

Corrigés des TD du chapitre 19

Exercice 1

On se place dans un repère orthonormé du plan d'origine O et on appelle $\mathcal{C}$ la courbe que l'on étudie.

$$\mathcal{C} : M(t) \begin{cases} x(t) = \cos^2 t + \ln(\sin t) \\ y(t) = \sin t \cos t \end{cases}$$

Les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont définies, de classe C^∞ et 2π -périodiques sur $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]2k\pi, (2k+1)\pi[$.

La courbe $\mathcal{C}$ est entièrement décrite quand t décrit $]0, \pi[$.

Pour tout $t \in]0, \pi[$, $\pi - t \in]0, \pi[$, et on a $x(\pi - t) = x(t)$ et $y(\pi - t) = -y(t)$, donc $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'axe (Ox) et on peut l'étudier sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

On a alors pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\begin{cases} x'(t) = -2 \sin t \cos t + \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{\cos t}{\sin t} \cos 2t \\ y'(t) = \cos 2t \end{cases}$$

D'où le tableau :

t	0	$\pi/4$	$\pi/2$
$x'(t)$	$+\infty$	+	0
x	$-\infty$	$(1 - \ln 2)/2$	0
y	0	$1/2$	0
$y'(t)$	1	+	0
		0	+
			-1

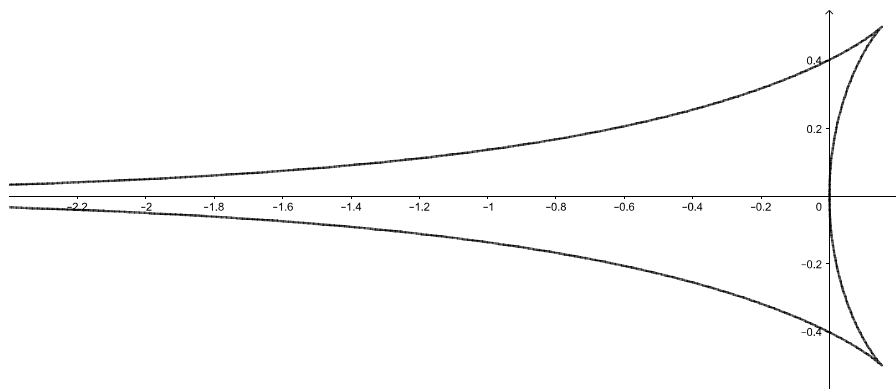
Tangentes particulières :

La tangente est toujours dirigée par $\vec{u} \begin{vmatrix} \cos t \\ \sin t \end{vmatrix}$. Il y a une tangente verticale quand $t = \frac{\pi}{2}$ et $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$, de coordonnées $\left(\frac{1 - \ln 2}{2}; \frac{1}{2}\right)$, est un point de rebroussement, avec une demi-tangente dirigée par $\vec{u}(1; 1)$.

Branche infinie :

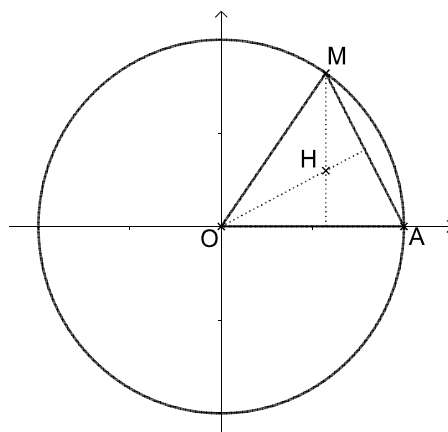
On a $\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = -\infty$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = 0$, donc l'axe (Ox) est asymptote à $\mathcal{C}$ quand $t \rightarrow 0^+$.

Courbe :



Exercice 2

Quitte à modifier le repère, on peut supposer que O est le centre et A le point de coordonnées $(a; 0)$.



Posons $t = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$, donc $M(a \cos t, a \sin t)$ et notons $H(x(t), y(t))$ l'orthocentre de OAM .

Remarquons que si $M = A$ ou A' (où A' est le point diamétralement opposé à A sur $\mathcal{C}$), le triangle est aplati et H n'est pas défini. Donc, on suppose $M \neq A$ et A' , donc $t \neq 0 [\pi]$ (et $\sin t \neq 0$).

On a alors :

- $(OH) \perp (AM)$ donc $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AM} = x(t)(a \cos t - a) + y(t)(a \sin t) = 0$, soit : $x(t) \cos t + y(t) \sin t = x$.
- $(AH) \perp (OM)$ donc $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{OM} = (x(t) - a)a \cos t + y(t)a \sin t = 0$, soit : $x(t) \cos t + y(t) \sin t = a \cos t$.

On obtient alors :

$$\begin{cases} x(t) \cos t + y(t) \sin t = x \\ x(t) \cos t + y(t) \sin t = a \cos t \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = \frac{a(1 - \cos t) \cos t}{\sin t} \end{cases}$$

Les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont définies, de classe C^∞ et 2π -périodiques sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

La courbe est entièrement décrite quand t décrit $]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$.

Les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont respectivement paire et impaire, donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe (Ox) et on peut l'étudier sur $]0, \pi[$. Alors, pour tout $t \in]0, \pi[$, on a :

$$\begin{cases} x'(t) = -a \sin t \\ y'(t) = a(1 - \cos t) \frac{\cos^2 t + \cos t - 1}{\sin^2 t} \end{cases}$$

Les racines de $X^2 + X - 1$ sont $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,6$ et $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \approx -1,6$.

En posant $t_0 = \arccos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, on a :

$$y(t) = a \frac{1 - \cos t}{\sin^2 t} \left(\cos t + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) (\cos t - \cos t_0).$$

On obtient le tableau :

t	0	t_0	π
$x'(t)$		—	
x	a		$-a$
y	0	$y(t_0)$	$-\infty$
$y'(t)$	+	0	—

On a :

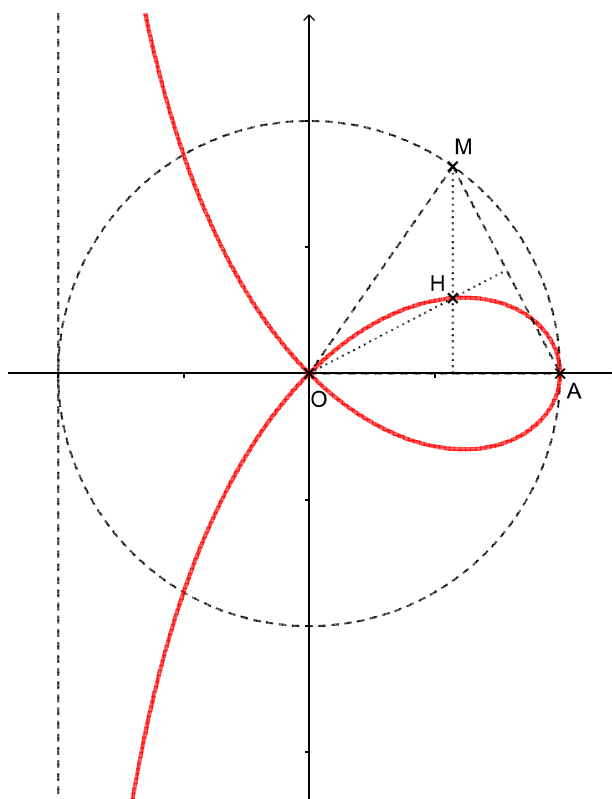
$$y(t) = a \cos t \frac{1 - \cos t}{\sin t} = a \cos t \frac{t^2/2 + o(t^2)}{t + o(t^2)} = a \cos t \frac{t/2 + o(t)}{1 + o(t)} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} y(t) = 0.$$

Comme $x(0) = a$, la courbe peut être prolongée au point $(a, 0)$ quand $t \rightarrow 0$.

Enfin :

- En $t = 0$, $x'(0) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow 0} y'(t) = a \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2/2 + o(t^2)}{t^2 + o(t^2)} = \frac{a}{2}$: il y a une tangente verticale.
- En $t = t_0$, il y a une tangente horizontale.
- Quand $t \rightarrow \pi$, il y a une asymptote verticale d'équation $x = -a$.

On obtient la courbe (en rouge sur la figure suivante).



