \sum a_n \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1.$$

Avec $a_n = \int_n^{n+1} f(t) dt$, on a pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^N a_n = \int_0^{N+1} f(t) dt.$$

- Si f est positive, on a bien $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ avec $\int_0^{+\infty} f(t) dt = 1$,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{N+1} f(t) dt \text{ existe et vaut } \int_0^{+\infty} f(t) dt = 1, \text{ donc la série } \sum a_n \text{ converge avec } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1.$$

- Réciproquement, si la série $\sum a_n$ converge avec $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$, alors $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^N f(t) dt = 1$.

Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(\alpha) < 0$. Comme f est décroissante, on a alors pour tout $x \in [\alpha, +\infty[$, $f(x) \leq f(\alpha)$ et donc pour tout entier $N > \alpha$:

$$\int_0^N f(t) dt = \int_0^\alpha f(t) dt + \int_\alpha^N f(t) dt \leq \int_0^\alpha f(t) dt + \int_\alpha^N f(\alpha) dt = \int_0^\alpha f(t) dt + f(\alpha)(N - \alpha).$$

Et $f(\alpha) < 0$ entraîne que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^N f(t) dt = -\infty$: absurde. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \geq 0$ et f est positive. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\int_0^{\lfloor x \rfloor} f(t) dt \leq \int_0^x f(t) dt \leq \int_0^{\lfloor x \rfloor + 1} f(t) dt.$$

Et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{\lfloor x \rfloor} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{\lfloor x \rfloor + 1} f(t) dt = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^N f(t) dt = 1$, le théorème de des gendarmes permet de conclure que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = 1$.

Ainsi, f est positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ avec $\int_0^{+\infty} f(t) dt = 1$.

Finalemment :

Il existe une variable aléatoire X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = \int_n^{n+1} f(t) dt$ si et seulement si la fonction f est positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ avec $\int_0^{+\infty} f(t) dt = 1$.

2) Avec la positivité de f , donc de $t \mapsto tf(t)$ sur $\mathbb{R}_+$, on montre comme dans la question précédente pour f que $t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si la suite $\left(\int_0^N tf(t) dt \right)_{N \in \mathbb{N}}$ converge.

Par ailleurs, X est d'espérance finie si et seulement si la série de terme général $nP(X = n)$ converge.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [n, n+1]$, on a $nf(t) \leq tf(t) \leq (n+1)f(t)$, donc :

$$n \int_n^{n+1} f(t) dt \leq \int_n^{n+1} tf(t) dt \leq (n+1) \int_n^{n+1} f(t) dt.$$

Alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^N n \int_n^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{n=0}^N \int_n^{n+1} t f(t) dt \leq \sum_{n=0}^N (n+1) \int_n^{n+1} f(t) dt.$$

Soit :

$$\sum_{n=0}^N nP(X=n) \leq \int_0^{N+1} t f(t) dt \leq \sum_{n=0}^N nP(X=n) + \int_0^{N+1} f(t) dt \quad (*)$$

Comme la suite $\left(\int_0^N f(t) dt \right)_{N \in \mathbb{N}}$ converge et la série de terme général $nP(X=n)$ est à termes positifs, la double égalité ci-dessus permet d'affirmer que la série de terme général $nP(X=n)$ converge si et si la suite $\left(\int_0^N t f(t) dt \right)_{N \in \mathbb{N}}$ converge et ainsi :

La variable X admet une espérance finie si et seulement si $t \mapsto t f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

En cas de convergence, on peut passer à la limite quand $N \rightarrow +\infty$ dans (*). Avec $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X=n)$

et $\int_0^{+\infty} f(t) dt = 1$, ceci donne :

$$E(X) \leq \int_0^{+\infty} t f(t) dt \leq E(X) + 1$$

- 3) La variable X admet une variance finie si et seulement si X^2 admet une espérance finie, donc si et seulement si la série de terme général $n^2 P(X=n)$ converge.

