

Corrigés des TD du chapitre 17

Exercice 1

L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique. On note $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\sum_{k=1}^n a_{i,k} a_{k,j} = \sum_{k=1}^n (\alpha_i \alpha_k \alpha_k \alpha_j) = \alpha_i \alpha_j \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \right) = \alpha_i \alpha_j = a_{i,j}.$$

Donc, $A^2 = A$ et A est une matrice de projecteur.

De plus, si on pose $e_1 = \alpha_1 \epsilon_1 + \dots + \alpha_n \epsilon_n$, on a pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$f(\epsilon_j) = \sum_{k=1}^n a_{k,j} \epsilon_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k \alpha_j \epsilon_k = \alpha_j \sum_{k=1}^n \alpha_k \epsilon_k = \alpha_j e_1.$$

Comme $\sum_{k=1}^n \alpha_k^2 = 1$, les α_j ne sont pas tous nuls (et $e_1 \neq 0$), donc :

$$\text{Im } f = \text{Vect}(e_1).$$

Par le théorème du rang, on a $\dim \ker f = n - \text{rg}(f) = n - 1$.

Soit $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\alpha_p \neq 0$. Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$f(\alpha_p \epsilon_j - \alpha_j \epsilon_p) = \alpha_p f(\epsilon_j) - \alpha_j f(\epsilon_p) = \alpha_p \alpha_j e_1 - \alpha_j \alpha_p e_1 = 0.$$

Donc, $\alpha_p \epsilon_j - \alpha_j \epsilon_p \in \ker f$ et si $\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$ sont des réels, on a :

$$\sum_{j=1, j \neq p}^n \lambda_j (\alpha_p \epsilon_j - \alpha_j \epsilon_p) = 0 \iff \sum_{j=1, j \neq p}^n \alpha_p \lambda_j \epsilon_j - \left(\sum_{j=1, j \neq p}^n \lambda_j \alpha_j \right) \epsilon_p = 0.$$

Comme $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ est libre, ceci donne $\alpha_p \lambda_j = 0$, soit $\lambda_j = 0$ (car $\alpha_p \neq 0$) pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{p\}$.

Ainsi, la famille $(\alpha_p \epsilon_j - \alpha_j \epsilon_p)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{p\}}$ est une famille libre de $n-1$ vecteurs de $\ker f$, qui est de dimension $n-1$, donc $(\alpha_p \epsilon_j - \alpha_j \epsilon_p)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{p\}}$ est une base de $\ker f$.

Enfin, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{p\}$, on a :

$$(\alpha_p \epsilon_j - \alpha_j \epsilon_p | e_1) = \alpha_p (\epsilon_j | e_1) - \alpha_j (\epsilon_p | e_1) = \alpha_p \alpha_j - \alpha_j \alpha_p = 0.$$

Donc, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{p\}$, $\alpha_p \epsilon_j - \alpha_j \epsilon_p \perp e_1$, ce qui prouve que :

$$\ker f \perp \text{Im } f.$$

Finalement :

L'endomorphisme canoniquement associé à A est le projecteur orthogonal sur $\text{Vect}(\alpha_1 \epsilon_1 + \dots + \alpha_n \epsilon_n)$.

Exercice 2

1) L'application $(f, g) \mapsto (f | g)$ est clairement symétrique et bilinéaire (du fait de la linéarité de la dérivation et de l'intégrale). De plus, pour tout $f \in E$, on a $(f | f) = \int_0^1 f(t)^2 dt + \int_0^1 f'(t)^2 dt \geq 0$ et, comme $\int_0^1 f(t)^2 dt \geq 0$ et $\int_0^1 f'(t)^2 dt \geq 0$, on a :

$$(f | f) = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(t)^2 dt = \int_0^1 f'(t)^2 dt = 0.$$

Or, f^2 est positive et continue sur $[0;1]$, donc :

$$\int_0^1 f(t)^2 dt = 0 \Leftrightarrow f^2 = 0 \Leftrightarrow f = 0.$$

Ainsi, $(f | f) = 0$ si et seulement si $f = 0$, et finalement, $(f, g) \mapsto (f | g)$ est une forme bilinéaire, symétrique définie positive sur E , donc :

$$(f, g) \mapsto (f | g) \text{ définit un produit scalaire sur } E.$$

2) Remarquons que W est l'espace vectorielle des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 : $y'' - y = 0$.

Si on note $f_1 : [0;1] \rightarrow \mathbb{R} ; t \mapsto e^t$ et $f_2 : [0;1] \rightarrow \mathbb{R} ; t \mapsto e^{-t}$, on a $f_1, f_2 \in E$ et ces deux fonctions forment une base de l'espace des solutions de $y'' - y = 0$, donc :

$$W = \text{Vect}(f_1, f_2).$$

Ceci prouve entre autres que W est bien un sous-espace de E . On prouve facilement que V est non vide (il contient la fonction nulle) et stable par combinaisons linéaires, donc V est aussi un sous-espace de E .

Soit maintenant $f \in E$.

S'il existe $(f_v, f_w) \in V \times W$ tel que $f = f_v + f_w$, alors on a $f_w = af_1 + bf_2$ avec :

$$\begin{cases} f(0) = f_v(0) + f_w(0) = f_w(0) = a + b \\ f(1) = f_v(1) + f_w(1) = f_w(1) = ae + \frac{b}{e} \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} a = \frac{f(0) - ef(1)}{1 - e^2} \\ b = \frac{e^2 f(0) - ef(1)}{e^2 - 1} \end{cases}$$

Donc :

$$f_w = \frac{f(0) - ef(1)}{1 - e^2} f_1 + \frac{e^2 f(0) - ef(1)}{e^2 - 1} f_2 \text{ et } f_v = f - f_w.$$

Ainsi, si f_v et f_w , elles sont uniques.

Réciproquement, si on pose $f_w = \frac{f(0) - ef(1)}{1 - e^2} f_1 + \frac{e^2 f(0) - ef(1)}{e^2 - 1} f_2$ et $f_v = f - f_w$, on a immédiatement :

$$f = f_v + f_w \text{ et } f_w \in W.$$

On montre facilement que $f_v(0) = f(0) - f_w(0) = 0$ et $f_v(1) = f(1) - f_w(1) = 0$, donc que $f_v \in V$.