Exercice 3

Remarquons que $O \in C$ et pour tout point $M(x, y)$ différent de O , on peut écrire de manière unique :

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases} \text{ avec } r \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } t \in [0, 2\pi[.$$

On a alors :

$$M(x, y) \in C \Leftrightarrow (x^2 + y^2)^3 = (x^2 - y^2)^2 \Leftrightarrow r^6 = r^4 (\cos^2 t - \sin^2 t)^2 \Leftrightarrow r^2 = \cos^2 2t \Leftrightarrow r = |\cos 2t|.$$

Donc :

$$M(x, y) \in C \Leftrightarrow \begin{cases} x = |\cos 2t| \cos t \\ y = |\cos 2t| \sin t \end{cases}$$

Ainsi, un paramétrage de C est :

$$\begin{cases} x(t) = |\cos 2t| \cos t \\ y(t) = |\cos 2t| \sin t \end{cases}$$

Si on pose $f(x, y) = (x^2 + y^2)^3 - (x^2 - y^2)^2$, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 6x(x^2 + y^2)^2 - 4x(x^2 - y^2) = 0 \\ 6y(x^2 + y^2)^2 + 4y(x^2 - y^2) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = y = 0 \text{ ou } \begin{cases} 3(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2) \\ 3(x^2 + y^2)^2 = -2(x^2 - y^2) \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \end{aligned}$$

Et, comme $O(0, 0) \in C$:

Le seul point singulier de C est l'origine O .

Exercice 4

Si on pose $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

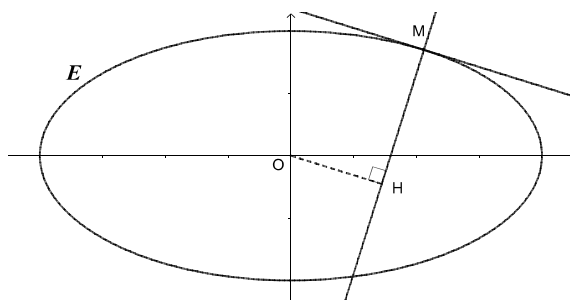
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2 \frac{x}{a^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2 \frac{y}{b^2}.$$

On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y = 0$ et, comme $O(0, 0) \notin E$, la courbe est régulière.

Soit $M(x_0, y_0) \in E$ et H le projeté orthogonal de O sur la normale $\mathcal{N}$ à E en M , comme sur la figure donnée plus loin. On a :

$$d(O, \mathcal{N}) = OH.$$

Figure :



La normale $\mathcal{N}$ à $\mathcal{E}$ en M est la droite dirigée par $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0) = 2\left(\frac{x_0}{a^2}\vec{i} + \frac{y_0}{b^2}\vec{j}\right)$ et passant par M , donc d'équation :

$$\frac{y_0}{b^2}(x - x_0) - \frac{x_0}{a^2}(y - y_0) = 0.$$

On a alors :

$$\begin{cases} H(x_H, y_H) \in \mathcal{N} \\ \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y_0}{b^2}(x_H - x_0) - \frac{x_0}{a^2}(y_H - y_0) = 0 \\ x_H \frac{x_0}{a^2} + y_H \frac{y_0}{b^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \frac{a^2(a^2 - b^2)x_0 y_0^2}{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2} \\ y_H = \frac{b^2(b^2 - a^2)x_0^2 y_0}{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2} \end{cases}$$

Et :

$$OH^2 = x_H^2 + y_H^2 = \left(\frac{a^2(a^2 - b^2)x_0 y_0^2}{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2}\right)^2 + \left(\frac{b^2(b^2 - a^2)x_0^2 y_0}{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2}\right)^2 = (a^2 - b^2)^2 \frac{x_0^2 y_0^2}{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2}.$$

Si on pose $t = \frac{x_0^2}{a^2} \in [0, 1]$, on a $\frac{y_0^2}{b^2} = 1 - t$ car $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, et $OH^2 = (a^2 - b^2)^2 h(t)$ avec :

$$h(t) = \frac{t(1-t)}{b^2 t + a^2(1-t)}.$$

La fonction h est définie et dérivable sur $[0, 1]$ (car rationnelle) et :

$$h'(t) = \frac{a^2(1-t)^2 - b^2 t^2}{(b^2 t + a^2(1-t))^2} = \frac{a(1-t) + bt}{(b^2 t + a^2(1-t))^2} (a - (a+b)t).$$

On a $h'(t) \geq 0$ pour $t \in \left[0, \frac{a}{a+b}\right]$ et $h'(t) \leq 0$ pour $t \in \left[\frac{a}{a+b}, 1\right]$, donc h est maximale quand $t = \frac{a}{a+b}$.

Ainsi, OH est maximale quand $x_0 = \pm a\sqrt{\frac{a}{a+b}}$ et $y_0 = \pm b\sqrt{\frac{b}{a+b}}$, et donc :

Les normales à $\mathcal{E}$ les plus éloignées de O sont les normales aux points :

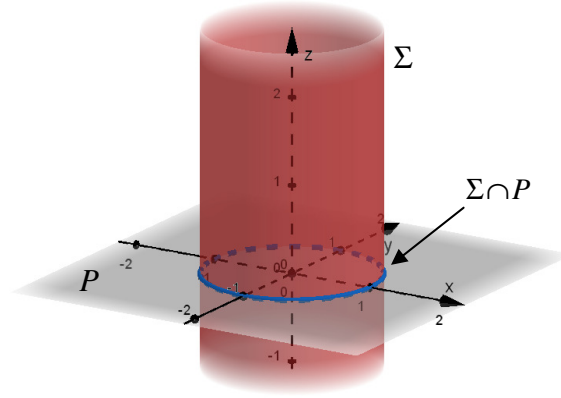
$$\left(a\sqrt{\frac{a}{a+b}}, b\sqrt{\frac{b}{a+b}}\right), \left(a\sqrt{\frac{a}{a+b}}, -b\sqrt{\frac{b}{a+b}}\right), \left(-a\sqrt{\frac{a}{a+b}}, b\sqrt{\frac{b}{a+b}}\right) \text{ et } \left(-a\sqrt{\frac{a}{a+b}}, -b\sqrt{\frac{b}{a+b}}\right)$$

Exercice 5

1) On a $\Sigma = f^{-1}(\{1\}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1\}$, donc l'intersection de Σ et du plan P d'équation $z = 0$ est la courbe d'équation $x^2 + y^2 = 1$ dans ce plan :

$\Sigma \cap P$ est le cercle de centre O et de rayon 1 dans la plan P .

La surface Σ est un cylindre de révolution (autour de l'axe de z) et on obtient le graphique :



2) L'application f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ (polynomiale) avec pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0$$

Comme $f(x, y, z) = 1$ est une équation de Σ , une équation du plan tangent à Σ en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ est :

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) = 0.$$

Avec $x_0^2 + y_0^2 = 1$, on obtient :

$$x_0x + y_0y = 1$$

3) a. Les applications $h_1 : t \mapsto (\cos(t + \varphi), \sin(t + \varphi), z_0)$ et $h_2 : t \mapsto (x_0, y_0, z_0 + t)$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, avec :

$$h_1' : t \mapsto (-\sin(t + \varphi), \cos(t + \varphi), 0) \quad \text{et} \quad h_2' : t \mapsto (0, 0, 1).$$

L'application g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$, donc, d'après la règle de la chaîne, $G_1 = g \circ h_1$ et $G_2 = g \circ h_2$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$G_1'(t) = -\sin(t + \varphi) \frac{\partial g}{\partial x}(\cos(t + \varphi), \sin(t + \varphi), z_0) + \cos(t + \varphi) \frac{\partial g}{\partial y}(\cos(t + \varphi), \sin(t + \varphi), z_0)$$

$$G_2'(t) = \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0 + t)$$

Finalement, avec $(x_0, y_0) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, on peut conclure que :

$$G_1 \text{ et } G_2 \text{ sont dérivables en } 0, \text{ avec } G_1'(0) = -y_0 \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + x_0 \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \text{ et } G_2'(0) = \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0).$$

b. Remarquons que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(\cos(t + \varphi), \sin(t + \varphi), z_0) \in \Sigma$ (car $\cos^2(t + \varphi) + \sin^2(t + \varphi) = 1$) et comme la restriction de g à Σ admet un extremum local en M_0 et $G_1(0) = g(x_0, y_0, z_0)$, G_1 admet un extremum local en 0, et comme G_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$G_1'(0) = -y_0 \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + x_0 \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

De même, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(x_0, y_0, z_0 + t) \in \Sigma$ (car $x_0^2 + y_0^2 = 1$) et $G_2(0) = g(x_0, y_0, z_0)$, donc G_2 admet un extremum local en 0, et comme G_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$G_2'(0) = \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\nabla f(M_0) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right) = 2(x_0, y_0, 0) \\ \nabla g(M_0) &= \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), 0 \right)\end{aligned}$$

Ainsi, $\nabla f(M_0)$ et $\nabla g(M_0)$ appartiennent tous les deux au plan vectoriel $\text{Vect}(\vec{i}, \vec{j})$ et :

$$\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\nabla f(M_0), \nabla g(M_0)) = \begin{vmatrix} x_0 & \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \\ y_0 & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} = x_0 \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) - y_0 \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Donc :

$\nabla f(M_0) \text{ et } \nabla g(M_0) \text{ sont colinéaires.}$

Exercice 6

1) Posons $f(x, y, z) = xyz - 1$. Alors, $f(x, y, z) = 0$ est une équation de Σ .

