

Corrigés des TD du chapitre 3

Exercice 1

Pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \left\| \frac{1}{1+\|x\|} x \right\| = \frac{\|x\|}{1+\|x\|} < 1$, donc $f(x) \in B(0,1)$ et ainsi, f est à images dans $B(0,1)$.

Par ailleurs, l'application $x \mapsto \|x\|$ est continue sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc $x \mapsto \frac{1}{1+\|x\|}$ est continue sur E en tant que composée d'applications continues.

Enfin, $x \mapsto x$ est continue sur E , donc f est continue sur E en tant que produit de fonctions continues (l'une scalaire, l'autre vectorielle).

Soit $y \in B(0,1)$. On a :

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{1+\|x\|} x = y \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\|x\|}{1+\|x\|} = \|y\| < 1 \\ x = (1+\|x\|) y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \|x\| = \frac{\|y\|}{1-\|y\|} \\ x = (1+\|x\|) y \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{1-\|y\|} y$$

Ceci prouve que f est bijective de réciproque $y \mapsto \frac{1}{1-\|y\|} y$, définie sur $B(0,1)$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ est continue sur $[0,1[$, donc on prouve comme plus haut que $y \mapsto \frac{1}{1-\|y\|} y$ est continue sur $B(0,1)$. Finalement :

L'application f est continue sur E , bijective de E dans $B(0,1)$ et f^{-1} est continue sur $B(0,1)$.

Exercice 2

L'application ϕ est linéaire (par linéarité de l'intégrale). Soient $f, g \in E$. On a :

$$|\phi(f) - \phi(g)| = |\phi(f - g)| = \left| \int_0^1 (f(t) - g(t)) dt \right| \leq \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt = \|f - g\|.$$

Donc, pour tout $(f, g) \in E^2$, $|\phi(f) - \phi(g)| \leq \|f - g\|$, autrement dit, ϕ est 1-lipschitzienne, donc :

ϕ est continue sur E .

Exercice 3

1) a. Comme α et β sont positifs, les fonctions $x \mapsto x^\alpha$ et $y \mapsto y^\beta$ (éventuellement prolongées par continuité en 0) sont définies et continues sur $\mathbb{R}_+$. La fonction polynômiale $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ et ne s'annule qu'en $(0,0)$, donc :

La fonction f est définie sur $D = \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0,0)\}$.

b. On a vu que les fonctions $x \mapsto x^\alpha$ et $y \mapsto y^\beta$ (prolongées par continuité en 0) sont continues sur $\mathbb{R}_+$, donc $(x, y) \mapsto x^\alpha y^\beta$ est continue sur $\mathbb{R}_+^2$, donc sur D .

Il en va de même pour la fonction polynômiale $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$.

Ainsi, f est un quotient de fonctions continues sur D , donc :

La fonction f est continue sur D .

c. Pour tout $(\theta, r) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{R}_+^*$, $|f(r \cos \theta, r \sin \theta)| = \frac{r^{\alpha+\beta} |\cos^\alpha \theta \sin^\beta \theta|}{r^2} \leq \frac{r^{\alpha+\beta}}{r^2}$, donc pour tout $(x, y) \in D$:

$$|f(x, y)| \leq (x^2 + y^2)^{\frac{\alpha+\beta-2}{2}}.$$

Distinguons plusieurs cas selon α et β .

- Pour $\alpha + \beta < 2$, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, x) = \frac{x^{\alpha+\beta-2}}{2} = +\infty$, donc f n'est pas prolongeable par continuité en $(0, 0)$.
- Pour $\alpha + \beta = 2$, on $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, x) = \frac{1}{2}$ et :
 - $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, 0) = 0 \neq \frac{1}{2}$ quand $\beta > 0$;
 - $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, 0) = 1 \neq \frac{1}{2}$ quand $\beta = 0$ (donc $\alpha = 2$).

Donc, f n'est pas prolongeable par continuité en $(0, 0)$.

- Pour $\alpha + \beta > 2$, on a $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^{\frac{\alpha+\beta-2}{2}} = 0$, donc $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ et f est prolongeable par continuité en $(0, 0)$ en posant $f(0, 0) = 0$.