Ceci prouve par analyse-synthèse que :

$$\underline{E = V \oplus W}.$$

Pour montrer que $V \perp W$, il suffit de prouver que f_1 et f_2 sont orthogonales à toute fonction de V .

Soit $f \in V$. On a $f(0) = f(1) = 0$ et :

$$(f \mid f_1) = \int_0^1 f(t)e^t dt + \int_0^1 f'(t)e^t dt = \int_0^1 [f(t)e^t + f'(t)e^t] dt = [f(t)e^t]_0^1 = f(1)e - f(0) = 0$$

$$(f \mid f_2) = \int_0^1 f(t)e^{-t} dt + \int_0^1 f'(t)(-e^{-t}) dt = - \int_0^1 [-f(t)e^{-t} + f'(t)e^{-t}] dt = -[f(t)e^{-t}]_0^1 = -\frac{f(1)}{e} + f(0) = 0$$

Donc, pour tout $f \in V$, on a $f \perp f_1$ et $f \perp f_2$, et ainsi :

$$\underline{V \perp W}.$$

Finalement, on obtient bien :

$$E = V \overset{\perp}{\oplus} W$$

4) Pour toute $f \in E_{\alpha,\beta}$, on a $f(0) = \alpha$ et $f(1) = \beta$. Avec ce qui précède, on peut écrire :

$$f = f_v + f_w$$

$$\text{avec } f_v \in V \text{ et } f_w = \frac{\alpha - e\beta}{1 - e^2} f_1 + \frac{e^2\alpha - e\beta}{e^2 - 1} f_2 \in W.$$

Alors, avec $f_v \perp f_w$, on a $\int_0^1 [f(t)^2 + f'(t)^2] dt = \|f\|^2 = \|f_v\|^2 + \|f_w\|^2$ et :

$$\|f_w\|^2 = \left\| \frac{\alpha - e\beta}{1 - e^2} f_1 + \frac{e^2\alpha - e\beta}{e^2 - 1} f_2 \right\|^2 = \left(\frac{\alpha - e\beta}{1 - e^2} \right)^2 \|f_1\|^2 + 2 \frac{\alpha - e\beta}{1 - e^2} \frac{e^2\alpha - e\beta}{e^2 - 1} (f_1 \mid f_2) + \left(\frac{e^2\alpha - e\beta}{e^2 - 1} \right)^2 \|f_2\|^2.$$

On a :

$$\|f_1\|^2 = \int_0^1 [f_1(t)^2 + f_1'(t)^2] dt = \int_0^1 2e^{2t} dt = e^2 - 1$$

$$(f_1 \mid f_2) = \int_0^1 f_1(t)f_2(t) dt + \int_0^1 f_1'(t)f_2'(t) dt = \int_0^1 e^t e^{-t} dt + \int_0^1 e^t (-e^{-t}) dt = 0$$

$$\|f_2\|^2 = \int_0^1 [f_2(t)^2 + f_2'(t)^2] dt = \int_0^1 2e^{-2t} dt = -e^{-2} + 1 = \frac{e^2 - 1}{e^2}$$

Donc :

$$\|f_w\|^2 = \left(\frac{\alpha - e\beta}{1 - e^2} \right)^2 (e^2 - 1) + \left(\frac{e^2\alpha - e\beta}{e^2 - 1} \right)^2 \frac{e^2 - 1}{e^2} = \frac{(\alpha - e\beta)^2 + (e\alpha - \beta)^2}{e^2 - 1} = \frac{(e^2 + 1)(\alpha^2 + \beta^2) - 4e\alpha\beta}{e^2 - 1}.$$

Enfin :

$$\inf_{f \in E_{\alpha,\beta}} \left(\int_0^1 [f(t)^2 + f'(t)^2] dt \right) = \inf_{f \in E_{\alpha,\beta}} (\|f\|^2) = \inf_{f \in E_{\alpha,\beta}} (\|f_v\|^2 + \|f_w\|^2) = \|f_w\|^2.$$

Donc :

$$\boxed{\inf_{f \in E_{\alpha,\beta}} \left(\int_0^1 [f(t)^2 + f'(t)^2] dt \right) = \frac{(e^2 + 1)(\alpha^2 + \beta^2) - 4e\alpha\beta}{e^2 - 1}}$$

Exercice 3

Soient $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{B}_G = (e_{p+1}, \dots, e_n)$ des bases orthonormées de F et G respectivement (avec $n = \dim E$, $p = \dim F$ et $n - p = \dim G$). La famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ est alors une base de E adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$.

On a alors $M_{\mathcal{B}}(s) = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ où le 1 apparaît p fois et :

$$s(e_k) = \begin{cases} e_k & \text{si } 1 \leq k \leq p \\ -e_k & \text{si } p+1 \leq k \leq n \end{cases}$$

On a alors :

- pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$, $(s(e_i) | s(e_j)) = (e_i | e_j) = \delta_{i,j}$ (car $(e_1, \dots, e_p)$ est orthonormée) ;
- pour tout $(i, j) \in \llbracket p+1, n \rrbracket^2$, $(s(e_i) | s(e_j)) = (-e_i | -e_j) = (e_i | e_j) = \delta_{i,j}$ (car $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est orthonormée) ;
- pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket p+1, n \rrbracket$, $(s(e_i) | s(e_j)) = (e_i | -e_j) = -(e_i | e_j)$.

On a alors :

$$\begin{aligned} G = F^\perp &\Leftrightarrow G \perp F \\ &\Leftrightarrow \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n) \text{ est orthonormée} \\ &\Leftrightarrow \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (e_i | e_j) = \delta_{i,j} \\ &\Leftrightarrow \forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket p+1, n \rrbracket, (e_i | e_j) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket p+1, n \rrbracket, (e_i | e_j) = -(e_i | e_j) \\ &\Leftrightarrow \forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket p+1, n \rrbracket, (e_i | e_j) = (s(e_i) | s(e_j)) \\ &\Leftrightarrow \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (e_i | e_j) = (s(e_i) | s(e_j)) \end{aligned}$$

Ceci prouve que (i) équivaut à (ii).

De plus, comme $M_{\mathcal{B}}(s) = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ est diagonale donc symétrique, s est un endomorphisme autoadjoint si et seulement si la base $\mathcal{B}$ est orthonormée, donc (iii) est équivalente à (i) et (ii) et ainsi :

Les assertions (i), (ii) et (iii) sont équivalentes.