L'application f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ (car polynomiale) et pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = yz, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = xz \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = xy.$$

Or, pour tout point de Σ , $xyz = 1$, donc x, y et z sont tous les trois non nuls et ainsi, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \neq 0.$$

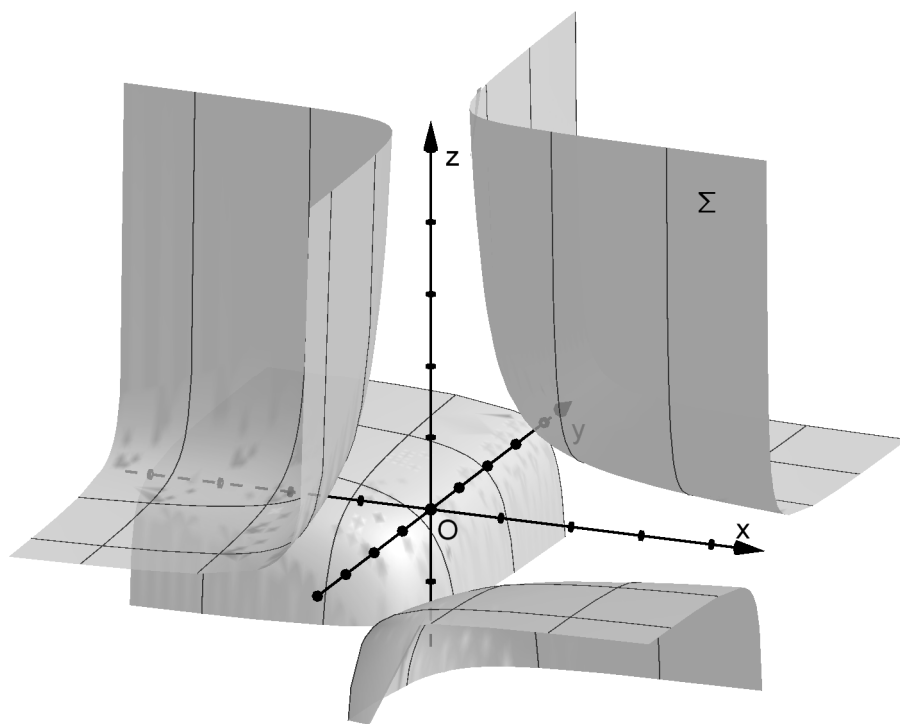
Ceci prouve que tous les points de Σ sont réguliers et donc que :

$\Sigma \text{ est une surface régulière.}$

2) Quand $x_0 \neq 0$, l'intersection de Σ et du plan d'équation $x = x_0$ a pour équation $x_0 y z = 1$, soit $y = \frac{1}{x_0 z}$: c'est une hyperbole. Quand $x_0 = 0$, l'intersection est vide.

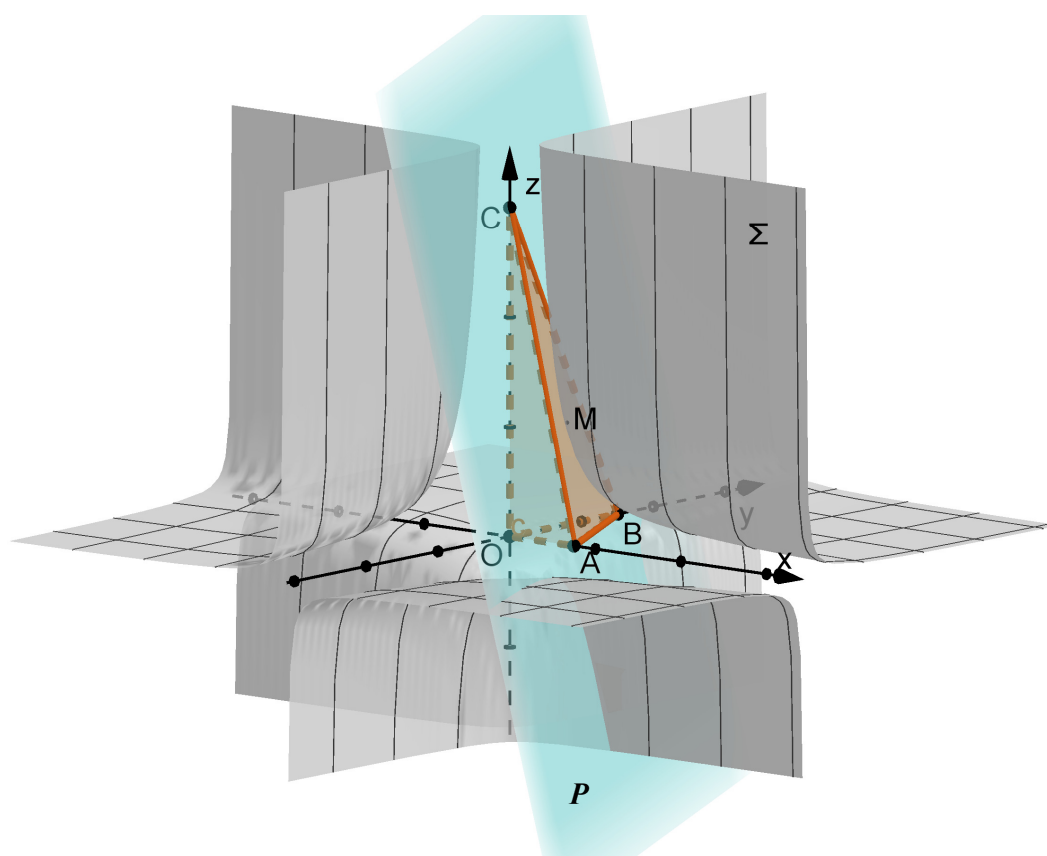
De même avec les plans d'équation $y = y_0$ ou $z = z_0$.

On obtient l'allure :



3) On cherche le volume V_{OABC} du tétraèdre $OABC$ formé par un plan P tangent à Σ en un point $M(x_0, y_0, z_0)$, et les trois plans (xOy) , (yOz) et (xOz) : A , B et C sont les points d'intersection de P avec les axes (Ox) , (Oy) et (Oz) respectivement.

On a la figure :



Une équation de P est :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Soit, avec les dérivées partielles vues plus haute et $x_0 y_0 z_0 = 1$:

$$y_0 z_0 x + x_0 z_0 y + x_0 y_0 z = 3.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} A = P \cap (Ox) &\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 z_0 x_A + x_0 z_0 y_A + x_0 y_0 z_A = 3 \\ y_A = z_A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A\left(\frac{3}{y_0 z_0}, 0, 0\right) \\ B = P \cap (Oy) &\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 z_0 x_A + x_0 z_0 y_A + x_0 y_0 z_A = 3 \\ x_A = z_A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow B\left(0, \frac{3}{x_0 z_0}, 0\right) \\ C = P \cap (Oz) &\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 z_0 x_A + x_0 z_0 y_A + x_0 y_0 z_A = 3 \\ x_A = y_A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow C\left(0, 0, \frac{3}{x_0 y_0}\right) \end{aligned}$$

Donc :

$$V_{OABC} = \frac{1}{6} \left| \det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \right| = \frac{1}{6} \left| \frac{3}{y_0 z_0} \frac{3}{x_0 z_0} \frac{3}{x_0 y_0} \right| = \frac{1}{6} \frac{27}{(x_0 y_0 z_0)^2} = \frac{9}{2}.$$

Ainsi :

Le volume du tétraèdre formé par un plan tangent à Σ et les trois plans (xOy) , (yOz) et (xOz) est constant et vaut 4,5.

Exercice 7

1) Le plan (xOy) est le plan d'équation $z = 0$. La projection de S sur le plan (xOy) a donc pour équation (dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de ce plan) $x^2 + y^2 = 1$ et donc :

La projection de S sur le plan (xOy) est le cercle de centre O et de rayon 1.