Ainsi :

f est prolongeable par continuité en $(0, 0)$ si et seulement si $\alpha + \beta > 2$.

Comme la fonction f est définie sur $D = \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0, 0)\}$, elle est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_+^2$ si et seulement elle l'est en $(0, 0)$, donc :

f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_+^2$ si et seulement si $\alpha + \beta > 2$.

Pour prolonger par continuité la fonction f sur $\mathbb{R}^2$, il faut au moins la prolonger par continuité en $(0, 0)$, en posant $f(0, 0) = 0$. Il faut donc que $\alpha + \beta > 2$. Cette condition étant remplie, si on pose $\tilde{f} : (x, y) \mapsto f(|x|, |y|)$, (où $f(0, 0) = 0$), les fonctions $\tilde{f}$ et f coïncident sur $(\mathbb{R}_+)^2$ et $\tilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ en tant que composée de $(x, y) \mapsto (|x|, |y|)$, continue sur $\mathbb{R}^2$ et à images dans $(\mathbb{R}_+)^2$, par f , continue sur $(\mathbb{R}_+)^2$. Ainsi :

f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\alpha + \beta > 2$.

Remarque : N'importe quelle fonction $\tilde{f}$, continue sur $\mathbb{R}^2$ et coïncidant avec f sur $(\mathbb{R}_+)^2$ fait l'affaire.

2) Notons $B = B((0,0),1)$, $\bar{B} = \bar{B}((0,0),1)$ et $S = S((0,0),1)$, respectivement la boule ouverte, la boule fermée et la sphère de centre $(0,0)$ et de rayon 1. On a alors :

$$g : (x, y) \mapsto \begin{cases} 2x^2 + y^2 - 1 & \text{si } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{B} \\ x^2 & \text{si } (x, y) \in \bar{B} \end{cases}$$

Sur les ouverts B et $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}$, g est polynomiale, donc continue. Reste à prouver la continuité de g sur S .

Soit $(\cos \alpha, \sin \alpha) \in S$ avec $\alpha \in [0, 2\pi[$.

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, il existe un unique couple $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[$ tel que $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ et $(x, y) \rightarrow (\cos \alpha, \sin \alpha)$ revient à $(r, \theta) \rightarrow (1, \alpha)$. On a :

$$g(x, y) = g(r \cos \theta, r \sin \theta) = \begin{cases} 2r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta - 1 & \text{si } r > 1 \\ r^2 \cos^2 \theta & \text{si } r \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} r^2 \cos^2 \theta + r^2 - 1 & \text{si } r > 1 \\ r^2 \cos^2 \theta & \text{si } r \leq 1 \end{cases}$$

Et :

$$\lim_{(r, \theta) \rightarrow (1^+, \alpha)} g(r \cos \theta, r \sin \theta) = \lim_{(r, \theta) \rightarrow (1^+, \alpha)} (r^2 \cos^2 \theta + r^2 - 1) = \cos^2 \alpha = g(\cos \alpha, \sin \alpha)$$

$$\lim_{(r, \theta) \rightarrow (1^-, \alpha)} g(r \cos \theta, r \sin \theta) = \lim_{(r, \theta) \rightarrow (1^-, \alpha)} (r^2 \cos^2 \theta) = \cos^2 \alpha = g(\cos \alpha, \sin \alpha)$$

Ainsi, $\lim_{(x, y) \rightarrow (\cos \alpha, \sin \alpha)} g(x, y) = \lim_{(r, \theta) \rightarrow (1, \alpha)} g(r \cos \theta, r \sin \theta) = g(\cos \alpha, \sin \alpha)$, et g est continue en $(\cos \alpha, \sin \alpha)$.

Finalement, g est continue sur B , S et $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}$, donc, sur $B \cup S \cup (\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}) = \mathbb{R}^2$ et ainsi :

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4

1) Supposons qu'il existe $(a, b) \in F^2$ tel que $f(a) = a$ et $f(b) = b$.

Comme f est λ -lipschitzienne pour la norme infinie, on a : $\|f(a) - f(b)\|_\infty \leq \lambda \|a - b\|_\infty$, soit :

$$\|a - b\|_\infty \leq \lambda \|a - b\|_\infty.$$

Or, si $\|a - b\|_\infty \neq 0$, on obtient $1 \leq \lambda$, ce qui est absurde car $\lambda \in]0, 1[$, donc $\|a - b\|_\infty = 0$, soit $a = b$. Ainsi :

Si f possède un point fixe alors il est unique.