Exercice 4

Notons $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (muni du produit scalaire canonique) et $\mathcal{B}' = (c_1, \dots, c_n)$ où les c_k sont les vecteurs colonnes de A . Comme $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{B}'$ est une base et on a $A = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ (la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$).

Par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, il existe $\mathcal{B}'' = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E telle que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(c_1, \dots, c_k)$. Ceci se traduit par pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$c_k \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \Rightarrow c_k = \lambda_{1,k}e_1 + \dots + \lambda_{k,k}e_k.$$

$$\text{Alors } P_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \dots & \lambda_{1,n-1} & \lambda_{1,n} \\ 0 & \lambda_{2,2} & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \lambda_{n-2,n-1} & \lambda_{n-2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda_{n-1,n-1} & \lambda_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{n,n} \end{pmatrix}, \text{ donc } R = P_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'} \text{ est triangulaire supérieure.}$$

Par ailleurs, comme $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique, la base canonique $\mathcal{B}$ est orthonormée. Comme la base $\mathcal{B}''$ l'est aussi, $Q = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$ est orthogonale.

Enfin, la relation de Chasles donne $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} P_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'}$, soit, avec $A = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, $R = P_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'}$ et $Q = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$:

$$A = QR \text{ avec } Q \in O(n) \text{ et } R \text{ triangulaire supérieure.}$$

Exercice 5

1) On a par définition :

$$rg(A) = rg(\mathcal{F})$$

2) Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, appelons $(x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{n,i})$ les coordonnées de x_i dans la base orthonormée $\mathcal{B}$.

On a alors, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$:

$$(x_i | x_j) = \sum_{k=1}^n x_{k,i} x_{k,j}.$$

Par ailleurs, $A = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = (x_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et ${}^t A = (x_{j,i}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ donc $A^T A$ est définie et $A^T A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Si on pose $A^T A = (a_{i,j})$, on a pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$:

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^n x_{k,i} x_{k,j} = (x_i | x_j).$$

Ainsi :

$$G = A^T A$$

3) Soit $X \in \ker A$. On a :

$$(A^T A)X = A^T (AX) = A^T 0 = 0 \Rightarrow X \in \ker(A^T A).$$

Ainsi :

$$\underline{\ker A \subset \ker(A^T A)}.$$

Soit maintenant $X \in \ker(A^T A)$, on a :

$$\|AX\|^2 = (AX)^T (AX) = (X^T A^T)(AX) = X^T (A^T A)X = X^T 0 = 0.$$

Ainsi, $\|AX\| = 0$, donc $AX = 0$, soit $X \in \ker A$. Ceci permet de conclure que :

$$\underline{\ker(A^T A) \subset \ker A}.$$

Finalement :

$$\ker(A^T A) = \ker A$$

Par le théorème du rang, on a $rg(A) + \dim(\ker A) = p$ et $rg(A^T A) + \dim(\ker(A^T A)) = p$.

Or, comme $\ker(A^T A) = \ker A$, on a $\dim(\ker(A^T A)) = \dim(\ker A)$ et ainsi, $rg(A^T A) = rg(A)$.

Comme $G = A^T A$ et $rg(A) = rg(\mathcal{F})$, on a finalement :

$$rg(\mathcal{F}) = rg(G)$$

4) La matrice $G = A^T A$ est une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, donc, d'après le théorème spectrale, elle est diagonalisable. Si ses valeurs propres (distinctes ou non) sont $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, on a :

$$\det G = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p.$$

Soit $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de G associé à λ_k . On a $GX = A^T AX = \lambda_k X$, donc :

$$X^T A^T AX = \lambda_k X^T X \Leftrightarrow (AX)^T AX = \|AX\|^2 = \lambda_k \|X\|^2 \Leftrightarrow \lambda_k = \frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} \quad (\text{car } \|X\|^2 \neq 0).$$

Or, $\|AX\|^2 \geq 0$ et $\|X\|^2 > 0$, donc $\lambda_k \geq 0$. Ceci étant vrai pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p \geq 0$, soit :

$$\det G \geq 0$$

On a $\det G = 0$ quand $rg(G) = rg(x_1, x_2, \dots, x_p) < p$, donc :

$$\det G = 0 \text{ si et seulement si } \mathcal{F} = (x_1, x_2, \dots, x_p) \text{ est liée.}$$

5) Si $x \in F$, alors $d(x, F) = 0$ et la famille $(e_1, e_2, \dots, e_p, x)$, donc $\det G(e_1, e_2, \dots, e_p, x) = 0$ et la formule désirée est vérifiée (les deux membres valent 0).

Si $x \notin F$, posons $e_{p+1} = x - p_F(x) \neq 0$, où $p_F(x)$ est le projeté orthogonal de x sur F .

On a alors $d^2 = d(x, F)^2 = \|e_{p+1}\|^2 = (e_{p+1} | e_{p+1})$ et $e_{p+1} \in F^\perp$, donc pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $(e_k | e_{p+1}) = 0$. Ainsi :

$$G(e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}) = \begin{pmatrix} (e_1 | e_1) & \dots & (e_1 | e_p) & (e_1 | e_{p+1}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (e_p | e_p) & \dots & (e_p | e_p) & (e_p | e_{p+1}) \\ (e_1 | e_{p+1}) & \dots & (e_p | e_{p+1}) & (e_{p+1} | e_{p+1}) \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} G(e_1, e_2, \dots, e_p) & \vdots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & d^2 \end{array} \right).$$

Alors :

$$\det G(e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}) = \det \left(\begin{array}{ccc|c} G(e_1, e_2, \dots, e_p) & \vdots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & d^2 \end{array} \right) = d^2 \det G(e_1, e_2, \dots, e_p).$$

Par ailleurs :

$$\det G(e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}) = \begin{vmatrix} (e_1 | e_1) & \cdots & (e_1 | e_p) & (e_1 | x - p_F(x)) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (e_p | e_1) & \cdots & (e_p | e_p) & (e_p | x - p_F(x)) \\ (e_1 | e_{p+1}) & \cdots & (e_p | e_{p+1}) & (e_{p+1} | x - p_F(x)) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (e_1 | e_1) & \cdots & (e_1 | e_p) & (e_1 | x) - (e_1 | p_F(x)) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (e_p | e_1) & \cdots & (e_p | e_p) & (e_p | x) - (e_p | p_F(x)) \\ (e_1 | e_{p+1}) & \cdots & (e_p | e_{p+1}) & (e_{p+1} | x) - (e_{p+1} | p_F(x)) \end{vmatrix}$$