2) Posons $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz - 1$. Alors, $f(x, y, z) = 0$ est une équation de S .

L'application f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ (car polynomiale) et pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2(x - yz), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2(y - xz) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2(z - xy).$$

On a alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = yz \\ y = xz \\ z = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = yz \\ y = xz \\ z = x^2 z \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x^2 = 1 \\ yz = x \\ z^2 = 1 \end{cases}$$

Comme on a de plus, $x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz = 1$, ceci donne :

$$\begin{cases} x^2 = y^2 = z^2 = 1 \\ xyz = 1 \end{cases}$$

Et on obtient quatre points singuliers :

$$(1, 1, 1) \quad (-1, -1, 1) \quad (-1, 1, -1) \quad (1, -1, -1)$$

3) Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de S et $\vec{u}(a, b, c)$ un vecteur unitaire ($a^2 + b^2 + c^2 = 1$).

La droite D passant par M_0 et dirigée par $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

Alors, $D \subset S$ si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$(at + x_0)^2 + (bt + y_0)^2 + (ct + z_0)^2 - 2(at + x_0)(bt + y_0)(ct + z_0) = 1.$$

Avec $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2x_0y_0z_0 = 1$ et $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, ceci revient à :

$$\begin{cases} abc = 0 \\ 2(x_0bc + abz_0 + acy_0) = 1 \\ ay_0z_0 + bx_0z_0 + cx_0y_0 = ax_0 + by_0 + cz_0 \end{cases}$$

Si $a = 0$, on a $b^2 + c^2 = 1$ et on peut écrire $b = \cos \alpha$ et $c = \sin \alpha$, et le système ci-dessus se réécrit :

$$\begin{cases} 2bcx_0 = 1 \\ bx_0z_0 + cx_0y_0 = by_0 + cz_0 \end{cases}$$

Ceci implique (entre autres) que x_0 , b et c (donc $\sin 2\alpha$) sont non nuls et :

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{2bc} \\ \frac{1-2c^2}{2c}z_0 = \frac{2b^2-1}{2b}y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{1}{\sin 2\alpha} \\ (\cos 2\alpha)z_0 = (\cos 2\alpha \tan \alpha)y_0 \end{cases}$$

Si $\cos 2\alpha = 0$, soit $b^2 = c^2 = \frac{1}{2}$, donc $|b| = |c| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (avec bc du signe de x_0), on obtient $\sin 2\alpha = \pm 1$, donc $x_0 = \pm 1$ et $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2x_0y_0z_0 = 1$ donne :

$$\begin{cases} y_0 = z_0, b = c & \text{si } x_0 = 1 \\ y_0 = -z_0, b = -c & \text{si } x_0 = -1 \end{cases}$$

Soit :

$$(x_0, y_0, z_0) = (1, k, k) \text{ ou } (-1, -k, k) \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

On obtient alors les droites d'équations :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -z \end{cases}$$

Si $\cos 2\alpha \neq 0$ (soit $\alpha \neq 0 \left[\frac{\pi}{4} \right]$ avec aussi $\sin 2\alpha \neq 0$), on obtient :

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{\sin 2\alpha} \\ z_0 = (\tan \alpha) y_0 \end{cases}$$

Et $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2x_0y_0z_0 = 1$ donne $\sin^2 2\alpha = 1$, ce qui est absurde car $\cos 2\alpha \neq 0$.

Comme a , b et c jouent le même rôle, on obtient finalement les six droites d'équations cartésiennes :

$$D_1 : \begin{cases} x=1 \\ y=z \end{cases} \quad \text{ou} \quad D_2 : \begin{cases} x=-1 \\ y=-z \end{cases} \quad \text{ou} \quad D_3 : \begin{cases} y=1 \\ x=z \end{cases} \quad \text{ou} \quad D_4 : \begin{cases} y=-1 \\ x=-z \end{cases} \quad \text{ou} \quad D_5 : \begin{cases} z=1 \\ x=y \end{cases} \quad \text{ou} \quad D_6 : \begin{cases} z=-1 \\ x=-y \end{cases}$$

4) Soit S_c la partie de S limitée au cube $[-1,1]^3$, soit :

$$S_c = \{M(x, y, z) \in \mathcal{E} \mid (x, y, z) \in [-1,1]^3 \text{ et } x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz = 1\}$$

où $\mathcal{E}$ désigne l'espace. Notons par ailleurs :

$$\Sigma = \{M(\cos u, \cos v, \cos(u+v)) \in \mathcal{E} \mid (u, v) \in \mathbb{R}^2\}.$$

On veut prouver que $S_c = \Sigma$.

Pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on a $(\cos u, \cos v, \cos(u+v)) \in [-1,1]^3$ et :

$$\begin{aligned} \cos^2 u + \cos^2 v + \cos^2(u+v) - 2\cos u \cos v \cos(u+v) \\ &= \cos^2 u + \cos^2 v + (\cos u \cos v - \sin u \sin v)^2 - 2\cos u \cos v (\cos u \cos v - \sin u \sin v) \\ &= \cos^2 u + \cos^2 v + \cos^2 u \cos^2 v + \sin^2 u \sin^2 v - 2\cos u \cos v \sin u \sin v \\ &\quad - 2\cos u^2 \cos^2 v + 2\cos u \cos v \sin u \sin v \\ &= \cos^2 u + \cos^2 v - \cos^2 u \cos^2 v + (1 - \cos^2 u)(1 - \cos^2 v) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc, $M(\cos u, \cos v, \cos(u+v)) \in S_c$ et ainsi : $\underline{\Sigma \subset S_c}$.

Soit $M(x, y, z) \in S_c$. On a $(x, y, z) \in [-1,1]^3$, donc il existe $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$x = \cos u, \quad y = \cos v \quad \text{et} \quad z = \cos w.$$

On a de plus :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz = 1 &\Leftrightarrow z^2 - 2xyz + x^2 y^2 = 1 - x^2 - y^2 + x^2 y^2 \\ &\Leftrightarrow (z - yz)^2 = (1 - x^2)(1 - y^2) \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned} (\cos w - \cos u \cos v)^2 &= (1 - \cos^2 u)(1 - \cos^2 v) \Leftrightarrow (\cos w - \cos u \cos v)^2 = (\sin u \sin v)^2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos w - \cos u \cos v = \sin u \sin v \\ \text{ou} \\ \cos w - \cos u \cos v = -\sin u \sin v \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos w = \cos(u - v) \\ \text{ou} \\ \cos w = \cos(u + v) \end{cases} \end{aligned}$$

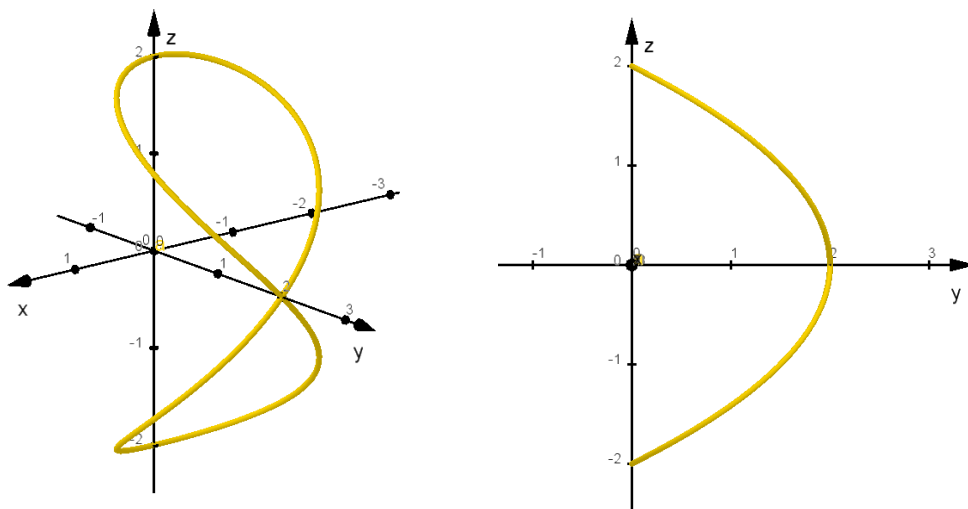
Ainsi, $(x, y, z) = (\cos u, \cos(-v), \cos(u-v))$ ou $(x, y, z) = (\cos u, \cos v, \cos(u+v))$ et dans les deux cas, on a $M \in \Sigma$, donc : $S_c \subset \Sigma$.

Finalement, on a bien $S_c = \Sigma$, autrement dit :

La partie de S limitée au cube $[-1, 1]^3$ admet le paramétrage $(u, v) \mapsto (\cos u, \cos v, \cos(u+v))$.

