

Corrigés des TD du chapitre 16

Exercice 1

1) L'application $\varphi: (P, Q) \mapsto (P | Q) = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$ est bien définie sur $(\mathbb{R}_n[X])^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Elle est clairement symétrique (commutativité du produit dans $\mathbb{R}$) et bilinéaire (distributivité du produit sur l'addition dans $\mathbb{R}$).

De plus, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $(P | P) = \sum_{k=0}^n P(a_k)^2 \geq 0$, donc φ est positive et donc, φ est produit scalaire si et seulement si φ est définie. Or, on a :

$$(P | P) = \sum_{k=0}^n P(a_k)^2 = 0 \Leftrightarrow P(a_0) = P(a_1) = \dots = P(a_n) = 0.$$

Donc, $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont racines de P . Si les a_k sont distincts deux à deux, alors $P \in \mathbb{R}_n[X]$ possède $n+1$ racine distincts, donc P est nul. Dans ce cas, φ est définie.

Par contre, si les a_k ne sont pas distincts deux à deux, quitte à renuméroter, on peut supposer que $a_0 = a_1$,

et dans ce cas, avec $P = \prod_{k=1}^n (X - a_k) \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $(P | P) = 0$ avec $P \neq 0$, donc φ n'est pas définie.

Finalement, φ est définie si et seulement si les a_k sont distincts deux à deux, et donc :

$$(P, Q) \mapsto (P | Q) = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k) \text{ est produit scalaire si et seulement si les } a_k \text{ sont distincts deux à deux.}$$

2) Remarquons que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $L_i(a_k) = \delta_{i,k}$ (le symbole de Kronecker).

On a pour tous $i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$(L_i | L_j) = \sum_{k=0}^n L_i(a_k)L_j(a_k) = \sum_{k=0}^n \delta_{i,k}\delta_{j,k} = \delta_{i,j}.$$

Donc, la famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est orthonormée et comme elle contient $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ polynômes :

La famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

3) Remarquons déjà que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\sum_{k=0}^n P(a_k)^2 = \|P\|^2$ (où $\|\cdot\|$ est la norme associée au produit scalaire utilisé ici), donc $\inf_{P \in F} \left(\sum_{k=0}^n P(a_k)^2 \right) = \inf_{P \in F} (\|P\|^2)$.

Par ailleurs, si on pose $L = L_0 + L_1 + \dots + L_n$, on a pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$\sum_{k=0}^n P(a_k) = \sum_{k=0}^n L(a_k)P(a_k) = (L | P).$$

Donc, $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid (L \mid P) = 1\}$. Mais, $(L \mid L) = n+1$, soit $\left(L \mid \frac{1}{n+1}L\right) = 1$ (donc $\frac{1}{n+1}L \in F$) et :

$$F = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid (L \mid P) = \left(L \mid \frac{1}{n+1}L\right)\right\} = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \left(L \mid P - \frac{1}{n+1}L\right) = 0\right\} = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid L \perp P - \frac{1}{n+1}L\right\}$$

Alors, pour tout $P \in F$, on a $L \perp P - \frac{1}{n+1}L$, donc $\frac{1}{n+1}L \perp P - \frac{1}{n+1}L$ et, d'après le théorème de Pythagore :

$$\|P\|^2 = \left\|\frac{1}{n+1}L + P - \frac{1}{n+1}L\right\|^2 = \left\|\frac{1}{n+1}L\right\|^2 + \left\|P - \frac{1}{n+1}L\right\|^2 \geq \left\|\frac{1}{n+1}L\right\|^2 = \frac{1}{n+1} \Rightarrow \inf_{P \in F} (\|P\|^2) \geq \frac{1}{n+1}.$$

Or, $\frac{1}{n+1}L \in F$, donc $\inf_{P \in F} (\|P\|^2) \leq \frac{1}{n+1}$ et finalement :

$$\boxed{\inf_{P \in F} \left(\sum_{k=0}^n P(a_k)^2\right) = \inf_{P \in F} (\|P\|^2) = \min_{P \in F} (\|P\|^2) = \frac{1}{n+1}}$$

Exercice 2

1) On a :

- $(\cdot \mid \cdot)$ est clairement symétrique et bilinéaire du fait de la linéarité de l'intégrale.
- De plus, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $(P \mid P) = \int_{-1}^1 P^2 \varphi$.
Or, φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, donc $P^2 \varphi \geq 0$ sur $[-1;1]$ et par positivité de l'intégrale, on a $(P \mid P) \geq 0$ donc $(\cdot \mid \cdot)$ est positive.
- On a :

$$\begin{aligned} (P \mid P) = \int_{-1}^1 P^2 \varphi = 0 &\Leftrightarrow P^2 \varphi = 0 \text{ sur } [-1;1] \text{ (car } P^2 \varphi \text{ est continue et positive sur } [-1;1]) \\ &\Leftrightarrow P = 0 \text{ sur } [-1;1] \text{ (car } \varphi \text{ est à valeurs dans } \mathbb{R}_+^* \text{ donc ne s'annule pas)} \\ &\Leftrightarrow P = 0 \text{ (car } P \text{ admet une infinité de racines donc est nul)} \end{aligned}$$

Ainsi, $(\cdot \mid \cdot)$ est définie.

Finalement :

$$\boxed{(\cdot \mid \cdot) \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

2) Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de E permet de construire une base orthonormée $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ telle que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P_k = \frac{R_k}{\|R_k\|}$ avec $R_0 = 1$ et pour tout $k \geq 1$, $R_k = X^k - (X^k \mid P_{k-1})P_{k-1} - \dots - (X^k \mid P_0)P_0$.

Alors, par construction, le terme de plus haut degré de R_k est X^k , donc pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\deg P_k = k$ et le coefficient dominant de P_k est $\frac{1}{\|R_k\|} > 0$ et ainsi, il existe bien une base orthonormée de E , échelonnée en degrés et constituée de polynômes de coefficients dominants strictement positifs.