2) Prouvons les deux résultats par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$, on a $x_0 \in F$ par hypothèse et $\|x_1 - x_0\|_\infty = \lambda^0 \|x_1 - x_0\|_\infty$, donc la propriété est vraie au rang 0.

Supposons la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$. On a alors :

- $x_n \in F \Rightarrow f(x_n) \in F$ (car $f(F) \subset F$) $\Rightarrow x_{n+1} \in F$.
- On a $\|x_{n+1} - x_n\|_\infty \leq \lambda^n \|x_1 - x_0\|_\infty$ et :

$$\|x_{n+2} - x_{n+1}\|_\infty = \|f(x_{n+1}) - f(x_n)\|_\infty \leq \lambda \|x_{n+1} - x_n\|_\infty \leq \lambda (\lambda^n \|x_1 - x_0\|_\infty) = \lambda^{n+1} \|x_1 - x_0\|_\infty.$$

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit :

$$x_n \in F \text{ et } \|x_{n+1} - x_n\|_\infty \leq \lambda^n \|x_1 - x_0\|_\infty.$$

3) Soit $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|x_{i,n+1} - x_{i,n}| \leq \|x_{n+1} - x_n\|_\infty \leq \lambda^n \|x_1 - x_0\|_\infty.$$

Or, $\lambda \in]0, 1[$, donc la série géométrique $\sum \lambda^n \|x_1 - x_0\|_\infty$ est convergente et par comparaison :

$$\text{La série } \sum (x_{i,n+1} - x_{i,n}) \text{ est absolument convergente.}$$

4) Pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, la série $\sum (x_{i,n+1} - x_{i,n})$ est absolument convergente, donc elle est convergente. Ceci implique que la suite $(x_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge. La suite de vecteurs $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge coordonnée par coordonnée, donc :

$$\text{La suite } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers un vecteur } a.$$

On a vu que pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|x_{i,n+1} - x_{i,n}| \leq \lambda^n \|x_1 - x_0\|_\infty \Leftrightarrow -\lambda^n \|x_1 - x_0\|_\infty \leq x_{i,n+1} - x_{i,n} \leq \lambda^n \|x_1 - x_0\|_\infty.$$

Comme les séries $\sum (x_{i,n+1} - x_{i,n})$ et $\sum \lambda^n$ convergent, on a pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$-\|x_1 - x_0\|_\infty \sum_{k=n}^{+\infty} \lambda^k \leq \sum_{k=n}^{+\infty} (x_{i,k+1} - x_{i,k}) \leq \|x_1 - x_0\|_\infty \sum_{k=n}^{+\infty} \lambda^k.$$

Si pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $(x_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a_i , on a $\sum_{k=n}^{+\infty} (x_{i,k+1} - x_{i,k}) = a_i - x_{i,n}$.

Et comme $\sum_{k=n}^{+\infty} \lambda^k = \frac{\lambda^n}{1-\lambda}$, on obtient pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$-\|x_1 - x_0\|_\infty \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \leq a_i - x_{i,n} \leq \|x_1 - x_0\|_\infty \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \Leftrightarrow |x_{i,n} - a_i| \leq \frac{\|x_1 - x_0\|_\infty}{1-\lambda} \lambda^n.$$

L'inégalité ci-dessus étant vraie pour toutes les composantes de $x_n - a$, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|x_n - a\|_\infty \leq \frac{\|x_1 - x_0\|_\infty}{1-\lambda} \lambda^n$$

5) La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente de F , qui est fermé, donc sa limite a appartient à F .

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$.

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = a$ et f est continue sur F (car lipschitzienne), donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n) = f(a)$.

Ainsi :

$$f(a) = a$$

Nous venons donc de trouver un vecteur a de F tel que $f(a) = a$, autrement f admet un point fixe dans F .
Finalement, avec le résultat de la première question, on peut conclure que :

f possède un unique point fixe dans F .