Or, $p_F(x) \in F = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p)$, donc $p_F(x) = \sum_{i=1}^p a_i e_i$ et :

$$\begin{pmatrix} (e_1 | p_F(x)) \\ \vdots \\ (e_p | p_F(x)) \\ (e_{p+1} | p_F(x)) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^p a_i \begin{pmatrix} (e_1 | e_i) \\ \vdots \\ (e_p | e_i) \\ (e_{p+1} | e_i) \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\det G(e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}) = \begin{vmatrix} (e_1 | e_1) & \cdots & (e_1 | e_p) & (e_1 | x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (e_1 | e_p) & \cdots & (e_p | e_p) & (e_p | x) \\ (e_1 | e_{p+1}) & \cdots & (e_p | e_{p+1}) & (e_{p+1} | x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (e_1 | e_1) & \cdots & (e_1 | e_p) & (e_1 | x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (e_1 | e_p) & \cdots & (e_p | e_p) & (e_p | x) \\ (e_1 | x) - (e_1 | p_F(x)) & \cdots & (e_p | x) - (e_p | p_F(x)) & (x | x) - (x | p_F(x)) \end{vmatrix}$$

Et comme plus haut, on a $\begin{pmatrix} (e_1 | p_F(x)) \\ \vdots \\ (e_p | p_F(x)) \\ (x | p_F(x)) \end{pmatrix}^T = \sum_{i=1}^p a_i \begin{pmatrix} (e_1 | e_i) \\ \vdots \\ (e_p | e_i) \\ (x | e_i) \end{pmatrix}^T$ donc :

$$\det G(e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}) = \begin{vmatrix} (e_1 | e_1) & \cdots & (e_1 | e_p) & (e_1 | x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (e_1 | e_p) & \cdots & (e_p | e_p) & (e_p | x) \\ (e_1 | x) & \cdots & (e_p | x) & (x | x) \end{vmatrix} = \det G(e_1, e_2, \dots, e_p, x).$$

Ainsi, on a :

$$\det G(e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}) = d^2 \det G(e_1, e_2, \dots, e_p) = \det G(e_1, e_2, \dots, e_p, x).$$

Et comme la famille $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une base, elle est libre, donc $\det G(e_1, e_2, \dots, e_p) \neq 0$ et ainsi :

$$d^2 = d(x, F)^2 = \frac{\det G(e_1, e_2, \dots, e_p, x)}{\det G(e_1, e_2, \dots, e_p)}$$

Exercice 6

Comme la matrice A est symétrique réelle $A \in S_n(\mathbb{R})$, elle est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ (muni du produit scalaire canonique). Donc, il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ tels que $D = P^T A P$ où $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ et P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (qui est orthonormée) à la base $\mathcal{B}$ (donc $P \in O(n)$).

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons $U_k \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne des coordonnées de u_k dans la base canonique. On a immédiatement $U_k^T U_k = \|u_k\|^2 = 1$ (en identifiant une matrice 1×1 et son coefficient).

De plus, si on note $E_{i,j}$ les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \sum_{k=1}^n \lambda_k E_{k,k}.$$

Donc :

$$A = P D P^T = P \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k E_{k,k} \right) P^T = \sum_{k=1}^n \lambda_k P E_{k,k} P^T.$$

Enfin, si pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $U_k = \begin{pmatrix} u_{1,k} \\ u_{2,k} \\ \vdots \\ u_{n,k} \end{pmatrix}$, on a $P = (u_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ et :

$$P E_{k,k} P^T = \begin{pmatrix} u_{1,1} & \cdots & u_{1,k} & \cdots & u_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{k,1} & \cdots & u_{k,k} & \cdots & u_{k,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n,1} & \cdots & u_{n,k} & \cdots & u_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} & \cdots & u_{k,1} & \cdots & u_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1,k} & \cdots & u_{k,k} & \cdots & u_{n,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1,n} & \cdots & u_{k,n} & \cdots & u_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1,k} u_{1,k} & \cdots & u_{1,k} u_{k,k} & \cdots & u_{1,k} u_{n,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{k,k} u_{1,k} & \cdots & u_{k,k} u_{k,k} & \cdots & u_{k,k} u_{n,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n,k} u_{1,k} & \cdots & u_{n,k} u_{k,k} & \cdots & u_{n,k} u_{n,k} \end{pmatrix} = U_k U_k^T.$$

Donc, on a bien $A = \sum_{k=1}^n \lambda_k U_k U_k^T$ et ainsi :

Il existe bien $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(U_1, U_2, \dots, U_n) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^n$ tels que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $U_k^T U_k = 1$ et $A = \sum_{k=1}^n \lambda_k U_k U_k^T$.

Exercice 7

Dans tout l'exercice, on identifie $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, que l'on munit de sa structure euclidienne canonique.

1) Comme u est autoadjoint, il existe une base orthonormée de vecteurs propres de u ($e_1, e_2, \dots, e_n$), d'après le théorème spectral. Et quitte à réorganiser les vecteur, on peut supposer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, λ_i soit la valeur propre (réelle) associée à e_i avec $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$.

Alors, pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ de E tel que $x \neq 0$, on a $u(x) = \sum_{i=1}^n x_i u(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i$ et :

$$(x | u(x)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2.$$

Comme pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_1 \leq \lambda_i \leq \lambda_n$ et $x_i^2 \geq 0$, on a :

$$\lambda_1 \|x\|^2 = \lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_1 x_i^2 \leq (x | u(x)) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_n x_i^2 = \lambda_n \sum_{i=1}^n x_i^2 = \lambda_n \|x\|^2.$$

Et comme $\|x\|^2 > 0$, on obtient, pour tout vecteur x non nul de E :

$$\boxed{\lambda_1 \leq \frac{(x | u(x))}{\|x\|^2} \leq \lambda_n}$$

2) Soit $X = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^\top \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$X^\top H X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{x_i x_j}{i+j-1}.$$

Si on pose $f(t) = \sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t)^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1} \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1} \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j t^{j-1} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j t^{i+j-2}.$$

Comme f est une fonction polynômiale, f^2 est continue sur $\mathbb{R}$ et :

$$\int_0^1 f(t)^2 dt = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(x_i x_j \int_0^1 t^{i+j-2} dt \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(x_i x_j \left[\frac{t^{i+j-1}}{i+j-1} \right]_0^1 \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{x_i x_j}{i+j-1} = X^\top H X.$$

Ainsi, comme f^2 est continue et positive sur $[0,1]$, on a $X^\top H X = \int_0^1 f(t)^2 dt \geq 0$ avec :

$$X^\top H X = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(t)^2 dt = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [0,1], f(t) = 0.$$

Ceci veut dire que f est nulle sur $\mathbb{R}$ tout entier (elle est polynômiale et admet une infinité de racines), et donc que tous ses coefficients sont nuls, soit pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i = 0$ et donc $X = 0$.