Supposons maintenant que l'on ait deux telles bases : $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ et $(Q_0, Q_1, \dots, Q_n)$.

Notons pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_k > 0$ et $b_k > 0$ les coefficients dominants respectifs de P_k et Q_k .

Montrons par récurrence forte que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $Q_k = P_k$.

- Pour $k = 0$, P_0 et Q_0 sont tous deux de degré 0, donc $Q_0 = \lambda P_0$ avec $b_0 = \lambda a_0$ donc $\lambda > 0$, et :

$$1 = (Q_0 | Q_0) = \lambda^2 (P_0 | P_0) = \lambda^2 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ (car } \lambda > 0 \text{)}.$$

Ainsi, $Q_0 = P_0$ et la propriété est au rang 0.

- Supposons la propriété vraie jusqu'à un certain rang $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Alors, $R = \frac{Q_{k+1}}{b_{k+1}} - \frac{P_{k+1}}{a_{k+1}}$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à k donc $R = \sum_{i=0}^k \lambda_i P_i$.

Mais alors, pour tout $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $Q_i = P_i$ et :

$$\lambda_i = (R | P_i) = \left(\frac{Q_{k+1}}{b_{k+1}} - \frac{P_{k+1}}{a_{k+1}} \middle| P_i \right) = \frac{1}{b_{k+1}} (Q_{k+1} | P_i) - \frac{1}{a_{k+1}} (P_{k+1} | P_i) = \frac{1}{b_{k+1}} (Q_{k+1} | Q_i) - \frac{1}{a_{k+1}} (P_{k+1} | P_i) = 0.$$

Donc $R = 0$, soit $Q_{k+1} = \lambda P_{k+1}$ avec $\lambda = \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}} > 0$. On obtient $\lambda = 1$ comme plus haut.

Ainsi, $Q_{k+1} = P_{k+1}$ et la propriété est donc vraie au rang $k+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc elle est vraie pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Ainsi :

Il existe une unique base orthonormée de E , échelonnée en degrés et constituée de polynômes de coefficients dominants strictement positifs.

3) a. Le terme de plus haut degré de $(X^2 - 1)^k$ est X^{2k} donc le terme de plus haut degré de Q_k est :

$$(X^{2k})^{(k)} = 2k(2k-1)\dots(k+1)X^k = \frac{(2k)!}{k!} X^k$$

Ainsi :

Q_k est de degré k et de coefficient dominant $\frac{(2k)!}{k!}$.

b. La famille $(Q_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est donc une famille échelonnée en degrés de $n+1$ polynômes de $E = \mathbb{R}_n[X]$, qui est de dimension $n+1$. Ainsi :

$(Q_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base de E .

c. Posons pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P_k = (X^2 - 1)^k$. On a alors, $Q_k = P_k^{(k)}$.

Remarquons que comme -1 et 1 sont racines de multiplicité k dans P_k , ces deux réels sont racines de $P_k^{(p)}$ pour tout entier compris entre 0 et $k-1$.

Alors, pour tout $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$, on a, en intégrant deux fois par parties :

$$\begin{aligned} (Q_i | Q_j) &= \int_{-1}^1 P_i^{(i)}(t) P_j^{(j)}(t) dt = \left[P_i^{(i)}(t) P_j^{(j-1)}(t) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 P_i^{(i+1)}(t) P_j^{(j-1)}(t) dt = - \int_{-1}^1 P_i^{(i+1)}(t) P_j^{(j-1)}(t) dt \\ &= - \left[P_i^{(i+2)}(t) P_j^{(j-1)}(t) \right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 P_i^{(i+2)}(t) P_j^{(j-2)}(t) dt = \int_{-1}^1 P_i^{(i+2)}(t) P_j^{(j-2)}(t) dt \end{aligned}$$

En continuant ainsi, on obtient pour tout $p \leq j$, $(Q_i | Q_j) = \int_{-1}^1 P_i^{(i+p)}(t) P_j^{(j-p)}(t) dt$ et en particulier pour $p = j$:

$$(Q_i | Q_j) = \int_{-1}^1 P_i^{(i+j)}(t) P_j(t) dt.$$

Mais, si $i < j$, alors $i + j > 2i = \deg P_i$, donc $P_i^{(i+j)} = 0$ et ainsi, $(Q_i | Q_j) = 0$.

Par symétrie du produit scalaire, on a aussi $(Q_i | Q_j) = 0$ pour $i > j$ et ainsi, $(Q_i | Q_j) = 0$ pour $i \neq j$ donc :

La famille $(Q_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base orthogonale de E .

Exercice 3

L'identité du parallélogramme est $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$, qui est donc vérifiée ici pour tout $(x, y) \in E^2$. Montrer que la norme est hilbertienne revient à montrer qu'elle dérive d'un produit scalaire et si tel est le cas, alors ce produit scalaire et la norme vérifient les identités de polarisation.

En particulier, pour tout $(x, y) \in E^2$, $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4(x | y)$, soit :

$$(x | y) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

Il faut donc montrer que $(x, y) \mapsto (x | y) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$ est un produit scalaire sur E .

Cette application va de E^2 dans $\mathbb{R}$ et est symétrique ($\|x + y\| = \|y + x\|$ et $\|x - y\| = \|y - x\|$).

De plus, pour tout $x \in E$, $(x | x) = \frac{1}{4} (\|x + x\|^2 - \|x - x\|^2) = \|x\|^2 \geq 0$ et $(x | x) = \|x\|^2 = 0$ équivaut à $x = 0$ (séparation de la norme).

Reste à prouver la bilinéarité, donc la linéarité à gauche (la symétrie entraînera alors la linéarité à droite).

Nous allons procéder en deux temps.