Avec le même raisonnement que dans la question précédente, on obtient pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^N n^2 P(X=n) \leq \int_0^{N+1} t^2 f(t) dt \leq \sum_{n=0}^N (n+1)^2 P(X=n) \quad (**)$$

$$\text{Et } \sum_{n=0}^N (n+1)^2 P(X=n) = \sum_{n=0}^N n^2 P(X=n) + 2 \sum_{n=0}^N n P(X=n) + \sum_{n=0}^N P(X=n).$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $nP(X=n) \leq n^2 P(X=n)$, la convergence de la série $\sum n^2 P(X=n)$ entraîne celle de $\sum nP(X=n)$, donc, comme dans la question précédente, la double inégalité (**) permet d'affirmer que $\sum n^2 P(X=n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_0^N t^2 f(t) dt \right)_{N \in \mathbb{N}}$ converge, donc si et seulement si $t \mapsto t^2 f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (comme dans la question 1 avec la positivité de f).

Finalement :

La variable X admet une variance finie si et seulement si $t \mapsto t^2 f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

En cas de convergence, on peut passer à la limite quand $N \rightarrow +\infty$ dans (**), ce qui donne :

$$E(X^2) \leq \int_0^{+\infty} t^2 f(t) dt \leq E(X^2) + 2E(X) + 1.$$

Avec la formule de Kœnig-Huygens, on obtient :

$$V(X) \leq \int_0^{+\infty} t^2 f(t) dt \leq V(X) + (E(X) + 1)^2$$

Exercice 8

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit une loi de Poisson de paramètre λ_n , donc $P(X_n = 0) = e^{-\lambda_n} \frac{\lambda_n^0}{0!} = e^{-\lambda_n}$ et :

$$P(X_n \neq 0) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - e^{-\lambda_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda_n.$$

Or, $\sum \lambda_n$ est une série convergente à termes positifs, donc par comparaison :

La série $\sum P(X_n \neq 0)$ converge.

2) Posons $A_n = \bigcup_{k \geq n} (X_k \neq 0)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $A_n = (X_n \neq 0) \cup A_{n+1}$, donc $A_{n+1} \subset A_n$ et par continuité décroissante, on a :

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{k \geq n} (X_k \neq 0)\right) = P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n).$$

Or, la série $\sum P(X_n \neq 0)$ converge, donc par sous-additivité :

$$0 \leq P(A_n) = P\left(\bigcup_{k \geq n} (X_k \neq 0)\right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P(X_k \neq 0).$$

Comme la série $\sum P(X_n \neq 0)$ converge, son reste $\sum_{k=n}^{+\infty} P(X_k \neq 0)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini et, par le théorème des gendarmes, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = 0$ et finalement, on a bien :

$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{k \geq n} (X_k \neq 0)\right) = 0$

3) Comme les variables X_n suivent des lois de Poisson, elles sont toutes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, la suite $(X_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc une suite d'entiers naturels.

Pour que la série $\sum X_n(\omega)$ converge, il faut au moins que la suite $(X_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit de limite nulle. Or, toute suite d'entiers de limite nulle est nulle à partir d'un certain rang (car $|X_n(\omega)| \leq \frac{1}{2}$ à partir d'un certain rang).

Ainsi, pour que la série $\sum X_n(\omega)$ converge, il faut que la suite $(X_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit nulle à partir d'un certain rang.

Réciproquement, si tel est le cas, la série converge (la suite des sommes partielles est stationnaire).

Ainsi :

La série $\sum X_n(\omega)$ converge si et seulement si $(X_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est nulle à partir d'un certain rang.

Ainsi, on cherche la probabilité qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(X_k = 0)$ pour tout $k \geq n$, autrement dit, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que l'évènement $\bigcap_{k \geq n} (X_k = 0)$ se réalise. On cherche donc la probabilité de $\bigcap_{k \geq 1} (X_k = 0)$ ou $\bigcap_{k \geq 2} (X_k = 0)$ ou ... ou $\bigcap_{k \geq n} (X_k = 0)$ ou ..., autrement dit $P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{k \geq n} (X_k = 0)\right)$.