Exercice 5

1) Commençons par reformuler la continuité de f sur E . f est continue sur E si et seulement si :

$$\forall a \in E, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in E, \|x - a\| \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon.$$

On peut rendre stricte les inégalités sans altérer l'équivalence :

$$\forall a \in E, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in E, \|x - a\| < \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Ceci se reformule alors en :

$$\begin{aligned} & \left[\forall a \in E, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, x \in B(a, \alpha) \Rightarrow f(x) \in B(f(a), \varepsilon) \right] \\ \Leftrightarrow & \left[\forall a \in E, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, x \in B(a, \alpha) \Rightarrow x \in f^{-1}(B(f(a), \varepsilon)) \right] \\ \Leftrightarrow & \left[\forall a \in E, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, B(a, \alpha) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon)) \right] \end{aligned}$$

Ainsi :

$$f \text{ est continue sur } E \Leftrightarrow \left[\forall a \in E, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, B(a, \alpha) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon)) \right].$$

($\Rightarrow$) Supposons f continue sur E .

Soit O une partie ouverte de F . Si $f^{-1}(O)$ est vide alors elle est ouverte. Sinon, pour tout $a \in f^{-1}(O)$, on a $f(a) \in O$. Comme O est ouverte, il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(f(a), \varepsilon) \subset O$ et donc, $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon)) \subset f^{-1}(O)$.

Or, d'après ce qui précède, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a, \alpha) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$, donc $B(a, \alpha) \subset f^{-1}(O)$.

Ainsi, pour tout $a \in f^{-1}(O)$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a, \alpha) \subset f^{-1}(O)$, ce qui prouve que $f^{-1}(O)$ est ouverte.

($\Leftarrow$) Supposons que l'image réciproque de toute partie ouverte de F est une partie ouverte de E .

Soient $a \in E$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Comme $B(f(a), \varepsilon)$ est une partie ouverte de F , $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ est une partie ouverte de E .

Or, $f(a) \in B(f(a), \varepsilon)$, donc $a \in f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ et ainsi, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a, \alpha) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$.

Ainsi, pour tout $a \in E$ et pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a, \alpha) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$, ce qui prouve que f est continue sur E .

Finalement, on a bien :

f est continue sur E si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de E .

2) ($\Rightarrow$) Supposons f continue sur E .

Soit A une partie fermée de F . Si $f^{-1}(A)$ est vide alors elle est fermée. Sinon, soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $f^{-1}(A)$ convergeant vers $a \in E$. On a $a_n \rightarrow a$ et f continue en a , donc $f(a_n) \rightarrow f(a)$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in f^{-1}(A)$, donc $f(a_n) \in A$ et comme A est fermée et $f(a_n) \rightarrow f(a)$, on a $f(a) \in A$.

Ainsi, $a \in f^{-1}(A)$ et donc toute suite convergente de $f^{-1}(A)$ converge dans $f^{-1}(A)$, ce qui prouve que $f^{-1}(A)$ est fermée.

($\Leftarrow$) Supposons que l'image réciproque de toute partie fermée de F est une partie fermée de E .

Soit A une partie ouverte de F . On a $f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$. En effet :

$$x \in f^{-1}(F \setminus A) \Leftrightarrow f(x) \in F \setminus A \Leftrightarrow f(x) \notin A \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(A) \Leftrightarrow x \in E \setminus f^{-1}(A).$$

Comme A est ouverte, $F \setminus A$ est fermée, donc $f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$ est fermée, ce qui prouve que $f^{-1}(A)$ est ouverte. Ainsi, l'image réciproque de toute partie ouverte de F est une partie ouverte de E , donc f est continue sur E d'après la question précédente.

Finalement, on a bien :

f est continue sur E si et seulement si l'image réciproque de tout fermé de F est un fermé de E .

3) Posons $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. La fonction f est définie et continue (car rationnelle) sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On a $f(\mathbb{R}) =]0, 1[$ qui n'est ni ouvert, ni fermé. Or, $\mathbb{R}$ est un fermé et un ouvert de $\mathbb{R}$, donc :

L'image d'un ouvert (*resp.* fermé) par une application continue n'est pas forcément ouverte (*resp.* fermée).