Soient $(x, x', y) \in E^3$. On a :

$$4(x + x' | y) = \|x + x' + y\|^2 - \|x + x' - y\|^2 = \left\| x + \frac{1}{2}y + x' + \frac{1}{2}y \right\|^2 - \left\| x - \frac{1}{2}y + x' - \frac{1}{2}y \right\|^2.$$

Et, avec l'identité du parallélogramme :

$$\begin{aligned} \left\| x + \frac{1}{2}y + x' + \frac{1}{2}y \right\|^2 &= 2 \left(\left\| x + \frac{1}{2}y \right\|^2 + \left\| x' + \frac{1}{2}y \right\|^2 \right) - \left\| x + \frac{1}{2}y - x' - \frac{1}{2}y \right\|^2 = 2 \left(\left\| x + \frac{1}{2}y \right\|^2 + \left\| x' + \frac{1}{2}y \right\|^2 \right) - \|x - x'\|^2 \\ \left\| x - \frac{1}{2}y + x' - \frac{1}{2}y \right\|^2 &= 2 \left(\left\| x - \frac{1}{2}y \right\|^2 + \left\| x' - \frac{1}{2}y \right\|^2 \right) - \left\| x - \frac{1}{2}y - x' + \frac{1}{2}y \right\|^2 = 2 \left(\left\| x - \frac{1}{2}y \right\|^2 + \left\| x' - \frac{1}{2}y \right\|^2 \right) - \|x - x'\|^2 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} 4(x+x' \mid y) &= 2\left(\left\|x+\frac{1}{2}y\right\|^2 + \left\|x'+\frac{1}{2}y\right\|^2\right) - 2\left(\left\|x-\frac{1}{2}y\right\|^2 + \left\|x'-\frac{1}{2}y\right\|^2\right) \\ &= 2\left(\left\|x+\frac{1}{2}y\right\|^2 - \left\|x-\frac{1}{2}y\right\|^2 + \left\|x'+\frac{1}{2}y\right\|^2 - \left\|x'-\frac{1}{2}y\right\|^2\right). \end{aligned}$$

Remarquons que l'identité du parallélogramme peut aussi s'écrire pour tout $(X, Y) \in E^2$:

$$\|X\|^2 + \|Y\|^2 = \frac{1}{2}(\|X+Y\|^2 + \|X-Y\|^2).$$

Donc :

$$\begin{cases} \left\|x+\frac{1}{2}y\right\|^2 + \left\|\frac{1}{2}y\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 + \|x\|^2) \\ \left\|x-\frac{1}{2}y\right\|^2 + \left\|\frac{1}{2}y\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|x-y\|^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left\|x+\frac{1}{2}y\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 + \|x\|^2) - \left\|\frac{1}{2}y\right\|^2 \\ \left\|x-\frac{1}{2}y\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x-y\|^2 + \|x\|^2) - \left\|\frac{1}{2}y\right\|^2 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\left\|x+\frac{1}{2}y\right\|^2 - \left\|x-\frac{1}{2}y\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = 2(x \mid y).$$

On a bien sûr de même $\left\|x'+\frac{1}{2}y\right\|^2 - \left\|x'-\frac{1}{2}y\right\|^2 = 2(x' \mid y)$ et donc :

$$4(x+x' \mid y) = 2[2(x \mid y) + 2(x' \mid y)] = 4[(x \mid y) + (x' \mid y)].$$

Ainsi, pour tout $(x, x', y) \in E^3$:

$$(x+x' \mid y) = (x \mid y) + (x' \mid y) \quad \textbf{(1)}.$$

Soit maintenant $(x, y) \in E^2$. Posons pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f(\lambda) = (\lambda x \mid y) = \frac{1}{4}(\|\lambda x + y\|^2 - \|\lambda x - y\|^2).$$

L'application f est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

De plus, comme $X \mapsto \|X\|$ est continue sur E (car 1-lipschizienne du fait de l'inégalité triangulaire), f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que différences de telles fonctions.

Enfin, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a d'après le résultat **(1)** :

$$f(\lambda + \mu) = ((\lambda + \mu)x \mid y) = (\lambda x + \mu x \mid y) = (\lambda x \mid y) + (\mu x \mid y) = f(\lambda) + f(\mu).$$

Ainsi, f est une application continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(\lambda + \mu) = f(\lambda) + f(\mu)$ pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, donc f est linéaire (*exercice classique de première année* : on prouve que pour tout $(\lambda, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, $f(n\lambda) = nf(\lambda)$, puis on évalue f sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, puis $\mathbb{R}$ par continuité, grâce à densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$).

Il existe donc un réel fixé a tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda) = a\lambda$ et $a = f(1) = (x \mid y)$, donc pour tout $(x, y) \in E^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$(\lambda x \mid y) = \lambda(x \mid y) \quad \textbf{(2)}.$$

Les résultats (1) et (2) prouvent que $(x, y) \mapsto (x | y)$ est linéaire à gauche et ainsi, $(x, y) \mapsto (x | y)$ est un produit scalaire, donc :

Toute norme de E vérifiant l'identité du parallélogramme est hilbertienne.

Exercice 4

Si la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est liée, alors on a $|\det_B(x_1, x_2, \dots, x_n)| = 0$ et l'inégalité est immédiate.