Or :

$$\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{k \geq n} (X_k = 0)} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{\bigcap_{k \geq n} (X_k = 0)} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{k \geq n} \overline{(X_k = 0)} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{k \geq n} (X_k \neq 0).$$

Ainsi :

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{k \geq n} (X_k = 0)\right) = 1 - P\left(\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{k \geq n} (X_k = 0)}\right) = 1 - P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{k \geq n} (X_k \neq 0)\right) = 1.$$

Finalement, la probabilité que la série $\sum X_n$ converge est 1, donc :

La série $\sum X_n$ est presque sûrement convergente.

4) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = P(Y = n)$ et $q_n = P(Z = n)$. On a pour tout $t \in [0, 1]$:

$$G_Y(t) - G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = n)t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} P(Z = n)t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} q_n t^n.$$

Soit :

$$G_Y(t) - G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (p_n - q_n) t^n.$$

Par ailleurs, Y et Z sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc :

$$P(Y = Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = n, Z = n).$$

Et :

$$P(Y \neq Z) = \overline{P(Y = Z)} = 1 - P(Y = Z) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = n, Z = n) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} p_n - \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = n, Z = n) \\ \sum_{n=0}^{+\infty} q_n - \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = n, Z = n) \end{cases}$$

Soit :

$$P(Y \neq Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} [p_n - P(Y = n, Z = n)] = \sum_{n=0}^{+\infty} [q_n - P(Y = n, Z = n)].$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(Y = n, Z = n) \subset (Z = n)$ et $(Y = n, Z = n) \subset (Y = n)$, on a :

- $P(Y = n, Z = n) \leq p_n$, donc $-[q_n - P(Y = n, Z = n)] \leq p_n - q_n$;
- $P(Y = n, Z = n) \leq q_n$, donc $p_n - q_n \leq p_n - P(Y = n, Z = n)$.

Alors, pour tout $t \in [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$-[q_n - P(Y = n, Z = n)]t^n \leq (p_n - q_n)t^n \leq [p_n - P(Y = n, Z = n)]t^n.$$

Or, $q_n - P(Y = n, Z = n) \geq 0$, $p_n - P(Y = n, Z = n) \geq 0$ et $0 \leq t^n \leq 1$, donc :

$$\begin{aligned} [p_n - P(Y = n, Z = n)]t^n &\leq p_n - P(Y = n, Z = n) \\ -[q_n - P(Y = n, Z = n)] &\leq -[q_n - P(Y = n, Z = n)]t^n \end{aligned}$$

D'où, pour tout $t \in [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$-[q_n - P(Y = n, Z = n)] \leq (p_n - q_n)t^n \leq p_n - P(Y = n, Z = n).$$

Et en sommant sur n , on obtient pour tout $t \in [0,1]$:

$$-P(Y \neq Z) \leq G_Y(t) - G_X(t) \leq P(Y \neq Z).$$

Et ainsi, pour tout $t \in [0,1]$:

$$|G_Y(t) - G_X(t)| \leq P(Y \neq Z)$$

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

On peut alors appliquer le résultat précédent à S_n et X , ce qui donne pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0,1]$:

$$|G_{S_n}(t) - G_X(t)| \leq P(S_n \neq X) \quad (1)$$

L'évènement $(S_n \neq X)$ se récrit $\left(\sum_{k=1}^n X_k \neq \sum_{k=1}^{+\infty} X_k\right) = \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} X_k \neq 0\right)$.

Or, comme les X_k sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a, pour $\omega \in \Omega$, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} X_k(\omega) \neq 0$ si et seulement si l'un des $X_k(\omega)$

ne s'annule pas, donc $(S_n \neq X) = \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} X_k \neq 0\right) = \bigcup_{k \geq n+1} (X_k \neq 0)$.

Or, on a vu plus haut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k \geq n} (X_k \neq 0)\right) = 0$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n \neq X) = 0.$$

Avec (1), le théorème des gendarmes permet alors de conclure que pour tout $t \in [0,1]$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G_{S_n}(t) = G_X(t).$$

Or, les variables $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ donc $S_n = X_1 + \dots + X_n$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$.