Exercice 6

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det M$ est polynomiale (et même affine) en chacun des coefficients de M , donc l'application $\det : M \mapsto \det M$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Or, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus GL_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det M = 0\} = \det^{-1}(\{0\})$.

Comme $\{0\}$ est fermé dans $\mathbb{K}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus GL_n(\mathbb{K})$ est l'image réciproque d'une partie fermée de $\mathbb{K}$ par une application continue, donc est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, d'après l'exercice précédent.

Finalement, comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus GL_n(\mathbb{K})$ est fermé :

$GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On veut montrer que $\overline{GL_n(\mathbb{K})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, donc que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \subset \overline{GL_n(\mathbb{K})}$, autrement dit que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est limite d'une suite de matrices de $GL_n(\mathbb{K})$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Il existe deux matrices inversibles P et Q telles que $M = PJQ$ où :

$$J = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r, n-r} \\ 0_{n-r, r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Posons alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $M_k = PJ_kQ$ avec $J_k = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r, n-r} \\ 0_{n-r, r} & \frac{1}{k}I_{n-r} \end{pmatrix}$.

On a immédiatement $J_k \rightarrow J$ quand $k \rightarrow +\infty$ (car $\|J_k - J\|_\infty = \frac{1}{k}$) et, comme l'application $X \mapsto PXQ$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a : $M_k \rightarrow PJQ = M$.

Enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\det J = \frac{1}{k^{n-r}} \neq 0$ donc $\det M_k = \det P \times \det J_k \times \det Q \neq 0$ et $M_k \in GL_n(\mathbb{K})$.

Finalement, on a trouvé une suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de matrices inversibles qui converge vers M , donc $M \in \overline{GL_n(\mathbb{K})}$.

Ceci prouve que :

$$\overline{GL_n(\mathbb{K})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Exercice 7

D'après l'exercice 7 du TD sur les espaces vectoriels normés, $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée, bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (pour n'importe quelle norme). De plus, l'application $M \mapsto \|M - B\|$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc elle admet un minimum sur $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$, atteint en $A \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$. Comme $\|A - B\|$ est le minimum de $M \mapsto \|M - B\|$ sur $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$, on a alors immédiatement $\|A - B\| \leq \|M - B\|$ pour tout $M \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$.

Supposons qu'il existe une deuxième matrice A' de $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $M \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$, $\|A - B\| \leq \|A' - B\|$.

Comme A et A' appartiennent toutes deux à $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$, on a $\|A' - B\| \leq \|A - B\|$ et $\|A - B\| \leq \|A' - B\|$, donc :

$$\|A' - B\| = \|A - B\|.$$

Toujours d'après l'exercice 7 du TD sur les espaces vectoriels normés, $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ est une partie convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc pour tout $t \in [0, 1]$, $tA + (1-t)A' \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ et $\|A - B\| \leq \|tA + (1-t)A' - B\|$. Or :

$$\|tA + (1-t)A' - B\| = \|t(A - B) + (1-t)(A' - B)\| \leq t\|A - B\| + (1-t)\|A' - B\| = \|A - B\|.$$

Ainsi :

$$\|tA + (1-t)A' - B\| = \|A - B\|.$$

Or, ici $\|\cdot\|$ est une norme euclidienne donc dérive d'un produit scalaire et :

$$\|tA + (1-t)A' - B\|^2 = \|t(A - A') + A' - B\|^2 = t^2\|A - A'\|^2 + 2t(A - A' | A' - B) + \|A' - B\|^2.$$

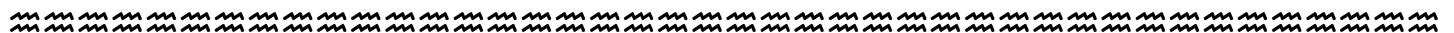
Avec $\|A' - B\| = \|A - B\|$, on obtient, pour tout $t \in [0, 1]$:

$$t^2\|A - A'\|^2 + 2t(A - A' | A' - B) = 0.$$

Or, l'application polynôme $t \mapsto t^2\|A - A'\|^2 + 2t(A - A' | A' - B) = 0$ est nulle sur $[0, 1]$ si et seulement si ses coefficients sont nuls, donc $\|A - A'\|^2 = 0$, ce qui entraîne immédiatement $A = A'$.