Supposons que la famille est libre, alors c'est une base de E (qui est de dimension n) et les x_k sont tous non nuls. Par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on construit une nouvelle base orthonormée de E , $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ avec pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\epsilon_{k+1} = x_{k+1} - (x_{k+1} | e_1)e_1 - (x_{k+1} | e_2)e_2 - \dots - (x_{k+1} | e_k)e_k \text{ et } e_{k+1} = \frac{1}{\|\epsilon_{k+1}\|} \epsilon_{k+1}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \det_B(e_1, e_2, \dots, e_n) &= \det_B\left(e_1, e_2, \dots, \frac{1}{\|\epsilon_n\|} [x_n - (x_n | e_1)e_1 - (x_n | e_2)e_2 - \dots - (x_n | e_{n-1})e_{n-1}]\right) \\ &= \det_B\left(e_1, e_2, \dots, \frac{1}{\|\epsilon_n\|} x_n\right) = \frac{1}{\|\epsilon_n\|} \det_B(e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, x_n) \\ &= \frac{1}{\|\epsilon_n\|} \det_B\left(e_1, e_2, \dots, \frac{1}{\|\epsilon_{n-1}\|} [x_{n-1} - (x_{n-1} | e_1)e_1 - (x_{n-1} | e_2)e_2 - \dots - (x_{n-1} | e_{n-2})e_{n-2}], x_n\right) \\ &= \frac{1}{\|\epsilon_n\|} \det_B\left(e_1, e_2, \dots, \frac{1}{\|\epsilon_{n-1}\|} x_{n-1}, x_n\right) = \frac{1}{\|\epsilon_{n-1}\| \cdot \|\epsilon_n\|} \det_B(e_1, e_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \\ &\vdots \\ &= \frac{1}{\|\epsilon_2\| \dots \|\epsilon_{n-1}\| \cdot \|\epsilon_n\|} \det_B(e_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \\ &= \frac{1}{\|\epsilon_2\| \dots \|\epsilon_{n-1}\| \cdot \|\epsilon_n\|} \det_B\left(\frac{1}{\|x_1\|} x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\right) \\ &= \frac{1}{\|x_1\| \cdot \|\epsilon_2\| \dots \|\epsilon_{n-1}\| \cdot \|\epsilon_n\|} \det_B(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

Donc :

$$|\det_B(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \|x_1\| \cdot \|\epsilon_2\| \dots \|\epsilon_{n-1}\| \cdot \|\epsilon_n\| \cdot |\det_B(e_1, e_2, \dots, e_n)|$$

Or, $\det_B(e_1, e_2, \dots, e_n) = \det P$ où $P = P_B^{\mathcal{B}'}$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On a $P^{-1} = {}^tP$, donc ${}^tPP = I_n$ et :

$$\det({}^tPP) = (\det {}^tP)(\det P) = (\det P)^2 = \det I_n = 1 \Rightarrow |\det_B(e_1, e_2, \dots, e_n)| = |\det P| = 1.$$

Ainsi :

$$|\det_B(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \|x_1\| \cdot \|\epsilon_2\| \dots \|\epsilon_{n-1}\| \cdot \|\epsilon_n\|.$$

Enfin, pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$:

$$x_k = \|\epsilon_k\| e_k + (x_k | e_1)e_1 + (x_k | e_2)e_2 + \dots + (x_k | e_{k-1})e_{k-1}.$$

Et comme la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est orthonormée, on a :

$$\|x_k\|^2 = \|\epsilon_k\|^2 + (x_k | e_1)^2 + (x_k | e_2)^2 + \dots + (x_k | e_{k-1})^2 \geq \|\epsilon_k\|^2 \Rightarrow \|\epsilon_k\| \leq \|x_k\|.$$

Donc, $\|\epsilon_2\| \dots \|\epsilon_{n-1}\| \cdot \|\epsilon_n\| \leq \|x_2\| \dots \|x_{n-1}\| \cdot \|x_n\|$ et ainsi :

$$|\det_B(x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq \|x_1\| \cdot \|x_2\| \dots \|x_n\|.$$

Finalement, on a bien dans tous les cas :

$$|\det_B(x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq \|x_1\| \cdot \|x_2\| \dots \|x_n\|$$

Il est clair que si l'un des x_k est nul, alors $|\det_B(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \|x_1\| \cdot \|x_2\| \dots \|x_n\| = 0$.

Si pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_k \neq 0$ et $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est liée, alors on a $|\det_B(x_1, x_2, \dots, x_n)| = 0 < \|x_1\| \cdot \|x_2\| \dots \|x_n\|$.

Si pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_k \neq 0$ et $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est libre, alors d'après ce qui précède, on a :

$$|\det_B(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \|x_1\| \cdot \|x_2\| \dots \|x_n\| \Leftrightarrow \|x_2\| \dots \|x_n\| = \|\epsilon_2\| \dots \|\epsilon_{n-1}\| \cdot \|\epsilon_n\|.$$

Comme pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $\|\epsilon_k\| \leq \|x_k\|$, aucune de ces inégalité ne peut être stricte avec l'égalité ci-dessus. Ainsi :

$$\begin{aligned} |\det_B(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \|x_1\| \cdot \|x_2\| \dots \|x_n\| &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \|x_k\| = \|\epsilon_k\| \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, (x_k | e_1) = (x_k | e_2) = \dots = (x_k | e_{k-1}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, x_k \in (\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_{k-1}))^\perp \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, x_k \in (\text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}))^\perp \end{aligned}$$

Et ceci est vrai si et seulement si la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ était initialement orthogonale.

Finalement :

$$|\det_B(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \|x_1\| \cdot \|x_2\| \dots \|x_n\| \text{ si et seulement si l'un des } x_k \text{ est nul ou la famille } (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ est orthogonale.}$$

Exercice 5

On a $f \in \mathcal{L}(E)$ et pour tout $(x, y) \in E^2$: $(x | y) = 0 \Rightarrow (f(x) | f(y)) = 0$.

Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $\|x\| = \|y\| = 1$. On a alors :

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 \Leftrightarrow \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0 \Leftrightarrow (x + y | x - y) = 0.$$

Or :

$$(x + y | x - y) = 0 \Rightarrow (f(x + y) | f(x - y)) = 0.$$

Et :

$$(f(x + y) | f(x - y)) = 0 \Leftrightarrow (f(x) + f(y) | f(x) - f(y)) = 0 \Leftrightarrow \|f(x)\|^2 = \|f(y)\|^2.$$

Ainsi, pour tout $(x, y) \in E^2$ tel que $\|x\| = \|y\| = 1$, on a $\|f(x)\| = \|f(y)\|$, donc $x \mapsto \|f(x)\|$ est constante sur la sphère unité de centre 0_E .

Autrement dit, il existe un réel positif k tel que pour tout $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$, on a, $\|f(x)\| = k$.