Exercice 8

Commençons par représenter la courbe C sous deux angles (avec ici $a = 1$).



Remarquons que les fonctions $x : t \mapsto a \sin(2t)$, $y : t \mapsto a(1 - \cos(2t))$ et $z : t \mapsto 2a \cos t$ sont 2π -périodiques, donc la courbe est entièrement parcourue quand t décrit $[-\pi, \pi]$.

De plus, si $M(t)$ est le point de coordonnées $(a \sin(2t), a(1 - \cos(2t)), 2a \cos t)$, $M(-t)$ est de coordonnées $(-a \sin(2t), a(1 - \cos(2t)), 2a \cos t)$ donc symétrique par rapport au plan (yOz) et $M(t + \pi)$ est de coordonnées $(a \sin(2t), a(1 - \cos(2t)), -2a \cos t)$ donc symétrique par rapport au plan (xOy) .

Ainsi, C est symétrique par rapport aux plans (xOy) et (yOz) .

Nous donc chercher une sphère, un cylindre parabolique et un cylindre de révolution symétriques par rapport à ces deux plans.

Soit S une sphère de centre $\Omega(0, \beta, 0)$, d'équation $x^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = cste$.

On a alors pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x(t)^2 + (y(t) - \beta)^2 + z(t)^2 &= a^2 \sin^2(2t) + (a(1 - \cos(2t)) - \beta)^2 + 4a^2 \cos^2 t \\ &= a^2 \sin^2(2t) + a^2 (1 - 2\cos(2t) + \cos^2(2t)) - 2a\beta(1 - \cos(2t)) + \beta^2 + 4a^2 \cos^2 t \\ &= 2a^2 - 2a^2 \cos(2t) - 2a\beta(1 - \cos(2t)) + \beta^2 + 2a^2(1 + \cos(2t)) \\ &= 4a^2 + \beta^2 - 2a\beta + 2a\beta \cos(2t) \end{aligned}$$

Donc, en prenant $\beta = 0$, on a $x(t)^2 + y(t) + z(t)^2 = (2a)^2$ et ainsi, $M(t) \in S$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc :

La courbe C est tracée sur la sphère de centre O et de rayon $2a$.

D'après la seconde vue de C donnée plus haut, considérons le cylindre parabolique d'équation $y + pz^2 = cste$ avec $p > 0$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} y(t) + pz(t)^2 &= a(1 - \cos(2t)) + p(4a^2 \cos^2 t) \\ &= a(1 - \cos(2t)) + 2a^2 p(1 + \cos(2t)) \\ &= 2a^2 p + a + a(2ap - 1)\cos(2t) \end{aligned}$$

Si on prend $2ap - 1 = 0$, soit $p = \frac{1}{2a}$, obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$y(t) + \frac{1}{2a} z(t)^2 = 2a.$$

Donc :

La courbe C est tracée sur le cylindre parabolique d'équation $y = 2a - \frac{1}{2a} z^2$.

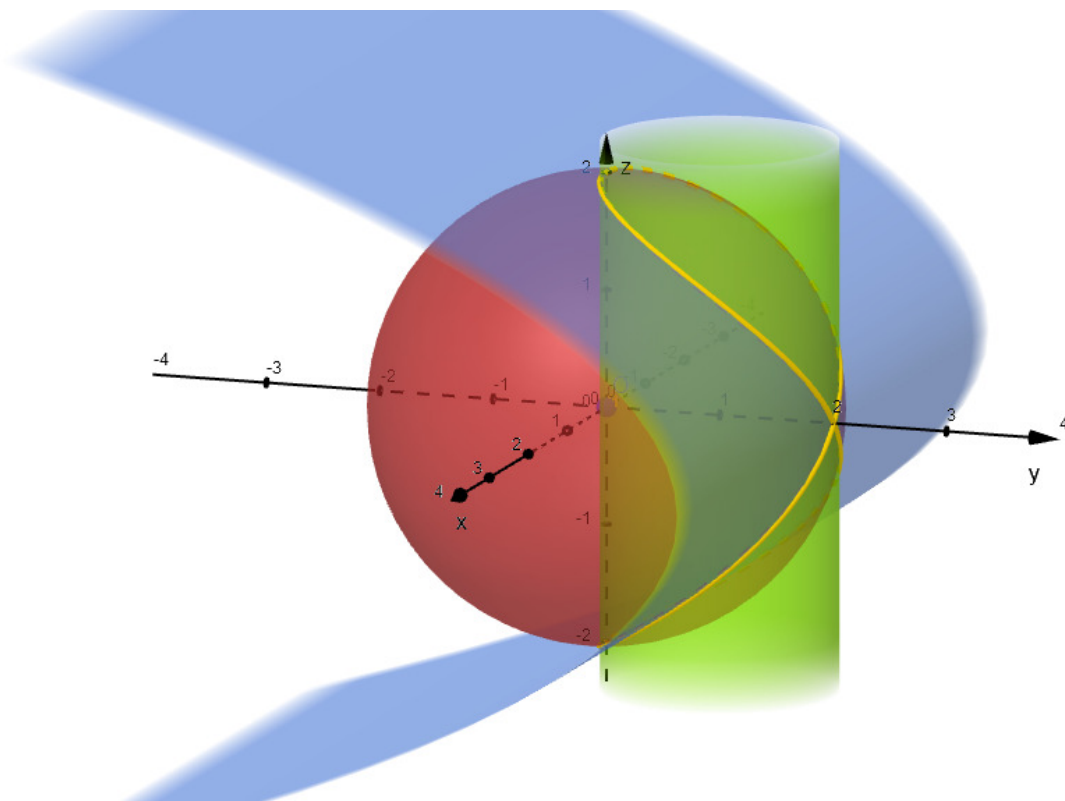
On peut remarquer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$x(t)^2 + (y(t) - a)^2 = a^2 \sin^2(2t) + a^2 \cos^2(2t) = a^2.$$

Donc :

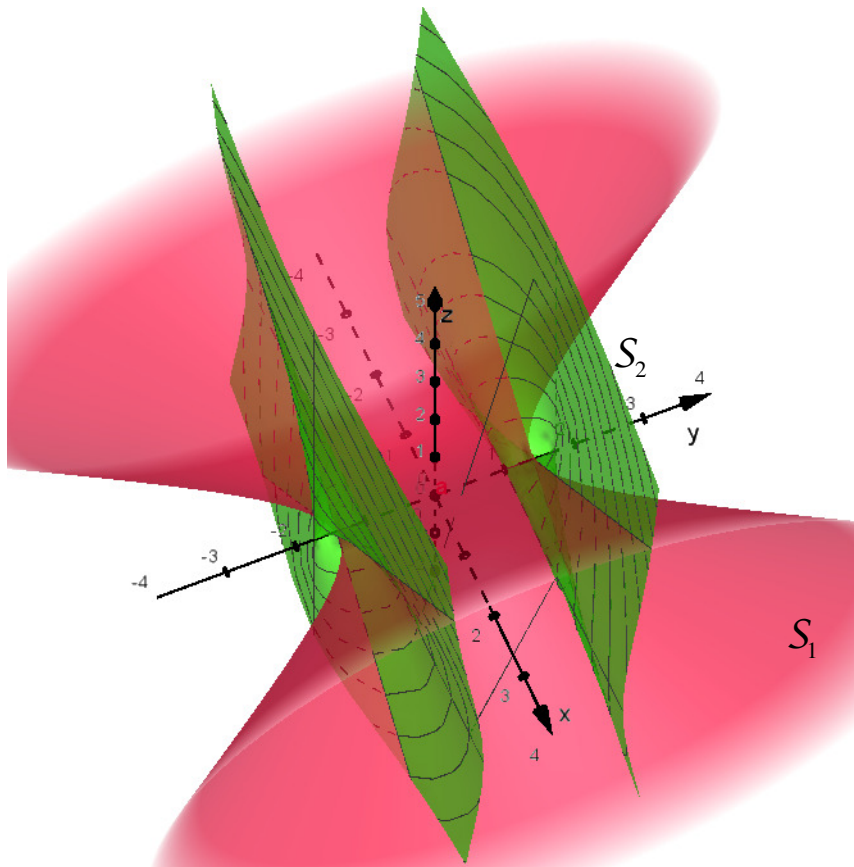
La courbe C est tracée sur le cylindre de révolution d'équation $x^2 + (y - a)^2 = a^2$.