Ceci prouve que :

$$\boxed{H \text{ est définie positive.}}$$

3) a. On a $S = A^\top A$, donc :

$$S^\top = (A^\top A)^\top = A^\top (A^\top)^\top = A^\top A = S.$$

Donc, S est symétrique.

De plus, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$X^\top S X = X^\top (A^\top A) X = (X^\top A^\top)(A X) = (A X)^\top (A X) = \|A X\|^2 \geq 0.$$

Donc, S est positive et ainsi :

$$\boxed{S \text{ est une matrice symétrique positive.}}$$

b. Si S est une matrice symétrique positive, alors il existe deux matrices $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_k \in \mathbb{R}_+$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $P \in O(n)$ telles que $S = P^\top D P$. Comme les λ_k sont positifs, on peut poser :

$$\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}).$$

On a $D = \Delta^2$ et $\Delta^\top = \Delta$ (car Δ est diagonale), donc :

$$S = P^\top D P = P^\top \Delta^2 P = P^\top \Delta^\top \Delta P = (\Delta P)^\top (\Delta P) = A^\top A \text{ avec } A = \Delta P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Ainsi :

Si S est une matrice symétrique positive, alors il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = A^\top A$.

Comme $(-A)^\top (-A) = A^\top A$:

La matrice A n'est pas unique.

c. Nous revenons ici à $S = A^\top A$. On a vu que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top S X = \|AX\|^2$, donc :

$$X^\top S X = 0 \Leftrightarrow \|AX\| = 0 \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow X \in \ker A.$$

Alors :

$$S \text{ est définie positive} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) : \\ X^\top S X = 0 \Leftrightarrow X = 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) : \\ X \in \ker A \Leftrightarrow X = 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \ker A = \{0\}.$$

Autrement dit :

S est définie positive si et seulement si A est inversible.

d. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On a d'une part :

$$X \in \ker S \Leftrightarrow SX = 0 \Rightarrow X^\top S X = 0 \Leftrightarrow X \in \ker A.$$

Donc $\ker S \subset \ker A$.

Et d'autre part :

$$X \in \ker A \Leftrightarrow AX = 0 \Rightarrow SX = A^\top AX = 0 \Leftrightarrow X \in \ker S.$$

Donc $\ker A \subset \ker S$.

Ainsi, $\ker A = \ker S$, donc, avec le théorème du rang, on obtient :

$$\text{rg}(A) = n - \dim(\ker A) = n - \dim(\ker S) = \text{rg}(S).$$

Ainsi, on a bien :

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(S)$$

4) Si S est une matrice symétrique positive, alors il existe deux matrices $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_k \in \mathbb{R}_+$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $P \in O(n)$ telles que $S = P^\top D P$. Comme les λ_k sont positifs, on peut poser :

$$\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}).$$

On a alors $D = \Delta^2$ et, avec $PP^\top = I_n$:

$$S = P^\top D P = P^\top \Delta^2 P = P^\top \Delta \Delta P = P^\top \Delta (PP^\top) \Delta P = (P^\top \Delta P)(P^\top \Delta P) = R^2.$$

avec $R = P^\top \Delta P$. Comme $\sqrt{\lambda_k}$ sont positifs et $P \in O(n)$, R est bien une matrice symétrique positive.

Ainsi, il existe bien une matrice R symétrique positive telle que $R^2 = S$. Reste à prouver l'unicité.

Soit M une matrice symétrique positive telle que $M^2 = S$.

Comme M est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormée. Soient $\mu_1, \dots, \mu_p$ ses valeurs propres distinctes deux à deux (toutes positives, car M est positive) et $E_1, \dots, E_p$ les sous-espaces propres associés.

Soit $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Pour tout $X \in E_k$, on a $MX = \mu_k X$, donc :

$$SX = M^2 X = M(MX) = M(\mu_k X) = \mu_k MX = \mu_k (\mu_k X) = \mu_k^2 X.$$

Ainsi, μ_k^2 est une valeur propre de S et $E_k \subset F_k$, où F_k est sous-espace propre associé à μ_k^2 .

Remarquons que comme les μ_k sont positives, on a : $\mu_k^2 = \mu_{k'}^2 \Leftrightarrow \mu_k = \mu_{k'} \Leftrightarrow k = k'$.

On a alors $\dim E_k \leq \dim F_k$, donc :

$$n = \dim E_1 + \dots + \dim E_p \leq \dim F_1 + \dots + \dim F_p \leq n.$$

Ainsi, $\dim F_1 + \dots + \dim F_p = n$ et, comme pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a $\dim E_k \leq \dim F_k$, ceci implique que pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\dim E_k = \dim F_k$.

Finalement, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $E_k \subset F_k$ et $\dim E_k = \dim F_k$, donc les sous-espaces propres de M et S sont les mêmes et les valeurs propres de S sont $\mu_1^2, \dots, \mu_p^2$.

Or, la matrice connue est S , donc ce qui précède se reformule en : les valeurs propres de M sont $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_p}$ où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes deux à deux (et positives) de S et le sous-espace propre de M associé à $\sqrt{\lambda_k}$ est le sous-espace propre de S associé à λ_k .

Ainsi, les valeurs propres et sous-espaces propres de M sont fixés, ce qui détermine complètement la matrice M et donc R est unique.

Finalement :

Il existe une et une seule matrice R symétrique positive telle que $R^2 = S$.

Remarquons que si on omet le caractère positif, il existe plusieurs matrices dont le carré est S .

5) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres positives de A .