Mais alors, pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, on a :

$$\|f(x)\| = \left\| f\left(\|x\| \frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \left\| \|x\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \|x\| = k \|x\|.$$

Et bien sûr, $\|f(0_E)\| = \|0_E\| = 0 = k \|0_E\|$ et ainsi :

Il existe bien un réel positif k tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = k \|x\|$.

Réciproquement, supposons qu'il existe un réel positif k tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = k \|x\|$.

Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $(x | y) = 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} (f(x) | f(y)) &= \frac{1}{2} (\|f(x) + f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2) = \frac{1}{2} (\|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (k^2 \|x+y\|^2 - k^2 \|x\|^2 - k^2 \|y\|^2) = \frac{k^2}{2} (\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = k^2 (x | y) = 0 \end{aligned}$$

Et ainsi, f conserve l'orthogonalité :

La réciproque est vraie.

Exercice 6

1) L'application $(A, B) \mapsto \langle A, B \rangle$ définit un produit scalaire sur E : c'est du cours, c'est même le produit scalaire canonique sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Appelons S l'ensemble des solutions du problème, soit :

$$S = \{P \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \forall A \in E, \|A\| = \|P^{-1}AP\|\}.$$

Remarquons déjà que S est non vide car contient au moins I_n .

Soit $P \in S$. On a $\|A\| = \|P^{-1}AP\|$ pour toute A de E . Si on pose $B = P^{-1}A$ (donc $A = PB$), on a $\|PB\| = \|BP\|$ et comme B décrit E quand A décrit E , on peut écrire :

$$S = \{P \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \forall B \in E, \|PB\| = \|BP\|\}.$$

Alors, si $P \in S$, on a pour tout $(B_1, B_2) \in E^2$, $\|PB_1\| = \|B_1P\|$, $\|PB_2\| = \|B_2P\|$ et :

$$\begin{aligned} \|P(B_1 + B_2)\| &= \|(B_1 + B_2)P\| \Leftrightarrow \|PB_1 + PB_2\|^2 = \|B_1P + B_2P\|^2 \\ &\Leftrightarrow \|PB_1\|^2 + 2\langle PB_1, PB_2 \rangle + \|PB_2\|^2 = \|B_1P\|^2 + 2\langle B_1P, B_2P \rangle + \|B_2P\|^2 \\ &\Leftrightarrow \langle PB_1, PB_2 \rangle = \langle B_1P, B_2P \rangle \quad (\text{avec } \|PB_1\|^2 = \|B_1P\|^2 \text{ et } \|PB_2\|^2 = \|B_2P\|^2) \end{aligned}$$

Réciproquement, si pour tout $(B_1, B_2) \in E^2$, $\langle PB_1, PB_2 \rangle = \langle B_1P, B_2P \rangle$, alors pour toute matrice $B \in E$, on a $\|PB\|^2 = \|BP\|^2$ (avec $B = B_1 = B_2$). Ainsi :

$$S = \{P \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \forall (B_1, B_2) \in E^2, \langle PB_1, PB_2 \rangle = \langle B_1P, B_2P \rangle\}.$$

Notons $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, la base canonique de E . Si $P \in S$, on a alors $\langle PE_{i,j}, PE_{i',j'} \rangle = \langle E_{i,j}P, E_{i',j'}P \rangle$ pour tous i, j, i', j' de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Réciproquement, supposons qu'une matrice P de $GL_n(\mathbb{R})$ vérifie $\langle PE_{i,j}, PE_{i',j'} \rangle = \langle E_{i,j}P, E_{i',j'}P \rangle$ pour tous i, j, i', j' de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Alors, pour tout $(B_1, B_2) \in E^2$ telles que $B_1 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \alpha_{i,j} E_{i,j}$ et $B_2 = \sum_{1 \leq i',j' \leq n} \beta_{i',j'} E_{i',j'}$, on a :

$$\begin{aligned} \langle PB_1, PB_2 \rangle &= \left\langle \sum_{1 \leq i,j \leq n} \alpha_{i,j} PE_{i,j}, \sum_{1 \leq i',j' \leq n} \beta_{i',j'} PE_{i',j'} \right\rangle = \sum_{1 \leq i,j,i',j' \leq n} \alpha_{i,j} \beta_{i',j'} \langle PE_{i,j}, PE_{i',j'} \rangle \\ &= \sum_{1 \leq i,j,i',j' \leq n} \alpha_{i,j} \beta_{i',j'} \langle E_{i,j}P, E_{i',j'}P \rangle = \left\langle \sum_{1 \leq i,j \leq n} \alpha_{i,j} E_{i,j}P, \sum_{1 \leq i',j' \leq n} \beta_{i',j'} E_{i',j'}P \right\rangle = \langle B_1P, B_2P \rangle \end{aligned}$$

Donc, $P \in S$. Ainsi :

$$S = \left\{ P \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \forall (i, j, i', j') \in \llbracket 1, n \rrbracket^4, \langle PE_{i,j}, PE_{i',j'} \rangle = \langle E_{i,j}P, E_{i',j'}P \rangle \right\}.$$

Soit maintenant une matrice P quelconque de E . Notons $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes et $L_1, \dots, L_n$ ses lignes.