Alors, $G_{S_n} : t \mapsto e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)(t-1)}$ et, avec $\lambda = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n$, on a pour tout $t \in [0,1]$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G_{S_n}(t) = e^{\lambda(t-1)}.$$

Ainsi, pour tout $t \in [0,1]$, $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$, donc la série génératrice de X est celle de la loi de Poisson de paramètre λ , donc :

$$X = \sum_{n=1}^{+\infty} X_n \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } \lambda = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n.$$

Exercice 9

1) Par définition, X est de type 2 s'il existe un entier $r \in \llbracket 0, 1 \rrbracket$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k - r$ ne soit pas un multiple de 2, on a $P(X = k) = 0$, autrement dit, si $P(X = 2k + 1) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ ($r = 0$) ou $P(X = 2k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ ($r = 1$).

- Dans le premier cas, $G_X : t \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = 2k) t^{2k}$ est paire, donc $G_X(-1) = G_X(1) = 1$.
- Dans le second cas, $G_X : t \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = 2k + 1) t^{2k+1}$ est impaire, donc $G_X(-1) = -G_X(1) = -1$.

Donc, si X est de type 2, on a $|G_X(-1)| = 1$

Réciproquement, supposons que $|G_X(-1)| = 1$. On a à nouveau deux cas.

- Si $G_X(-1) = 1 = G_X(1)$, on a alors :

$$G_X(1) - G_X(-1) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) - \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) (-1)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) (1 - (-1)^k) = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = 2k + 1) = 0.$$

Et comme $P(X = 2k + 1) \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ceci implique $P(X = 2k + 1) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc que X est de type 2 avec $r = 0$.

- Si $G_X(-1) = -1 = -G_X(1)$, on a alors :

$$G_X(1) + G_X(-1) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) + \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) (-1)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) (1 + (-1)^k) = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = 2k) = 0.$$

Et comme $P(X = 2k) \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ceci implique $P(X = 2k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc que X est de type 2 avec $r = 1$.

Finalement, on a bien :

$X \text{ est de type 2 équivaut à } |G_X(-1)| = 1.$

2) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On a $G_X(e^{i2\pi/m}) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) e^{i \frac{2k\pi}{m}}$.

Comme la série $\sum P(X = k)$ converge, $\sum P(X = k) e^{i2k\pi/m}$ est absolument convergente, donc on peut réordonner les termes :

$$G_X(e^{i2\pi/m}) = \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{Q=0}^{+\infty} P(X = Qm + r) e^{i \frac{2(Qm+r)\pi}{m}} = \sum_{r=0}^{m-1} \left(e^{i \frac{2r\pi}{m}} \sum_{Q=0}^{+\infty} P(X = Qm + r) \right) = \sum_{r=0}^{m-1} S_r e^{i \frac{2r\pi}{m}}.$$

avec pour tout $r \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$, $S_r = \sum_{Q=0}^{+\infty} P(X = Qm + r) \geq 0$.

Alors :

$$\left| G_X(e^{i2\pi/m}) \right|^2 = G_X(e^{i2\pi/m}) \overline{G_X(e^{i2\pi/m})} = \left(\sum_{r=0}^{m-1} S_r e^{i \frac{2r\pi}{m}} \right) \left(\sum_{q=0}^{m-1} S_q e^{-i \frac{2q\pi}{m}} \right) = \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{q=0}^{m-1} S_r S_q e^{i \frac{2(r-q)\pi}{m}}$$

Et $G_X(1) = 1 = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{r=0}^{m-1} S_r$, donc :

$$G_X(1)^2 = \left(\sum_{r=0}^{m-1} S_r \right) \left(\sum_{q=0}^{m-1} S_q \right) = \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{q=0}^{m-1} S_r S_q$$