On obtient le schéma :



Exercice 9

On a le graphique :



Les applications $f_1 : (x, y, z) \mapsto y^2(x^2 + z^2) - x^2 - 3z^2$ et $f_2 : (x, y, z) \mapsto -x^2 + \frac{y^2}{2} + z^2 - 1$ sont polynômiales donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ et pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) = 2x(y^2 - 1) \\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, z) = 2y(x^2 + z^2) \\ \frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z) = 2z(y^2 - 3) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) = -2x \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) = y \\ \frac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, z) = 2z \end{cases}$$

Remarquons que si l'on remplace x (resp. y , resp. z) par $-x$ (resp. $-y$, resp. $-z$), les équations de S_1 et S_2 restent vérifiées, donc S_1 et S_2 sont symétriques par rapport aux trois plans (xOy) , (yOz) et (xOz) . On peut ainsi limiter l'étude à aux points des courbes dont les trois coordonnées sont positives.

Soit un point $M(x, y, z)$ de l'espace. On a :

$$\begin{aligned} M \in S_1 \cap S_2 &\Leftrightarrow \begin{cases} y^2(x^2 + z^2) - x^2 - 3z^2 = 0 \\ -x^2 + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [2 + 2(x^2 - z^2)](x^2 + z^2) - x^2 - 3z^2 = 0 \\ y^2 = 2 + 2(x^2 - z^2) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - z^2)[1 + 2(x^2 + z^2)] = 0 \\ y^2 = 2 + 2(x^2 - z^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - z^2 = 0 \\ y^2 = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Si de plus, on prend $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $z \geq 0$, on obtient les points $M(x, \sqrt{2}, x)$ avec $x \geq 0$.

On a alors :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{grad}} f_1(x, \sqrt{2}, x) &= 2x\vec{i} + 4\sqrt{2}x^2\vec{j} - 2x\vec{k} = 2x(\vec{i} + 2\sqrt{2}x\vec{j} - \vec{k}) \\ \overrightarrow{\text{grad}} f_2(x, \sqrt{2}, x) &= -2x\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j} + 2x\vec{k}\end{aligned}$$

Notons $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ les plans tangents à S_1 et S_2 en $M(x, \sqrt{2}, x)$.

Quel que soit $x \geq 0$:

- $\overrightarrow{\text{grad}} f_1(x, \sqrt{2}, x)$ est colinéaire à $\vec{i} + 2\sqrt{2}x\vec{j} - \vec{k}$, qui est donc normal à $\mathcal{P}_1$ et non nul ;
- $\overrightarrow{\text{grad}} f_2(x, \sqrt{2}, x) = -2x\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j} + 2x\vec{k}$ est normal à $\mathcal{P}_1$ et non nul.

Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal (non nul) à $\mathcal{P}_1$ est orthogonal à un vecteur normal à $\mathcal{P}_2$, donc si et seulement si $\vec{i} + 2\sqrt{2}x\vec{j} - \vec{k}$ et $-2x\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j} + 2x\vec{k}$ sont orthogonaux.

Or, quel que soit $x \geq 0$:

$$(\vec{i} + 2\sqrt{2}x\vec{j} - \vec{k}) \cdot (-2x\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j} + 2x\vec{k}) = -2x + 4x - 2x = 0.$$

Ainsi :

En chacun de leurs points communs, les plans tangents à S_1 et S_2 sont perpendiculaires.

Exercice 10

1) La fonction $f : (x, y, z) \mapsto (x + y + z + 1) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 1 \right)$ est, elle aussi, rationnelle et définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$, donc de classe C^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$. Pour tout $(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 1 - \frac{1}{x^2}(x + y + z + 1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 1 - \frac{1}{y^2}(x + y + z + 1) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 1 - \frac{1}{z^2}(x + y + z + 1) \end{cases}$$

Et :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = 2 \frac{y + z + 1}{x^3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) = 2 \frac{x + z + 1}{y^3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = 2 \frac{x + y + 1}{z^3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{z^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) = -\frac{1}{y^2} - \frac{1}{z^2} \end{cases}$$

Donc, pour tout $(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$:

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2\frac{y+z+1}{x^3} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{z^2} \\ -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} & 2\frac{x+z+1}{y^3} - \frac{1}{y^2} - \frac{1}{z^2} \\ -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{z^2} & -\frac{1}{y^2} - \frac{1}{z^2} & 2\frac{x+y+1}{z^3} \end{pmatrix}$$

Remarquons que $(\mathbb{R}_+^*)^3$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$, donc si f admet un extremum (local ou global), il est atteint en un point critique. Cherchons alors les points critiques de f . Pour $(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 1 - \frac{1}{x^2}(x+y+z+1) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 1 - \frac{1}{y^2}(x+y+z+1) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 1 - \frac{1}{z^2}(x+y+z+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Alors :

$$H_f(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} = 2A \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Et :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-3 & 1 & 1 \\ 1 & X-3 & 1 \\ 1 & 1 & X-3 \end{vmatrix} \stackrel{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} X-1 & 1 & 1 \\ X-1 & X-3 & 1 \\ X-1 & 1 & X-3 \end{vmatrix} \stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{=} \begin{vmatrix} X & 1 & 1 \\ 0 & X-4 & 0 \\ 0 & 0 & X-4 \end{vmatrix} = (X-1)(X-4)^2.$$

Ainsi, $Sp(A) = \{1, 4\} \subset \mathbb{R}_+^*$, donc $A \in S_3^{++}(\mathbb{R})$. Ainsi, $H_f(1, 1, 1) = 2A \in S_3^{++}(\mathbb{R})$ et donc, f admet un minimum local strict en $(1, 1, 1)$, qui vaut $f(1, 1, 1) = 16$. Remarquons que pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{4}{a+b} = \frac{(a+b)^2 - 4ab}{(a+b)ab} = \frac{(a-b)^2}{(a+b)ab} \geq 0.$$

Donc, pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$.

En appliquant ceci à $(a, b) = (x, y)$, $(a, b) = (z, 1)$, puis $(a, b) = (x+y, z+1)$ avec $(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &\geq \frac{4}{x+y} \\ \frac{1}{z} + 1 &\geq \frac{4}{z+1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 1 \geq 4 \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{z+1} \right) \geq 4 \frac{4}{x+y+z+1} \Rightarrow f(x, y, z) \geq 16.$$

Ainsi :

La fonction f admet 16 pour minimum global sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$, atteint en $(1, 1, 1)$.

2) Sur le même principe que pour la précédente, la fonction $f : (x, y) \mapsto (x+y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$ est, elle aussi, rationnelle et définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, donc de classe C^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{x^2}(x+y) = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}(x+y) = \frac{1}{x} - \frac{x}{y^2} \end{cases}$$

En redérivant comme plus haut, on obtient pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2\frac{y}{x^3} & -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \\ -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} & 2\frac{x}{y^3} \end{pmatrix}$$

Remarquons que $(\mathbb{R}_+^*)^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, donc si f admet un extremum (local ou global), il est atteint en un point critique. Cherchons alors les points critiques de f .

Pour $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{x^2}(x+y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}(x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y.$$

Alors, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, (a, a) est un point critique de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et :

$$H_f(a, a) = \frac{2}{a^2} A \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a $\chi_A = X(X-2)$, donc, $Sp(A) = \{0, 2\} \subset \mathbb{R}_+^*$ et $A \in S_3^+(\mathbb{R})$. On ne peut alors utiliser le théorème du cours.

Mais, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, $f(a, a) = 2a \frac{2}{a} = 4$ et on a vu dans la question précédente que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \Leftrightarrow f(x, y) = (x+y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq 4.$$

Ainsi :

La fonction f admet 4 pour minimum global sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, atteint en tout (a, a) avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 11

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et D la droite passant par $(0, 0)$ et dirigée par (a, b) . Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$g(t) = f(at, bt) = (a^2 t^2 - bt)(3a^2 t^2 - bt) = 3a^4 t^4 - 4a^2 b t^3 + b^2 t^2.$$

Alors, la restriction de f à la droite D admet un minimum local strict en $(0, 0)$ si et seulement si g admet un minimum local strict en 0.

La fonction g est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g'(t) = 12a^4 t^3 - 12a^2 b t^2 + 2b^2 t$.

- Si $b \neq 0$, on a $g'(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 2b^2t$, donc $g'(t)$ s'annule en 0 en passant de négatif à positif : g admet un minimum local strict en 0.
- Si $b = 0$, alors $a \neq 0$ et on a $g'(t) = 12a^4t^3$, donc, à nouveau, $g'(t)$ s'annule en 0 en passant de négatif à positif : g admet un minimum local strict en 0.