Finalement :

$$\text{Il existe une unique matrice } A \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que pour tout } M \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R}), \|A - B\| \leq \|M - B\|.$$



Exercice 8

1) La fonction $f - g$ est continue sur le segment $[0,1]$ en tant que différence de telles fonctions, donc elle y admet un minimum α atteint en $a \in [0,1]$.

Comme $f > g$ sur $[0,1]$, on a $\alpha = f(a) - g(a) > 0$ et pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) - g(x) \geq \alpha$, donc :

$$f(x) \geq g(x) + \alpha.$$

Prouvons alors par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f^n(x) \geq g^n(x) + n\alpha$ pour tout $x \in [0,1]$.

- On vient de voir que la propriété est vraie pour $n = 1$.

- Supposons la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $x \in [0,1]$, on a $f(x) \in [0,1]$, car f est définie sur $[0,1]$ et à images dans $[0,1]$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à $f(x)$, soit :

$$f^n(f(x)) \geq g^n(f(x)) + n\alpha \Leftrightarrow f^{n+1}(x) \geq (g^n \circ f)(x) + n\alpha.$$

Or, $f \circ g = g \circ f$, donc $f \circ g^n = g^n \circ f$ pour tout entier naturel n , d'où :

$$(g^n \circ f)(x) = (f \circ g^n)(x) = f(g^n(x)).$$

Enfin, $g^n(x) \in [0,1]$, car g , donc g^n , sont définies sur $[0,1]$ et à images dans $[0,1]$. Alors :

$$f(g^n(x)) \geq g(g^n(x)) + \alpha.$$

Et ainsi, pour tout $x \in [0,1]$:

$$f^{n+1}(x) \geq f(g^n(x)) + n\alpha \geq g(g^n(x)) + \alpha + n\alpha = g^{n+1}(x) + (n+1)\alpha.$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisé et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi :

Il existe bien un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$, $f^n(x) \geq g^n(x) + n\alpha$.

On a vu que pour tout $x \in [0,1]$, $g^n(x) \in [0,1]$, donc $g^n(x) \geq 0$ et ainsi, pour tout $x \in [0,1]$:

$$f^n(x) \geq n\alpha.$$

En particulier, pour tout $n > \frac{1}{\alpha}$, on a $f^n(x) > 1$. Ceci est absurde car, comme pour g^n , on a $f^n(x) \in [0,1]$, pour tout $x \in [0,1]$. Ainsi :

L'hypothèse « pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) > g(x)$ » mène à une contradiction.

2) D'après ce qui précède, on n'a pas $f(x) > g(x)$ pour tout $x \in [0,1]$, donc il existe $a \in [0,1]$ tel que $f(a) \leq g(a)$, soit $(f - g)(a) \leq 0$.

Comme f et g jouent le même rôle, il existe $b \in [0,1]$ tel que $g(b) \leq f(b)$, soit $(f - g)(b) \geq 0$.

Or, on a vu que $f - g$ est continue sur $[0,1]$, donc le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer qu'il existe $c \in [a,b]$ ou $[b,a] \subset [0,1]$ tel que $(f - g)(c) = 0$.

Ainsi :

Il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice 9

1) Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\sum_{j=1}^p |\lambda a_{i,j}| = |\lambda| \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|$, donc :

$$\|\lambda A\| = \max_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} \left(\sum_{j=1}^p |\lambda a_{i,j}| \right) = \max_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} \left(|\lambda| \sum_{j=1}^p |a_{i,j}| \right) = |\lambda| \cdot \max_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} \left(\sum_{j=1}^p |a_{i,j}| \right) = |\lambda| \cdot \|A\|.$$

- Si $\|A\| = \max_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} \left(\sum_{j=1}^p |a_{i,j}| \right) = 0$, alors pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\sum_{j=1}^p |a_{i,j}| = 0$, donc pour tous $i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $|a_{i,j}| = 0$ soit $a_{i,j} = 0$ et ainsi, $A = 0_p$.

- Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$:

$$\sum_{j=1}^p |a_{i,j} + b_{i,j}| \leq \sum_{j=1}^p (|a_{i,j}| + |b_{i,j}|) = \sum_{j=1}^p |a_{i,j}| + \sum_{j=1}^p |b_{i,j}| \leq \|A\| + \|B\|.$$

Donc :

$$\|A + B\| = \max_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} \left(\sum_{j=1}^p |a_{i,j} + b_{i,j}| \right) \leq \|A\| + \|B\|.$$

Ainsi :

$\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On a $\|AB\| = \max_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} \left(\sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right| \right)$. Or, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$:

$$\sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right| \leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| |b_{k,j}| = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,k}| |b_{k,j}| = \sum_{k=1}^n \left(|a_{i,k}| \sum_{j=1}^n |b_{k,j}| \right) \leq \sum_{k=1}^n (|a_{i,k}| \|B\|) = \left(\sum_{k=1}^n |a_{i,k}| \right) \cdot \|B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

Donc, $\max_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} \left(\sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right| \right) \leq \|A\| \cdot \|B\|$, soit :

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

Enfin, $I_p = (\delta_{i,j})$ et pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\sum_{j=1}^p |\delta_{i,j}| = 1$, donc :

$$\|I_p\| = 1$$

Remarquons que pour $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{N}$, on a $\|M^k\| \leq \|M\|^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et :

$$\left\| \sum_{k=0}^a \frac{1}{k!} M^k \right\| \leq \sum_{k=0}^a \frac{1}{k!} \|M\|^k.$$

Donc :

$$\|\exp(M)\| = \left\| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} M^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \|M\|^k = \exp(\|M\|).$$

2) Soit $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} T_n - S_n &= \exp\left(\frac{1}{n}A\right)\exp\left(\frac{1}{n}B\right) - \exp\left(\frac{1}{n}(A+B)\right) \\ &= \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{n^k} A^k \right] \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{n^k} B^k \right] - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{n^k} (A+B)^k \\ &= \left[I_p + \frac{1}{n}A + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{n^k} A^k \right] \left[I_p + \frac{1}{n}B + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{n^k} B^k \right] - I_p - \frac{1}{n}(A+B) - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{n^k} (A+B)^k \\ &= \frac{1}{n^2}AB + \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{n^k} A^k \right) \left(I_p + \frac{1}{n}B \right) + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{n^k} A^k \right) \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{n^k} B^k \right) - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{n^k} (A+B)^k \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \|T_n - S_n\| &\leq \frac{1}{n^2} \|AB\| + \left\| \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{n^k} A^k \right) \left(I_p + \frac{1}{n}B \right) \right\| + \left\| \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{n^k} A^k \right) \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{n^k} B^k \right) \right\| + \left\| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{n^k} (A+B)^k \right\| \\ &\leq \frac{1}{n^2} \|AB\| + \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{n^k} \|A\|^k \right) \left(\|I_p\| + \frac{1}{n} \|B\| \right) + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{n^k} \|A\|^k \right) \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{n^k} \|B\|^k \right) + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{n^k} \|A+B\|^k \\ &\leq \frac{1}{n^2} \|AB\| + \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{n^k} \|A\|^k \right) (\|I_p\| + \|B\|) + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k \right) \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{n^k} \|B\|^k \right) + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{n^k} \|A+B\|^k \\ &\leq \frac{1}{n^2} \left[\|AB\| + \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k \right) (\|I_p\| + \|B\|) + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k \right) \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \|B\|^k \right) + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \|A+B\|^k \right] \\ &\leq \frac{1}{n^2} \left[\|AB\| + (\|\exp(A)\|) (\|I_p\| + \|B\|) + (\|\exp(A)\|) (\|\exp(B)\|) + \|\exp(A+B)\| \right] \\ &\leq \frac{1}{n^2} \left[\|AB\| + (\|\exp(A)\|) (\|I_p\| + \|B\|) + 2\|\exp(A+B)\| \right] \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $K = \|AB\| + (\|\exp(A)\|) (\|I_p\| + \|B\|) + 2\|\exp(A+B)\|$, on a $\|T_n - S_n\| \leq \frac{K}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\|T_n - S_n\| = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)}$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $D_n = T_n - S_n$. On a :

$$(T_n)^n = (S_n + D_n)^n = \sum_{k=0}^n \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in E_k} S_n^{1-i_1} D_n^{i_1} S_n^{1-i_2} D_n^{i_2} \dots S_n^{1-i_n} D_n^{i_n} = (S_n)^n + \sum_{k=1}^n \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in E_k} S_n^{i_1} D_n^{1-i_1} S_n^{i_2} D_n^{1-i_2} \dots S_n^{i_n} D_n^{1-i_n}$$

où E_k est l'ensemble des n -uplets de $\{0,1\}$ contenant 1 exactement k fois (de cardinal $\binom{n}{k}$).