Ainsi, on a $\left|G_X\left(e^{i2\pi/m}\right)\right|=1=G_X(1)$ si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\left|G_X\left(e^{i2\pi/m}\right)\right|=1 &\Leftrightarrow \left|G_X\left(e^{i2\pi/m}\right)\right|^2=G_X(1)^2 \\
&\Leftrightarrow \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{q=0}^{m-1} S_r S_q e^{i\frac{2(r-q)\pi}{m}} = \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{q=0}^{m-1} S_r S_q \\
&\Leftrightarrow \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{q=0}^{m-1} S_r S_q (e^{i\frac{2(r-q)\pi}{m}} - 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{0 \leq r < q \leq m-1} S_r S_q (e^{i\frac{2(r-q)\pi}{m}} - 1) + \sum_{0 \leq q < r \leq m-1} S_r S_q (e^{i\frac{2(r-q)\pi}{m}} - 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{0 \leq r < q \leq m-1} S_r S_q (e^{i\frac{2(r-q)\pi}{m}} - 1) + S_q S_r (e^{i\frac{2(q-r)\pi}{m}} - 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{0 \leq r < q \leq m-1} S_r S_q (e^{i\frac{2(r-q)\pi}{m}} + e^{-i\frac{2(q-r)\pi}{m}} - 2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{0 \leq r < q \leq m-1} S_r S_q \left(2 \cos\left(\frac{2(r-q)\pi}{m}\right) - 2\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow -2 \sum_{0 \leq r < q \leq m-1} S_r S_q \left(1 - \cos\left(\frac{2(r-q)\pi}{m}\right)\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{0 \leq r < q \leq m-1} S_r S_q 2 \sin^2\left(\frac{(r-q)\pi}{m}\right) = 2 \sum_{0 \leq r < q \leq m-1} S_r S_q \sin^2\left(\frac{(q-r)\pi}{m}\right) = 0
\end{aligned}$$

Or, tous les termes de la somme sont positifs, donc :

$$\left|G_X\left(e^{i2\pi/m}\right)\right|=1 \Leftrightarrow \forall r, q \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, r < q, S_r S_q \sin^2\left(\frac{(q-r)\pi}{m}\right) = 0.$$

Or, si $r, q \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$ avec $r < q$, on a $0 < \frac{(q-r)\pi}{m} < \pi$ donc $\sin^2\left(\frac{(q-r)\pi}{m}\right) \neq 0$ et ainsi :

$$\left|G_X\left(e^{i2\pi/m}\right)\right|=1 \Leftrightarrow \forall r, q \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, r < q, S_r S_q = 0.$$

Ceci équivaut au fait qu'au plus l'un des S_r est non nul, mais comme $\sum_{r=0}^{m-1} S_r = 1$, ils ne sont pas tous nuls et ainsi :

$$\left|G_X\left(e^{i2\pi/m}\right)\right|=1 \Leftrightarrow \exists ! r \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, S_r \neq 0.$$

Or, pour $q \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$, comme les probabilités sont toutes positives, on a $S_q = \sum_{Q=0}^{+\infty} P(X = Qm + q) = 0$ si et seulement si $P(X = Qm + q) = 0$ pour tout $Q \in \mathbb{N}$. Ainsi :

$$\left|G_X\left(e^{i2\pi/m}\right)\right|=1 \Leftrightarrow \exists ! r \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, \forall q \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, \forall Q \in \mathbb{N}, P(X = Qm + q) = 0.$$

Ceci revient à dire que :

$X \text{ est de type } m \text{ équivaut à } \left|G_X\left(e^{i2\pi/m}\right)\right|=1.$

- 3) On vient de voir si X est de type m , avec $m \in \mathbb{N}^*$, alors il existe un unique $r \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$ tel que $S_r \neq 0$ et donc tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k-r$ ne soit pas un multiple de m , on a $P(X=k)=0$. Ainsi :

Si r existe (c'est-à-dire si X est de type m avec $m \in \mathbb{N}^*$), alors il est unique.