Finalement, dans les deux cas, g admet un minimum local strict en 0 et ainsi :

La restriction de f à toutes les droites passant par $(0, 0)$ admet un minimum local strict en $(0, 0)$.

On a $f(0, 0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x, 0) = 3x^4 > 0$$

$$f(x, 2x^2) = -x^4 < 0$$

Ceci prouve que 0 n'est pas un extremum local en $(0, 0)$ et ainsi :

f n'a pas d'extremum local en $(0, 0)$.

Exercice 12

1) Pour tout réel x , on a :

$$x^2 + 4x + 3 = x^2 + 4x + 4 - 1 = (x + 2)^2 - 1 = (x + 1)(x + 3).$$

Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\cos^2 t + 4\cos t + 3 = (\cos t + 1)(\cos t + 3) \geq 0$, donc $t \mapsto x(t)$ est définie sur $\mathbb{R}$. Il en va de même pour $t \mapsto y(t)$, donc :

Le domaine de définition de $t \mapsto M(t)$ est $\mathbb{R}$.

Comme les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont 2π -périodiques sur $\mathbb{R}$, il en va de même pour $t \mapsto M(t)$ et la courbe $\mathcal{C}$ est entièrement parcourue quand t décrit $[-\pi, \pi]$.

Or, $[-\pi, \pi]$ est symétrique par rapport à 0 et pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, on a $\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$. Donc, $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses du repère (orthonormé). Ainsi :

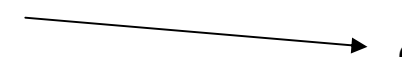
On peut étudier $t \mapsto M(t)$ sur $[0, \pi]$.

2) La fonction $t \mapsto y(t)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Par contre, comme la fonction racine carrée est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$, $t \mapsto x(t)$ est de classe C^∞ en tout point de $\mathbb{R}$ tel que $\cos^2 t + 4\cos t + 3 = (\cos t + 1)(\cos t + 3) \neq 0$, soit $\cos t \neq -1$, ou encore $t \neq \pi [2\pi]$.

Ainsi, $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ est de classe C^∞ sur $[0, \pi[$ avec :

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{-2\sin t \cos t - 4\sin t}{2\sqrt{\cos^2 t + 4\cos t + 3}} = -\sin t \frac{\cos t + 2}{\sqrt{\cos^2 t + 4\cos t + 3}} \leq 0 \\ y'(t) = \cos t \end{cases}$$

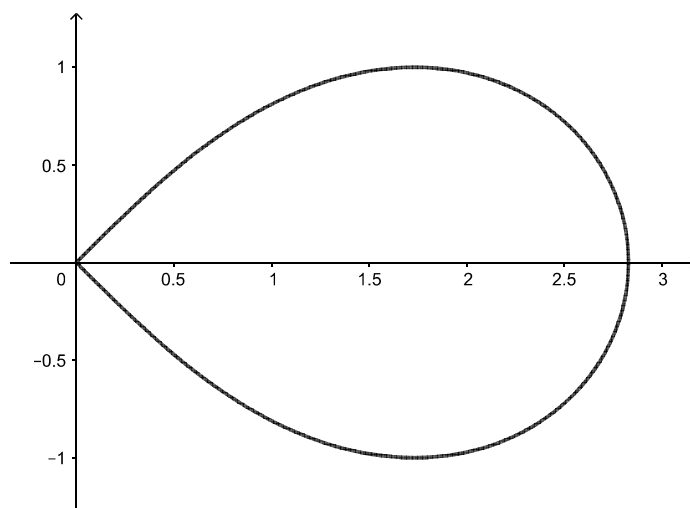
On peut alors construire le tableau :

t	0	$\pi/2$	π		
$x'(t)$	0	—			
x	$2\sqrt{2}$				
y	0	1	0		
$y'(t)$	1	+	0	—	—1

- Pour $t = 0$, $x'(0) = 0$ et $y'(0) = 1$: il y a une tangente verticale au point $M(0)(2\sqrt{2}, 0)$.
- Pour $t = \frac{\pi}{2}$, $x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ et $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$: il y a une tangente horizontale au point $M\left(\frac{\pi}{2}\right)(\sqrt{3}, 1)$.
- Pour $t = \pi$, $\lim_{t \rightarrow \pi} x'(t) = -1$ et $y'(\pi) = -1$: il y a une tangente dirigé par $\vec{u}(1, 1)$ au point $M(\pi) = O$, l'origine du repère.

Il n'y a pas de point stationnaire.

On obtient la courbe (complétée par symétrie) :



3) Quand $t \in [0, \pi]$, on a $M(t) = O$ si et seulement si $t = \pi$ et on a vu que dans ce cas, la tangente dirigé par $\vec{u}(1, 1)$: c'est la première bissectrice. Une équation de cette tangente est donc $y = x$.

Par symétrie par rapport à (Ox) , la seconde bissectrice, d'équation $y = -x$, est aussi tangente à $\mathcal{C}$ en O .

Les équations des tangentes à l'origine du repère sont $y = x$ et $y = -x$.

4) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t) \geq 0$ et :

$$x(t)^2 + y(t)^2 = 4 + 4 \cos t \Leftrightarrow \cos t = \frac{1}{4}(x(t)^2 + y(t)^2) - 1.$$

Alors :

$$\begin{aligned} x(t)^2 &= \left[\frac{1}{4}(x(t)^2 + y(t)^2) - 1 \right]^2 + 4 \left[\frac{1}{4}(x(t)^2 + y(t)^2) - 1 \right] + 3 \\ &= \frac{1}{16}(x(t)^2 + y(t)^2)^2 + \frac{1}{2}(x(t)^2 + y(t)^2) \end{aligned}$$

Donc :

$$\left(x(t)^2 + y(t)^2\right)^2 + 8\left(y(t)^2 - x(t)^2\right) = 0.$$

La courbe $\mathcal{C}$ est incluse dans la courbe d'équation cartésienne :

$$(x^2 + y^2)^2 + 8(y^2 - x^2) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + y^2 + 4)^2 = 16(x^2 + 1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4 = 4\sqrt{x^2 + 1}.$$

Réciproquement, soit un point $M(x, y)$ tel que $x \geq 0$ et $x^2 + y^2 + 4 = 4\sqrt{x^2 + 1}$. On a alors :

$$y^2 = -(x^2 + 1) + 4\sqrt{x^2 + 1} - 3 = -g\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)$$

avec $g(u) = u^2 - 4u + 3 = (u - 1)(u - 3)$.

On a $\sqrt{x^2 + 1} \geq 1$ et quand $u > 3$, on a $g(u) < 0$, donc $\sqrt{x^2 + 1} \leq 3$ (sinon on aurait $y^2 < 0$).

Or, quand $\sqrt{x^2 + 1} \in [1, 3]$, on a $0 \leq y^2 = -g\left(\sqrt{x^2 + 1}\right) \leq 1$, donc $-1 \leq y \leq 1$ et il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $y = \sin t$.

Alors :

$$\sin^2 t = -(x^2 + 1) + 4\sqrt{x^2 + 1} - 3 \Leftrightarrow (x^2 + 1) - 4\sqrt{x^2 + 1} + 4 = 1 - \sin^2 t \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2 + 1} - 2\right)^2 = \cos^2 t.$$

Et :

$$\sqrt{x^2 + 1} = 2 \pm \cos t \Leftrightarrow x^2 = (2 \pm \cos t)^2 - 1 = \cos^2 t \pm 4 \cos t + 3.$$

Avec $x \geq 0$, on obtient :

$$x = \sqrt{\cos^2 t + 4 \cos t + 3} \text{ ou } x = \sqrt{\cos^2 t - 4 \cos t + 3} = \sqrt{\cos^2(\pi - t) - 4 \cos(\pi - t) + 3}.$$

Et comme $y = \sin t = \sin(\pi - t)$, on a finalement $M = M(t)$ ou $M(\pi - t)$ et donc $M \in \mathcal{C}$.

Finalement :

Une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ est $x^2 + y^2 + 4 = 4\sqrt{x^2 + 1}$ avec $x \geq 0$.

Exercice 13

Posons $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z - 1$.

La fonction f est polynomiale donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ et pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -1 \neq 0$, donc tous les points de S sont réguliers.