Pour tout $(i, j, i', j') \in \llbracket 1, n \rrbracket^4$, $PE_{i,j}$ (resp. $PE_{i',j'}$) est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles sauf la $j^{\text{ième}}$ (resp. la $j'^{\text{ième}}$) qui est C_i (resp. $C_{i'}$), donc :

$$\langle PE_{i,j}, PE_{i',j'} \rangle = \delta_{j,j'} (C_i \mid C_{i'})$$

où $(\cdot \mid \cdot)$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

De la même façon, pour tout $(i, j, i', j') \in \llbracket 1, n \rrbracket^4$, $E_{i,j}P$ (resp. $E_{i',j'}P$) est la matrice dont toutes les lignes sont nulles sauf la $i^{\text{ième}}$ (resp. la $i'^{\text{ième}}$) qui est L_j (resp. $L_{j'}$), donc :

$$\langle E_{i,j}P, E_{i',j'}P \rangle = \delta_{i,i'} (L_j \mid L_{j'}).$$

Alors :

$$\begin{aligned} P \in S &\Leftrightarrow \forall (i, j, i', j') \in \llbracket 1, n \rrbracket^4, \langle PE_{i,j}, PE_{i',j'} \rangle = \langle E_{i,j}P, E_{i',j'}P \rangle \\ &\Leftrightarrow \forall (i, j, i', j') \in \llbracket 1, n \rrbracket^4, \delta_{j,j'} (C_i \mid C_{i'}) = \delta_{i,i'} (L_j \mid L_{j'}) \end{aligned}$$

Or, si $i \neq i'$ et $j \neq j'$, $\delta_{j,j'} = \delta_{i,i'} = 0$, donc $\delta_{j,j'} (C_i \mid C_{i'}) = \delta_{i,i'} (L_j \mid L_{j'})$. D'où :

$$P \in S \Leftrightarrow \begin{cases} \forall (i, i') \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq i', (C_i \mid C_{i'}) = 0 \\ \forall (j, j') \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, j \neq j', (L_j \mid L_{j'}) = 0 \\ \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (C_i \mid C_i) = (L_j \mid L_j) \end{cases}$$

Soit :

$$P \in S \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \begin{cases} \forall (i, i') \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq i', (C_i \mid C_{i'}) = \delta_{i,i'} \lambda^2 \\ \forall (j, j') \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, j \neq j', (L_j \mid L_{j'}) = \delta_{j,j'} \lambda^2 \end{cases}$$

Remarquons que :

$$\forall (i, i') \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq i', (C_i \mid C_{i'}) = \delta_{i,i'} \lambda^2 \Leftrightarrow {}^t P P = \lambda^2 I_n \Leftrightarrow \forall (j, j') \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, j \neq j', (L_j \mid L_{j'}) = \delta_{j,j'} \lambda^2$$

Finalement :

$$P \in S \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*, {}^t P P = \lambda^2 I_n.$$

Enfin, si ${}^t P P = \lambda^2 I_n$ avec $\lambda \neq 0$ alors P est inversible et donc :

Les solutions du problème sont les matrices $P \in E$ telles qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que ${}^t P P = \lambda^2 I_n$.

Remarquons que ${}^t P P = \lambda^2 I_n$ revient à $\frac{1}{\lambda} P \in O_n(\mathbb{R})$.

Exercice 7

On a d'une part $x^2 f(x) = x^{3/2} (x^{1/2} f(x))$, donc, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_0^1 x^2 f(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_0^1 x^3 dx \right) \left(\int_0^1 x f(x)^2 dx \right) = \frac{1}{4} \int_0^1 x f(x)^2 dx.$$

Et, comme f est positive sur $[0;1]$, on peut écrire $x f(x)^2 = x f(x)^{1/2} f(x)^{3/2}$, d'où, toujours d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_0^1 x f(x)^2 dx \right)^2 \leq \left(\int_0^1 x^2 f(x) dx \right) \left(\int_0^1 f(x)^3 dx \right).$$

Alors, comme f est positive sur $[0;1]$, on a $\int_0^1 x f(x)^2 dx \geq 0$ et :

$$4 \left(\int_0^1 x^2 f(x) dx \right)^2 \left(\int_0^1 x f(x)^2 dx \right) \leq \left(\int_0^1 x f(x)^2 dx \right)^2 \leq \left(\int_0^1 x^2 f(x) dx \right) \left(\int_0^1 f(x)^3 dx \right) \quad (*).$$

Enfin, comme f est positive et continue sur $[0;1]$, $x \mapsto x^2 f(x)$ est positive et continue sur $[0;1]$, donc $\int_0^1 x^2 f(x) dx \geq 0$ et si $\int_0^1 x^2 f(x) dx = 0$, alors $x \mapsto x^2 f(x)$ est nulle sur $[0;1]$, donc f l'est aussi et dans ce cas, l'inégalité recherchée est vérifiée (c'est même une égalité, les deux membres étant nuls).

Si f n'est pas nulle sur $[0;1]$, alors $\int_0^1 x^2 f(x) dx > 0$ et on peut simplifier (*), ce qui donne :

$$4 \left(\int_0^1 x^2 f(x) dx \right) \left(\int_0^1 x f(x)^2 dx \right) \leq \int_0^1 f(x)^3 dx$$

Exercice 8

On a $f(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}_+$, donc $f(\mathbb{R}^n)$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, minorée par 0 : elle admet une borne inférieure que nous appellerons μ . On a donc :

$$\mu = \inf f(\mathbb{R}^n) = \inf_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} f((x_1, \dots, x_n)).$$

Soit $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t) Q(t) dt$, définie sur $\mathbb{R}_n[X]^2$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'application $t \mapsto e^{-t} t^k$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$.

Or, $e^{-t} t^k = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{1+t^2} \right)$ et $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc $t \mapsto e^{-t} t^k$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^k dt$ converge et il va de même pour $\int_0^{+\infty} e^{-t} P(t) Q(t) dt$, quels que soient les polynômes P et Q , car PQ est un polynôme, donc une combinaison linéaire finie de X^k .

L'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t) Q(t) dt$ est donc bien définie sur $\mathbb{R}_n[X]^2$.

De plus, elle est symétrique (par commutativité du produit) et bilinéaire (par linéarité de la dérivation).

Enfin, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\langle P, P \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t)^2 dt \geq 0$ car $t \mapsto e^{-t} P(t)^2$ est positive sur $\mathbb{R}_+$ et, si cette intégrale est nulle alors $t \mapsto e^{-t} P(t)^2$ est nulle sur $\mathbb{R}_+$; alors, $t \mapsto P(t)$ est nulle sur $\mathbb{R}_+$ et P admet une infinité de racines, donc est nul.