Pour tout $(\lambda, X) \in \mathbb{R} \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow X + AX = X + \lambda X \Leftrightarrow (I_n + A)X = (1 + \lambda)X.$$

Donc, les valeurs propres de $I_n + A$ sont $1 + \lambda_1, 1 + \lambda_2, \dots, 1 + \lambda_n$ et, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la valeur propre $1 + \lambda_k$ de $I_n + A$, $1 + \lambda_k$ est de même multiplicité que la valeur propre λ_k de A . Ainsi :

$$\det A = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \text{ et } \det(I_n + A) = (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) \dots (1 + \lambda_n).$$

On veut donc prouver que si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont n réels positifs (distincts ou pas), on a :

$$1 + \sqrt[n]{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n} \leq \sqrt[n]{(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) \dots (1 + \lambda_n)}.$$

Précédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- Pour $n = 1$, soit $\lambda_1 \in \mathbb{R}_+$. On a alors $1 + \sqrt{\lambda_1} = 1 + \lambda_1 = \sqrt[1]{1 + \lambda_1}$, donc la relation est vérifiée.
- Supposons l'inégalité vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$.

Posons $a = \sqrt[n]{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}$ et $b = \sqrt[n]{(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) \dots (1 + \lambda_n)}$. Par hypothèse de récurrence, on a $1 + a \leq b$.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(t) = \sqrt[n+1]{(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) \dots (1 + \lambda_n)(1 + t)} - \sqrt[n+1]{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n t} - 1 = b^{\frac{n}{n+1}}(1 + t)^{\frac{1}{n+1}} - a^{\frac{n}{n+1}}t^{\frac{1}{n+1}} - 1.$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, en tant que différence de telles fonctions et, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(t) = \frac{1}{n+1} b^{\frac{n}{n+1}} (1+t)^{\frac{1}{n+1}-1} - \frac{1}{n+1} a^{\frac{n}{n+1}} t^{\frac{1}{n+1}-1} = \frac{1}{n+1} \left[\left(\frac{b}{1+t} \right)^{\frac{n}{n+1}} - \left(\frac{a}{t} \right)^{\frac{n}{n+1}} \right].$$

On a donc :

$$f(t) \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{b}{1+t} \right)^{\frac{n}{n+1}} \geq \left(\frac{a}{t} \right)^{\frac{n}{n+1}} \Leftrightarrow \frac{b}{1+t} \geq \frac{a}{t} \Leftrightarrow (b-a)t \geq a.$$

Et comme $1 + a \leq b$, on a $b - a \geq 1 > 0$, donc $f(t) \geq 0$ quand $t \geq \frac{a}{b-a} \geq 0$.

Ceci prouve que f est décroissante sur $\left[0, \frac{a}{b-a}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{a}{b-a}, +\infty\right]$ et donc que f admet un minimum en $\frac{a}{b-a}$. Enfin, on a :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a}{b-a}\right) &= b^{\frac{n}{n+1}} \left(1 + \frac{a}{b-a}\right)^{\frac{1}{n+1}} - a^{\frac{n}{n+1}} \left(\frac{a}{b-a}\right)^{\frac{1}{n+1}} - 1 \\ &= b^{\frac{n}{n+1}} \frac{b^{\frac{1}{n+1}}}{(b-a)^{\frac{1}{n+1}}} - a^{\frac{n}{n+1}} \frac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(b-a)^{\frac{1}{n+1}}} - 1 = \frac{b-a}{(b-a)^{\frac{1}{n+1}}} - 1 = (b-a)^{\frac{n}{n+1}} - 1 \end{aligned}$$

Or, on a vu que $b - a \geq 1$, donc $(b-a)^{\frac{n}{n+1}} \geq 1$ et $f\left(\frac{a}{b-a}\right) \geq 0$.

Ainsi, le minimum de f sur $\mathbb{R}_+$ est positif, donc f est positive sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $\lambda_{n+1} \in \mathbb{R}_+$, $f(\lambda_{n+1}) \geq 0$.

Finalement, on obtient pour tout $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}_+)^{n+1}$:

$$f(\lambda_{n+1}) = \sqrt[n+1]{(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) \dots (1 + \lambda_n)(1 + \lambda_{n+1})} - \sqrt[n+1]{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \lambda_{n+1}} - 1 \geq 0.$$

Soit :

$$1 + \sqrt[n+1]{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \lambda_{n+1}} \leq \sqrt[n+1]{(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) \dots (1 + \lambda_n)(1 + \lambda_{n+1})}.$$

La propriété est vraie au rang $n+1$.

Ainsi, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui prouve que l'on a bien :

$$1 + \sqrt[n]{\det A} \leq \sqrt[n]{\det (I_n + A)}$$

Exercice 8

1) La relation $\leq$ étant une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$, $<$ est immédiatement réflexive et transitive.

Reste à voir l'antisymétrie. Soient $A, B \in E$ telles que $A < B$ et $B < A$.

On a alors pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $X^T A X \leq X^T B X$ et $X^T A X \geq X^T B X$, soit :

$$X^T A X = X^T B X \Leftrightarrow X^T (A - B) X = X^T C X = 0 \text{ avec } C = A - B.$$

Comme E est un espace vectoriel, $C \in E = S_n(\mathbb{R})$, donc C est une matrice symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée, autrement dit, il existe deux matrices $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (où les λ_k sont réels) telles que $C = P^T D P$ et pour tout $X \in \mathbb{R}^n$:

$$X^T C X = X^T P^T D P X = Y^T D Y = 0$$

avec $Y = P X$, qui décrit $\mathbb{R}^n$ quand X décrit $\mathbb{R}^n$. Ainsi, pour tout $Y \in \mathbb{R}^n$, $Y^T D Y = 0$.

En notant $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a alors pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $e_k^T D e_k = \lambda_k = 0$ et ainsi, $D = 0_n$, donc $C = 0_n$, soit $A = B$. Finalement, $<$ est antisymétrique et donc, c'est une relation d'ordre.

Si on pose $A = E_{1,1}$ et $B = E_{2,2}$, on a :

$$\left. \begin{array}{l} e_1^T A e_1 = 1 \\ e_1^T B e_1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow e_1^T A e_1 > e_1^T B e_1$$

$$\left. \begin{array}{l} e_2^T A e_2 = 0 \\ e_2^T B e_2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow e_2^T A e_2 < e_2^T B e_2$$

Donc, on n'a ni $A < B$, ni $B < A$ et la relation $<$ n'est pas totale.