Alors, pour tout point $M(x, y, z)$ de S , le plan T_M , tangent à S en M , existe et admet pour vecteur normal :

$$\overrightarrow{\text{grad} f} \begin{vmatrix} 2x \\ -2y \\ -1 \end{vmatrix}.$$

Un vecteur normal à P , d'équation $x - 2y - z = 0$, est $\vec{n} \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{vmatrix}$ et le plan T_M est parallèle à P si et seulement si

$\overrightarrow{\text{grad} f}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires. Comme ils ont la même cote, $z_{\overrightarrow{\text{grad} f}} = z_{\vec{n}} = -1$, les vecteurs $\overrightarrow{\text{grad} f}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires si et seulement s'ils sont égaux, ce qui donne : $x = \frac{1}{2}$ et $y = 1$.

Enfin, comme $M(x, y, z) \in S$, on a $x^2 - y^2 - z = 1$, ce qui donne ici : $z = x^2 - y^2 - 1 = \frac{1}{4} - 1 - 1 = -\frac{7}{4}$.

Ainsi :

Le seul point de S où le plan tangent à S est parallèle à P est $M\left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{7}{4}\right)$.

Exercice 14

Notons $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace.

1) Une droite est parallèle au plan (xOy) si et seulement si elle est dirigée par un vecteur de la forme $a\vec{i} + b\vec{j}$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.

Si D est une droite parallèle au plan (xOy) et passant par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ de S , alors une représentation paramétrique de D est :

$$\begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = z_A \end{cases}$$

On a alors (avec $x_A^2 + y_A^2 - z_A^2 = 1$ car $A \in S$) :

$$\begin{aligned} D \subset S &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, (at + x_A)^2 + (bt + y_A)^2 - z_A^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, (a^2 + b^2)t^2 + 2(ax_A + by_A)t + x_A^2 + y_A^2 - z_A^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, (a^2 + b^2)t^2 + 2(ax_A + by_A)t = 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 = ax_A + by_A = 0 \end{aligned}$$

Ceci est absurde, car $(a, b) \neq (0, 0)$, donc $a^2 + b^2 \neq 0$. Ainsi :

S ne contient aucune droite parallèle au plan (xOy) .

2) Soit D la droite d'équations cartésiennes $\begin{cases} x = az + b \\ y = cz + d \end{cases}$. On a :

$$\begin{aligned} D \subset S &\Leftrightarrow \forall M(x, y, z) \in D, M \in S \\ &\Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{R}, M(az + b, cz + d, z) \in S \\ &\Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{R}, (az + b)^2 + (cz + d)^2 - z^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{R}, (a^2 + c^2 - 1)z^2 + 2(ab + cd)z + b^2 + d^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Autrement dit :

D est incluse dans S si et seulement si la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est orthogonale.

3) Remarquons déjà qu'une droite de l'espace, passant par un point $A(x_A, y_A, z_A)$, n'est pas parallèle au plan (xOy) si et seulement si elle admet un système d'équations cartésiennes de la forme : $\begin{cases} x = a(z - z_A) + x_A \\ y = c(z - z_A) + y_A \end{cases}$ et dans ce cas, la droite est dirigée par $\vec{u}(a, c, 1)$.

En effet, si $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ dirige une droite passant par $A(x_A, y_A, z_A)$, une représentation paramétrique de D est :

$$\begin{cases} x = \alpha t + x_A \\ y = \beta t + y_A \\ z = \gamma t + z_A \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Or, D n'est pas parallèle au plan (xOy) si et seulement si $c \neq 0$ et dans ce cas :

$$\begin{cases} x = \alpha t + x_A \\ y = \beta t + y_A \\ z = \gamma t + z_A \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha t + x_A \\ y = \beta t + y_A \\ t = (z - z_A) / \gamma \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\alpha}{\gamma}(z - z_A) + x_A \\ y = \frac{\beta}{\gamma}(z - z_A) + y_A \end{cases}, z \in \mathbb{R}.$$

Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de S (donc $x_A^2 + y_A^2 - z_A^2 = 1$) et D une éventuelle droite de l'espace passant par A et incluse dans S . D'après la question 1, D n'est pas parallèle au plan (xOy) , donc d'après ce qui précède, D admet un système d'équations cartésiennes de la forme $\begin{cases} x = a(z - z_A) + x_A = az + x_A - az_A \\ y = c(z - z_A) + y_A = cz + y_A - cz_A \end{cases}$ avec $(a, c) \in \mathbb{R}^2$.

D'après la question 2, on a alors :

$$D \subset S \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ a(x_A - az_A) + c(y_A - cz_A) = 0 \\ (x_A - az_A)^2 + (y_A - cz_A)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ ax_A + cy_A = z_A \\ x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - 2(ax_A + cy_A)z_A = 1 \end{cases}$$

Et avec $x_A^2 + y_A^2 - z_A^2 = 1$, soit $x_A^2 + y_A^2 = 1 + z_A^2$ (car $A \in S$), ceci donne :

$$D \subset S \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ ax_A + cy_A = z_A \\ 1 + 2z_A^2 - 2(ax_A + cy_A)z_A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ ax_A + cy_A = z_A \\ (ax_A + cy_A)z_A = z_A^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ ax_A + cy_A = z_A \end{cases}$$

La relation $a^2 + c^2 = 1$ permet de poser $\begin{cases} a = \cos \theta \\ c = \sin \theta \end{cases}$.

De plus, $\left| \frac{z_A}{\sqrt{1 + z_A^2}} \right| < 1$, donc il existe $\beta \in]0, \pi[$ tel que $\frac{z_A}{\sqrt{1 + z_A^2}} = \cos \beta$ et en posant aussi $\begin{cases} \cos \alpha = \frac{x_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2}} \\ \sin \alpha = \frac{y_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2}} \end{cases}$,

on a finalement :

$$D \subset S \Leftrightarrow \cos(\theta - \alpha) = \cos \beta \Leftrightarrow \theta - \alpha = \pm \beta [2\pi] \Leftrightarrow \theta = \alpha \pm \beta [2\pi].$$

Soit :

$$D \subset S \Leftrightarrow \begin{cases} a = \cos(\alpha + \beta) \\ c = \sin(\alpha + \beta) \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = \cos(\alpha - \beta) \\ c = \sin(\alpha - \beta) \end{cases}.$$

Remarquons que $(\alpha + \beta) - (\alpha - \beta) = 2\beta \in]0, 2\pi[$, donc $(\alpha + \beta) \neq (\alpha - \beta) [2\pi]$ et on obtient deux couples (a, b) distincts et, comme on a procédé par équivalences, on peut conclure que :

Par tout point de S , passent deux droites D_1 et D_2 incluses dans S .

D'après ce que l'on vient de voir, pour tout point de S passent deux droites D_1 et D_2 , incluses dans S et

dirigées respectivement par $\vec{u}_1 \begin{vmatrix} \cos(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) \\ 1 \end{vmatrix}$ et $\vec{u}_2 \begin{vmatrix} \cos(\alpha - \beta) \\ \sin(\alpha - \beta) \\ 1 \end{vmatrix}$.

Ces deux droites D_1 et D_2 sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$, soit :

$$\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) + 1 = \cos(2\beta) + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos(2\beta) = -1.$$

Comme $\beta \in]0, \pi[$, on a $2\beta \in]0, 2\pi[$ et donc $\cos(2\beta) = -1$ si et seulement si $2\beta = \pi$, soit $\beta = \frac{\pi}{2}$.

Avec $\beta \in]0, \pi[$, on a alors $\beta = \frac{\pi}{2}$ si et seulement si $\frac{z_A}{\sqrt{1+z_A^2}} = \cos \beta = 0$, soit $z_A = 0$.

Ainsi, D_1 et D_2 sont perpendiculaires si et seulement si $z_A = 0$, donc :

Les points de S pour lesquels D_1 et D_2 sont perpendiculaires sont les points de $S \cap (xOy)$.

Dans ce cas, (avec les notations précédentes), on a $x_A^2 + y_A^2 - z_A^2 = x_A^2 + y_A^2 = 1$ et $\begin{cases} x_A = \cos \alpha \\ y_A = \sin \alpha \end{cases}$, et on obtient les systèmes d'équations cartésiennes respectifs :

$$D_1 : \begin{cases} x = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)z + \cos \alpha \\ y = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)z + \sin \alpha \end{cases} \quad \text{et} \quad D_2 : \begin{cases} x = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)z + \cos \alpha \\ y = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)z + \sin \alpha \end{cases}.$$

Soit :

$$D_1 : \begin{cases} x = -\sin \alpha z + \cos \alpha \\ y = \cos \alpha z + \sin \alpha \end{cases} \quad \text{et} \quad D_2 : \begin{cases} x = \sin \alpha z + \cos \alpha \\ y = -\cos \alpha z + \sin \alpha \end{cases}$$