Finalement, $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t) Q(t) dt$ est bien définie sur $\mathbb{R}_n[X]^2$ et symétrique, bilinéaire, définie positive, donc c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, posons $P_x = 1 + x_1 X + \dots + x_n X^n$. On a alors :

$$f((x_1, \dots, x_n)) = \int_0^{+\infty} e^{-t} (P_x(t))^2 dt = \|P_x\|^2.$$

Si on pose $A = \{1 + a_1 X + \dots + a_n X^n, (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n\} = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(0) = 1\}$, on a alors :

$$\mu = \inf_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} \|P_x\|^2 = \inf_{P \in A} \|P\|^2.$$

Remarquons que A est une partie fermée de $\mathbb{R}_n[X]$. En effet, par définition $A \subset \mathbb{R}_n[X]$ et si $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de polynômes de A convergeant vers $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_k(0) = 1$, et, en passant à la limite quand k tend vers $+\infty$, on obtient $P(0) = 1$, donc $P \in A$.

Or, l'application $\varphi: P \mapsto \|P\|^2$ est continue et minorée par 0 sur $\mathbb{R}[X]$, donc sur le fermé A : elle y admet un minimum. Comme μ est la borne inférieure de φ sur A , c'est le minimum, soit :

$$\mu = \min_{P \in A} \|P\|^2 = \min_{P \in A} \|P\|^2 = \min_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} \|P_x\|^2 = \min_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} f((x_1, \dots, x_n)) = \min f(\mathbb{R}^n).$$

Ainsi :

$$f \text{ admet un minimum sur } \mathbb{R}^n.$$

Remarquons qu'avec le produit scalaire introduit plus haut, on pouvait aussi écrire :

$$\begin{aligned} \mu &= \inf_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} f((x_1, \dots, x_n)) = \inf_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} f((-x_1, \dots, -x_n)) \\ &= \inf_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} e^{-t} (1 - x_1 t - \dots - x_n t^n)^2 dt \\ &= \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} e^{-t} (1 - Q_x(t))^2 dt \quad \text{avec } Q_x = x_1 X + \dots + x_n X^n \\ &= \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \|1 - Q_x\|^2 = \inf_{Q \in F} \|1 - Q\|^2 \quad \text{avec } F = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(0) = 0\} \\ &= d(1, F)^2 \quad \text{car } F \text{ est un sous-espace de } \mathbb{R}_n[X] \end{aligned}$$

Exercice 9

1) Posons :

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0) \\ e_2 &= (-1, 1) \\ e_3 &= (-1, -2) \end{aligned}$$

On a :

$$\langle e_1 | e_2 \rangle = \langle e_1 | e_3 \rangle = \langle e_2 | e_3 \rangle = -1 < 0.$$

Donc :

La famille $(e_1, e_2, e_3) = ((1, 0), (-1, 1), (-1, -2))$ convient.

2) On a $x = \sum_{k=1}^p x_k e_k$ et $y = \sum_{k=1}^p |x_k| e_k$, donc :

$$\|x\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^p x_k e_k \right\|^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq p} x_i x_j \langle e_i | e_j \rangle = \sum_{i=1}^p x_i^2 \|e_i\|^2 + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq p \\ i \neq j}} x_i x_j \langle e_i | e_j \rangle.$$

Et de même :

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^p x_i^2 \|e_i\|^2 + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq p \\ i \neq j}} |x_i x_j| \langle e_i | e_j \rangle.$$

Or, pour tous $i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a $|x_i x_j| \leq |x_i x_j|$ et quand $i \neq j$, $\langle e_i | e_j \rangle < 0$, donc $|x_i x_j| \langle e_i | e_j \rangle \leq x_i x_j \langle e_i | e_j \rangle$.

Alors :

$$\sum_{\substack{1 \leq i, j \leq p \\ i \neq j}} |x_i x_j| \langle e_i | e_j \rangle \leq \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq p \\ i \neq j}} x_i x_j \langle e_i | e_j \rangle.$$

Donc :

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^p x_i^2 \|e_i\|^2 + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq p \\ i \neq j}} |x_i x_j| \langle e_i | e_j \rangle \leq \sum_{i=1}^p x_i^2 \|e_i\|^2 + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq p \\ i \neq j}} x_i x_j \langle e_i | e_j \rangle = \|x\|^2.$$

Et comme les normes sont positives, on obtient :

$\|y\| \leq \|x\|$

3) Si $x = 0$, alors $\|y\| \leq \|x\| = 0$, donc $\|y\| = 0$, soit $y = 0$.

Supposons qu'il existe $k_0 \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que $x_{k_0} = 0$, alors $y = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^p |x_k| e_k = 0$ et :

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^p |x_k| \langle e_k | e_{k_0} \rangle = 0.$$

Or, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket \setminus \{k_0\}$, $|x_k| \geq 0$ et $\langle e_k | e_{k_0} \rangle < 0$, donc $|x_k| \langle e_k | e_{k_0} \rangle \leq 0$. Le résultat ci-dessus permet de conclure que $|x_k| \langle e_k | e_{k_0} \rangle = 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket \setminus \{k_0\}$, et comme $\langle e_k | e_{k_0} \rangle \neq 0$, on obtient $x_k = 0$.

Ainsi, si l'un des x_k est nul, ils le sont tous, donc :

Soit tous les x_k sont nuls, soit aucun ne l'est.

4) Supposons que $p \geq n+2$.