Finalement :

La relation $<$ est une relation d'ordre non total sur E .

2) Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E , croissante et majorée pour la relation $<$.

Il existe alors $M \in E$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_k < A_{k+1} < M$, soit pour tout $X \in \mathbb{R}^n$:

$$X^T A_k X \leq X^T A_{k+1} X \leq X^T M X.$$

Ainsi, pour $X \in \mathbb{R}^n$ réel fixé, la suite réelle $(X^T A_k X)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée, donc convergente.

En particulier, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la suite $(e_i^T A_k e_i)_{k \in \mathbb{N}}$ converge.

Or, si on note $A_k = (a_{k,i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on a $(e_i^\top A_k e_i)_{k \in \mathbb{N}} = (a_{k,i,i})_{k \in \mathbb{N}}$ et donc $(a_{k,i,i})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel $a_{i,i}$.

De plus, pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $i \neq j$, la suite $((e_i + e_j)^\top A_k (e_i + e_j))_{k \in \mathbb{N}}$ converge et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(e_i + e_j)^\top A_k (e_i + e_j) = a_{k,i,i} + a_{k,i,j} + a_{k,j,i} + a_{k,j,j}.$$

Mais, $A_k \in E$, donc A_k est symétrique et $a_{k,i,j} = a_{k,j,i}$, donc :

$$(e_i + e_j)^\top A_k (e_i + e_j) = a_{k,i,i} + 2a_{k,i,j} + a_{k,j,j} \Leftrightarrow a_{k,i,j} = \frac{1}{2} [(e_i + e_j)^\top A_k (e_i + e_j) - a_{k,i,i} - a_{k,j,j}].$$

Et comme les suites $(a_{k,i,i})_{k \in \mathbb{N}}$, $(a_{k,j,j})_{k \in \mathbb{N}}$ et $((e_i + e_j)^\top A_k (e_i + e_j))_{k \in \mathbb{N}}$ convergent, la suite $(a_{k,i,j})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel $a_{i,j}$.

Ceci prouve que la suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Or, l'application $M \mapsto M^\top$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc $A_k^\top \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} A^\top$, mais pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_k \in S_n(\mathbb{R})$ donc $A_k^\top = A_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} A$ et par unicité de la limite, on obtient $A^\top = A$, soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.

Ainsi :

Toute suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$, croissante et majorée pour $<$, converge dans E .

Exercice 9

1) Notons $A = (a_{i,j})$. On veut :

$$A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall P \in O_n(\mathbb{R}), P^{-1}AP = P^\top AP \text{ est à diagonale nulle.}$$

($\Rightarrow$) Si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, alors pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{i,j} = -a_{j,i}$ et en particulier, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{i,i} = -a_{i,i}$, soit $a_{i,i} = 0$, donc si A est antisymétrique, elle est à diagonale nulle.

Or, pour toute matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$, on a $(P^\top AP)^\top = P^\top A^\top (P^\top)^\top = P^\top (-A)P = -P^\top AP$. Ainsi, $P^\top AP$ est antisymétrique, donc à diagonale nulle.

($\Leftarrow$) On suppose ici que pour toute matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$, $P^\top AP$ est à diagonale nulle. En particulier, A est à diagonale nulle (car $I_n \in O_n(\mathbb{R})$ et $I_n^\top AI_n = A$).

Soit maintenant pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $i \neq j$:

$$P_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & \cdots & 0 & -\sqrt{2}/2 & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \end{matrix}$$

On a $P_{i,j} \in O_n(\mathbb{R})$ et si on note $P_{i,j}^T A = (c_{k,\ell})$ et $P_{i,j}^T A P_{i,j} = (b_{k,\ell})$, on a, avec les $a_{k,k}$ nuls:

$$\begin{cases} c_{i,i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} a_{j,i} \\ c_{i,j} = \frac{\sqrt{2}}{2} a_{i,j} \end{cases} \quad \text{donc} \quad b_{i,i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} c_{i,i} + \frac{\sqrt{2}}{2} c_{i,j} = \frac{1}{2} (a_{i,j} + a_{j,i}).$$

Or, $P^T A P$ est à diagonale nulle donc $b_{i,i} = 0$, ce qui donne $a_{j,i} = -a_{i,j}$. Ainsi, A est antisymétrique.

Finalement, on a bien :

A est antisymétrique si et seulement si $P^{-1} A P$ est à diagonale nulle pour toute matrice orthogonale P .

2) Soit $X \in \ker(I_n - A)$. On a $(I_n - A)X = 0$, donc :

$$AX = X.$$

Or :

$$(AX | X) = (AX)^T X = X^T A^T X = X^T (-A) X = -X^T A X = -(X | AX) = -(AX | X).$$

Donc, $(AX | X) = 0$, mais comme $AX = X$, on obtient $(X | X) = 0$, soit $X = 0$.

Ainsi, $\ker(I_n - A) = \{0\}$, donc $I_n - A$ est inversible.

Alors, $(I_n - A)^T$ est aussi inversible et $(I_n - A)^T = I_n^T - A^T = I_n + A$, donc $I_n + A$ est inversible.

Finalement :

$I_n + A$ et $I_n - A$ sont inversibles.

3) On pose $B = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$.

Avec $(I_n - A)^T = I_n + A$ et de même, $(I_n + A)^T = I_n - A$, on a :

$$B^T = [(I_n + A)^{-1}(I_n - A)]^T = (I_n - A)^T [(I_n + A)^{-1}]^T = (I_n - A)^T [(I_n + A)^T]^{-1} = (I_n + A)(I_n - A)^{-1}.$$

Or, $(I_n + A)^{-1}$ et $I_n - A$ commutent. En effet :

$$\begin{aligned} (I_n + A)^{-1}(I_n - A) &= (I_n + A)^{-1} [2I_n - (I_n + A)] = 2(I_n + A)^{-1} - I_n \\ (I_n - A)(I_n + A)^{-1} &= [2I_n - (I_n + A)](I_n + A)^{-1} = 2(I_n + A)^{-1} - I_n \end{aligned}$$