Alors :

$$\begin{aligned}
 \|(T_n)^n - (S_n)^n\| &= \left\| \sum_{k=1}^n \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in E_k} S_n^{i_1} D_n^{1-i_1} S_n^{i_2} D_n^{1-i_2} \dots S_n^{i_n} D_n^{1-i_n} \right\| \\
 &\leq \sum_{k=1}^n \left\| \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in E_k} S_n^{i_1} D_n^{1-i_1} S_n^{i_2} D_n^{1-i_2} \dots S_n^{i_n} D_n^{1-i_n} \right\| \\
 &\leq \sum_{k=1}^n \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in E_k} \|S_n\|^{i_1} \|D_n\|^{1-i_1} \dots \|S_n\|^{i_n} \|D_n\|^{1-i_n} \\
 &\leq \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \|S_n\|^{n-k} \|D_n\|^k = (\|S_n\| + \|D_n\|)^n - \|S_n\|^n \\
 &\leq \|S_n\|^n \left[\left(1 + \frac{\|D_n\|}{\|S_n\|} \right)^n - 1 \right]
 \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(S_n)^n = \left[\exp\left(\frac{1}{n}(A+B)\right) \right]^n = \exp\left(n \frac{1}{n}(A+B)\right) = \exp(A+B)$, donc :

$$\|\exp(A+B)\| = \|(S_n)^n\| \leq \|S_n\|^n.$$

D'autre part :

$$S_n = \exp\left(\frac{1}{n}(A+B)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{n}(A+B)\right)^k = I_p + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{n^k} (A+B)^k.$$

Donc :

$$\|S_n\| \leq \|I_p\| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{n^k} \|A+B\|^k \leq 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \|A+B\|^k \leq 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \|A+B\|^k = 1 + \frac{\exp(\|A+B\|)}{n}.$$

Et, avec $k = \exp(\|A+B\|)$:

$$\|S_n\|^n \leq \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = \exp\left[n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)\right] \leq \exp\left[n \frac{k}{n}\right] = e^k.$$

Ainsi :

$$0 < \|\exp(A+B)\| \leq \|S_n\|^n \leq e^k \text{ et } 0 < \frac{1}{e^k} \leq \frac{1}{\|S_n\|^n} \leq \frac{1}{\|\exp(A+B)\|}.$$

D'après la question précédente, $\|D_n\| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $\frac{\|D_n\|}{\|S_n\|} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ et :

$$\left(1 + \frac{\|D_n\|}{\|S_n\|}\right)^n - 1 = \exp\left[n \ln\left(1 + \frac{\|D_n\|}{\|S_n\|}\right)\right] - 1 = \exp\left[n \ln\left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] - 1 = \exp\left[n o\left(\frac{1}{n}\right)\right] - 1 = \exp\left[o(1)\right] - 1$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{\|D_n\|}{\|S_n\|}\right)^n - 1 \right] = 0$ et comme la suite $(\|S_n\|^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\|S_n\|^n \left[\left(1 + \frac{\|D_n\|}{\|S_n\|}\right)^n - 1 \right] \right] = 0.$$

Avec le théorème des gendarmes, l'inégalité $\|(T_n)^n - (S_n)^n\| \leq \|S_n\|^n \left[\left(1 + \frac{\|D_n\|}{\|S_n\|} \right)^n - 1 \right]$ permet de conclure que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\|(T_n)^n - (S_n)^n\| \right) = 0.$$

Or, on a vu plus haut que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(S_n)^n = \exp(A + B)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\|(T_n)^n - \exp(A + B)\| \right) = 0$, soit :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} (T_n)^n = \exp(A + B)}$$