Comme nous sommes en dimension n et la famille $(e_1, \dots, e_{n+1})$ contient $n+1$ vecteurs, elle est liée. Il existe donc des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ non tous nuls tels que :

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{n+1} e_{n+1} = 0.$$

Si on pose $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{n+1} e_{n+1} = 0$, on est dans la situation de la question 2, donc :

$$y = |\lambda_1| e_1 + \dots + |\lambda_{n+1}| e_{n+1} = 0.$$

Mais alors :

$$\langle y | e_{n+2} \rangle = |\lambda_1| \langle e_1 | e_{n+2} \rangle + \dots + |\lambda_{n+1}| \langle e_{n+1} | e_{n+2} \rangle = 0.$$

Or, pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, on a $|\lambda_k| \geq 0$ et $\langle e_k | e_{n+2} \rangle < 0$, donc $|\lambda_k| \langle e_k | e_{n+2} \rangle \leq 0$. La somme de ces nombres négatifs étant nuls, ils sont tous nuls, donc pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, $|\lambda_k| \langle e_k | e_{n+2} \rangle = 0$ et comme $\langle e_k | e_{n+2} \rangle \neq 0$ (car $\langle e_k | e_{n+2} \rangle < 0$), on obtient $\lambda_k = 0$. Ainsi, tous les λ_k sont nuls, ce qui contredit l'hypothèse.

Finalement, $p \geq n+2$ mène à une absurdité, donc :

$$p \leq n+1$$

5) On a déjà répondu à ces questions : d'après la question précédente, la famille $(e_1, \dots, e_{n+1})$ est liée et la famille donnée dans la question 1 convient comme exemple pour $n=2$ (donc $p = n+1 = 3$).

6) La famille $(e_1, \dots, e_{n+1})$ est liée, donc l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres. Quitte à les renuméroter, supposons que c'est e_{n+1} , autrement dit, qu'il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls tels que :

$$e_{n+1} = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n.$$

Posons alors $s = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ et $\sigma = \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \langle e_k | e_{n+1} \rangle &= \langle e_k | \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \rangle = \lambda_1 \langle e_k | e_1 \rangle + \dots + \lambda_k \langle e_k | e_k \rangle + \dots + \lambda_n \langle e_k | e_n \rangle \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \lambda_i \langle e_k | e_i \rangle + \lambda_k \|e_k\|^2 = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \lambda_i + \lambda_k \|e_k\|^2 = -s + \lambda_k + \lambda_k \|e_k\|^2 = -s + \frac{\lambda_k}{\mu_k} \end{aligned}$$

Comme $\langle e_k | e_{n+1} \rangle = -1$, on obtient pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$-s + \frac{\lambda_k}{\mu_k} = -1 \Leftrightarrow \lambda_k = (s-1)\mu_k.$$

On a $\langle e_1 | e_{n+1} \rangle = -1 \neq 0$, donc $e_{n+1} \neq 0$ et il existe au moins un $\lambda_k = (s-1)\mu_k$ non nul, ce qui permet de conclure que $s \neq 1$. On a alors :

$$s = \sum_{k=1}^n \lambda_k = \sum_{k=1}^n (s-1)\mu_k = (s-1) \sum_{k=1}^n \mu_k.$$

Soit :

$$\underline{s = (s-1)(\sigma - \mu_{n+1})} \quad (1)$$

Et :

$$\|e_{n+1}\|^2 = \langle e_{n+1} | e_{n+1} \rangle = \langle e_{n+1} | \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \rangle = \lambda_1 \langle e_{n+1} | e_1 \rangle + \dots + \lambda_n \langle e_{n+1} | e_n \rangle = -\lambda_1 - \dots - \lambda_n = -s.$$

Or :

$$\mu_{n+1} = \frac{1}{\|e_{n+1}\|^2 + 1} \Leftrightarrow \|e_{n+1}\|^2 = \frac{1}{\mu_{n+1}} - 1.$$

Donc, $\frac{1}{\mu_{n+1}} - 1 = -s$, soit, avec $s \neq 1$:

$$\mu_{n+1} = \frac{1}{1-s}.$$

En remplaçant dans (1), on obtient :

$$s = (s-1)\left(\sigma - \frac{1}{1-s}\right) = (s-1)\sigma + 1 \Leftrightarrow (s-1)\sigma = s-1.$$

Enfin, comme $s-1 \neq 0$, on obtient $\sigma = 1$, soit :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i = 1$$

On a alors $e_{n+1} = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = (s-1)\mu_1 e_1 + \dots + (s-1)\mu_n e_n = (s-1)(\mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n)$, $\sum_{i=1}^n \mu_i e_i = \frac{1}{s-1} e_{n+1}$, et :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i e_i = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i + \mu_{n+1} e_{n+1} = \frac{1}{s-1} e_{n+1} + \mu_{n+1} e_{n+1} = \left(\frac{1}{s-1} + \mu_{n+1}\right) e_{n+1}.$$

Or, on a vu plus haut que $\mu_{n+1} = \frac{1}{1-s} = -\frac{1}{s-1}$, donc $\frac{1}{s-1} + \mu_{n+1} = 0$ et ainsi :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i e_i = 0$$

7) Quitte à renuméroter les e_k , il suffit de montrer que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, pour prouver que toute sous-famille de $(e_1, \dots, e_{n+1})$ contenant n vecteurs est libre.

Soit des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que :

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0.$$

Comme dans la question 2, on obtient $|\lambda_1|e_1 + \dots + |\lambda_n|e_n = 0$ et

$$\langle |\lambda_1|e_1 + \dots + |\lambda_n|e_n | e_{n+1} \rangle = |\lambda_1| \langle e_1 | e_{n+1} \rangle + \dots + |\lambda_n| \langle e_n | e_{n+1} \rangle = -|\lambda_1| - \dots - |\lambda_n| = 0.$$

Alors, $\sum_{k=1}^n |\lambda_k| = 0$, donc tous les λ_k sont nuls.

Ceci prouve que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre et ainsi, toute sous-famille de $(e_1, \dots, e_{n+1})$ contenant n vecteurs est libre.

Or, toute sous-famille stricte de $(e_1, \dots, e_{n+1})$ est une sous-famille d'une famille de n vecteurs de $(e_1, \dots, e_{n+1})$ qui est libre, donc :

Toute sous-famille stricte de $(e_1, \dots, e_{n+1})$ est libre.