- 4) Comme X et Y sont indépendantes, on a $G_{X+Y} = G_X G_Y$. Alors :

$$\left| G_{X+Y}(e^{i2\pi/m}) \right| = 1 \Leftrightarrow \left| G_X(e^{i2\pi/m}) G_Y(e^{i2\pi/m}) \right| = \left| G_X(e^{i2\pi/m}) \right| \left| G_Y(e^{i2\pi/m}) \right| = 1.$$

Or, quelles que soit la VAD X et quel que soit $m \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum P(X=k) e^{i2k\pi/m}$ est absolument convergente, donc on peut écrire :

$$\left| G_X(e^{i2\pi/m}) \right| = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) e^{i \frac{2k\pi}{m}} \right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) e^{i \frac{2k\pi}{m}} = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 1.$$

Donc, $0 \leq \left| G_X(e^{i2\pi/m}) \right| \leq 1$ et de même $0 \leq \left| G_Y(e^{i2\pi/m}) \right| \leq 1$. Alors :

$$\left| G_X(e^{i2\pi/m}) \right| \left| G_Y(e^{i2\pi/m}) \right| = 1 \Leftrightarrow \left| G_X(e^{i2\pi/m}) \right| = \left| G_Y(e^{i2\pi/m}) \right| = 1.$$

Ainsi :

$$\left| G_{X+Y}(e^{i2\pi/m}) \right| = 1 \Leftrightarrow \left| G_X(e^{i2\pi/m}) \right| = \left| G_Y(e^{i2\pi/m}) \right| = 1.$$

Et d'après la question 2, ceci veut dire que :

$X+Y$ est de type m si et seulement si X et Y le sont.

- 5) Pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que m ne divise pas $k-r(X)$, autrement dit tel que le reste de la division euclidienne de k par m n'est pas $r(X)$, alors $P(X=k)=0$, donc pour tout $t \in [-1,1]$:

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) t^k = \sum_{q=0}^{+\infty} P(X=qm+r(X)) t^{qm+r(X)} = t^{r(X)} \sum_{q=0}^{+\infty} P(X=qm+r(X)) t^{qm}.$$

De même, $G_Y(t) = t^{r(Y)} \sum_{q=0}^{+\infty} P(Y=qm+r(Y)) t^{qm}$ et $G_{X+Y}(t) = t^{r(X+Y)} \sum_{q=0}^{+\infty} P(Y=qm+r(X+Y)) t^{qm}$.

Or :

$$\begin{aligned} G_{X+Y}(t) &= G_X(t) G_Y(t) = \left(t^{r(X)} \sum_{q=0}^{+\infty} P(X=qm+r(X)) (t^m)^q \right) \left(t^{r(Y)} \sum_{q=0}^{+\infty} P(Y=qm+r(Y)) (t^m)^q \right) \\ &= t^{r(X)+r(Y)} \sum_{q=0}^{+\infty} \left[\sum_{\ell=0}^q P(X=qm+r(X)) P(Y=\ell m+r(Y)) \right] (t^m)^q \end{aligned}$$

En posant $\alpha_q = \left[\sum_{\ell=0}^q P(X=qm+r(X)) P(Y=\ell m+r(Y)) \right]$ et $\beta_q = P(Y=qm+r(X+Y))$ pour tout $q \in \mathbb{N}$,

on a pour tout $t \in [-1,1]$:

$$G_{X+Y}(t) = \sum_{q=0}^{+\infty} \alpha_q t^{qm+r(X)+r(Y)} = \sum_{q=0}^{+\infty} \beta_q t^{qm+r(X+Y)}.$$

En posant $N = |r(X) + r(Y) - r(X + Y)|$, on obtient pour tout $t \in [-1, 1]$:

$$\sum_{q=0}^{+\infty} \alpha_q t^{qm+N} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \beta_\ell t^{\ell m} \quad \text{quand } r(X) + r(Y) - r(X + Y) \geq 0$$

ou

$$\sum_{q=0}^{+\infty} \alpha_q t^{qm} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \beta_\ell t^{\ell m+N} \quad \text{quand } r(X) + r(Y) - r(X + Y) \leq 0$$

Dans les deux cas, l'unicité du développement en série entière implique alors que tous les entiers de la forme $km + N$ avec $k \in \mathbb{N}$ sont divisibles par m , autrement dit que N est divisible par m .

Ainsi, $r(X + Y) - (r(X) + r(Y))$ est divisible par m , ce qui prouve que :

$$r(X + Y) \equiv r(X) + r(Y) \pmod{m}$$