Donc, $B^T = (I_n - A)^{-1}(I_n + A)$ et :

$$BB^T = [(I_n + A)^{-1}(I_n - A)] [(I_n - A)^{-1}(I_n + A)] = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)(I_n - A)^{-1}(I_n + A) = (I_n + A)^{-1}(I_n + A) = I_n.$$

Donc, $B \in O_n(\mathbb{R})$. De plus :

$$\begin{aligned} \det B &= \det [(I_n + A)^{-1}(I_n - A)] = [\det(I_n + A)]^{-1} \det(I_n - A) \\ &= [\det^t(I_n + A)]^{-1} \det(I_n - A) = [\det(I_n - A)]^{-1} \det(I_n - A) = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien :

$$B \in SO_n(\mathbb{R})$$

4) On a vu plus haut que $B = 2(I_n + A)^{-1} - I_n$, soit :

$$I_n + B = 2(I_n + A)^{-1}.$$

Comme $(I_n + A)^{-1}$ est inversible :

$$I_n + B \text{ est inversible.}$$

De plus :

$$(I_n + B)^{-1} = [2(I_n + A)^{-1}]^{-1} = \frac{1}{2}(I_n + A).$$

Alors :

$$A = 2(I_n + B)^{-1} - I_n = (I_n + B)^{-1} [2I_n - (I_n + B)].$$

Donc, on a bien :

$$A = (I_n + B)^{-1}(I_n - B)$$

Exercice 10

1) Comme $u \in S(E)$, u est diagonalisable dans une base orthonormée de E .

Autrement dit, il existe une base orthonormée de E , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ telle que :

$$D = M_{\mathcal{B}}(u) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_p, \dots, \lambda_p)$$

où $Sp(u) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ et λ_k apparaît α_k fois dans la diagonale de D (avec α_k la multiplicité de λ_k).

- Si $0 \notin Sp(u)$, alors $\ker u = \{0\}$ et $\text{Im } u = E$, donc on a bien $E = \ker u \oplus^\perp \text{Im } u$.
- Si $0 \in Sp(u)$, alors en posant $\lambda_1 = 0$, on a $\ker u = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{\alpha_1})$ et $\text{Im } u = \text{Vect}(e_{\alpha_1+1}, \dots, e_n)$. Comme la réunion de $(e_1, \dots, e_{\alpha_1})$ et $(e_{\alpha_1+1}, \dots, e_n)$ forme la base orthonormée $\mathcal{B}$, on a à nouveau $E = \ker u \oplus^\perp \text{Im } u$.

Finalement, dans tous les cas, on a bien :

$$E = \ker u \oplus^\perp \text{Im } u$$

2) Comme $u \in S(E)$, u est diagonalisable dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E .

Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit λ_k la valeur propre associée à e_k . On a $\lambda_k \geq 0$ car $v \in S^+(E)$ et pour tout $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k \in E$:

$$u(x) = \sum_{k=1}^n x_k u(e_k) = \sum_{k=1}^n x_k \lambda_k e_k \quad \text{donc} \quad (u(x) | x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2 \geq 0.$$

De plus :

$$(u(x)|x) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2 = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_k x_k^2 = 0 \text{ (car } \lambda_k x_k^2 \geq 0) \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_k x_k = 0.$$

Ainsi :

$$(u(x)|x) = 0 \Leftrightarrow u(x) = \sum_{k=1}^n x_k \lambda_k e_k = 0.$$

Donc, pour tout $x \in E$, $(u(x)|x) \geq 0$, avec égalité si et seulement si $x \in \ker u$.

Ces résultats sont les mêmes pour v .

- Soit $x \in \ker u \cap \ker v$.

On a alors $u(x) = v(x) = 0$, donc $u(x) + v(x) = (u+v)(x) = 0$, soit $x \in \ker(u+v)$.

Ainsi : $\ker u \cap \ker v \subset \ker(u+v)$.

- Soit maintenant $x \in \ker(u+v)$.

Alors $(u+v)(x) = u(x) + v(x) = 0$, donc $u(x) = -v(x)$ et $(u(x)|x) = (-v(x)|x) = -(v(x)|x)$.

Or, $(u(x)|x) \geq 0$ et $(v(x)|x) \geq 0$, donc $(u(x)|x) = -(v(x)|x)$ implique que $(u(x)|x) = (v(x)|x) = 0$.

Et, d'après ce que l'on a vu plus haut, ceci implique $u(x) = v(x) = 0$, soit $x \in \ker u \cap \ker v$.

Ainsi : $\ker(u+v) \subset \ker u \cap \ker v$.

Finalement, on a bien :

$$\ker(u+v) = \ker u \cap \ker v$$

Pour tout $x \in E$, on a $(u+v)(x) = u(x) + v(x) \in \text{Im } u + \text{Im } v$, donc :

$$\text{Im}(u+v) \subset \text{Im } u + \text{Im } v \quad (1)$$

Ceci implique que : $\text{rg}(u+v) \leq \dim(\text{Im } u + \text{Im } v)$.

Soient $x \in \ker u \cap \ker v$ et $y \in \text{Im } u + \text{Im } v$. Il existe $x_1, x_2 \in E$ tels que $y = u(x_1) + v(x_2)$ et :

$$(y|x) = (u(x_1) + v(x_2)|x) = (u(x_1)|x) + (v(x_2)|x) = (x_1|u(x)) + (x_2|v(x)) = (x_1|0) + (x_2|0) = 0.$$

Ainsi, $(\ker u \cap \ker v) \perp (\text{Im } u + \text{Im } v)$, donc :

$$(\ker u \cap \ker v) + (\text{Im } u + \text{Im } v) = (\ker u \cap \ker v) \oplus (\text{Im } u + \text{Im } v) = (\ker(u+v)) \oplus (\text{Im } u + \text{Im } v) \subset E$$

Alors :

$$\dim(\ker(u+v)) + \dim(\text{Im } u + \text{Im } v) \leq n \Leftrightarrow \dim(\text{Im } u + \text{Im } v) \leq n - \dim(\ker(u+v)).$$

Avec le théorème du rang, ceci implique que : $\text{rg}(u+v) \leq \dim(\text{Im } u + \text{Im } v)$.

Ainsi :

$$\text{rg}(u+v) = \dim(\text{Im } u + \text{Im } v) \quad (2)$$

Les résultats (1) et (2) permettent alors de conclure que :

$$\text{Im}(u+v) = \text{Im } u + \text{Im } v$$