

Corrigés des TD du chapitre 4

Exercice 1

On pose $f_n(t) = (t^2 + 1) \frac{ne^t + te^{-t}}{n+t}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est définie et continue sur $[0, 1]$ et la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction $f : t \mapsto (t^2 + 1)e^t$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0, 1]$, on a :

$$|f_n(t) - f(t)| = \left| (t^2 + 1) \frac{ne^t + te^{-t}}{n+t} - (t^2 + 1)e^t \right| = \left| (t^2 + 1) \frac{2t \operatorname{sh} t}{n+t} \right| \leq \frac{2(t^2 + 1)t \operatorname{sh} t}{n} \leq \frac{4 \operatorname{sh} 1}{n}.$$

Donc $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f_n(t) - f(t)| \leq \frac{4 \operatorname{sh} 1}{n}$ et, comme $\frac{4 \operatorname{sh} 1}{n} \rightarrow 0$, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément.

On a alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\int_0^1 f_n(t) dt \right] = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} [f_n(t)] dt = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 (t^2 + 1)e^t dt.$$

En intégrant deux fois par parties, avec les fonctions C^1 , $t \mapsto t^2 + 1$ et $t \mapsto e^t$, puis $t \mapsto 2t$ et $t \mapsto e^t$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (t^2 + 1)e^t dt &= \left[(t^2 + 1)e^t \right]_0^1 - \int_0^1 2te^t dt = \left[(t^2 + 1)e^t \right]_0^1 - \left[2te^t \right]_0^1 + \int_0^1 2e^t dt \\ &= \left[(t^2 + 1)e^t - 2te^t + 2e^t \right]_0^1 = \left[(t^2 - 2t + 3)e^t \right]_0^1 = 2e - 3 \end{aligned}$$

Finalement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\int_0^1 (t^2 + 1) \frac{ne^t + te^{-t}}{n+t} dt \right] = 2e - 3$$

Exercice 2

1) Pour $x \in \mathbb{R}_+$, posons $f_x(t) = t^3 + xt - 1$.

Sur $\mathbb{R}$, la fonction f_x est continue et strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$, donc, d'après le théorème de la bijection continue, f_x réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi, $\frac{1}{n}$ admet un unique antécédent par f_x , ce qui veut dire que :

L'équation $(E_{x,n})$ admet une unique solution réelle.

Remarquons que $f_x(0) = -1 < \frac{1}{n} = f_x(u_n(x))$, donc $u_n(x) > 0$ car f_x est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$u_n(x)^3 + xu_n(x) - 1 - \frac{1}{n} = 0 \Leftrightarrow f_x(u_n(x)) = \frac{1}{n} \Leftrightarrow u_n(x) = f_x^{-1}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Comme f_x est continue sur $\mathbb{R}$, f_x^{-1} l'est aussi et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_x^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} f_x^{-1}(t) = f_x^{-1}(0).$$

Et on a $f_x(t) = t^3 + xt - 1 = 0$ quand $t = f_x^{-1}(0)$, donc $f_x^{-1}(0)$ est l'unique solution de $t^3 + xt - 1 = 0$.

Finalement :

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers une fonction u telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $u(x)^3 + xu(x) - 1 = 0$.

On a $f_x(u(x)) = 0$. Or, la fonction f_x est strictement croissante et $f_x(0) = -1 < 0$, donc $u(x) > 0$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $u(x)^3 + xu(x) - 1 = 0$, soit :

$$x = \frac{1 - u(x)^3}{u(x)} = \frac{1}{u(x)} - u(x)^2 = g(u(x))$$

avec $g(t) = \frac{1}{t} - t^2$.

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement décroissante de $+\infty$ à $-\infty$, donc, d'après le théorème de la bijection continue, g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. Alors :

$$g(u(x)) = x \Leftrightarrow u(x) = g^{-1}(x).$$

La fonction g étant continue et strictement décroissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, le théorème de la bijection continue assure que la fonction g^{-1} est continue et strictement décroissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi :

La fonction u est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Remarquons que $g(1) = 0$, donc $g^{-1}(0) = 1$ et $\lim_{0^+} g = +\infty$, donc $\lim_{+\infty} g^{-1} = 0$.

Ainsi, sur $\mathbb{R}_+$, g^{-1} est strictement décroissante de 1 à 0, d'où :

$$u(0) = 1 \text{ et } \lim_{+\infty} u = 0.$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $u_n(x)^3 + xu_n(x) - 1 = \frac{1}{n}$ et $u(x)^3 + xu(x) - 1 = 0$, donc :

$$u_n(x)^3 - u(x)^3 + xu_n(x) - xu(x) = \frac{1}{n} \Leftrightarrow [u_n(x) - u(x)][u_n(x)^2 + u_n(x)u(x) + u(x)^2 + x] = \frac{1}{n}.$$

Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $u_n(x) > 0$ et $u(x) > 0$, donc :

$$u_n(x)^2 + u_n(x)u(x) + u(x)^2 + x > u(x)^2 + x$$

Sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $h : x \mapsto u(x)^2 + x$ est continue (somme de telle fonctions), strictement positive (car u l'est) et telle que $h(0) = 1$ et $\lim_{+\infty} h = +\infty$. Ceci permet de conclure que h admet un minimum $\mu > 0$ et ainsi, pour tout

$n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$u_n(x)^2 + u_n(x)u(x) + u(x)^2 + x > \mu \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{u_n(x)^2 + u_n(x)u(x) + u(x)^2 + x} < k = \frac{1}{\mu}.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$|u_n(x) - u(x)| = \frac{1}{n} \frac{1}{u_n(x)^2 + u_n(x)u(x) + u(x)^2 + x} < \frac{k}{n}.$$

Et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\|u_n - u\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |u_n(x) - u(x)| \leq \frac{k}{n}.$$

Enfin, comme $\frac{k}{n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, $\|u_n - u\|_\infty \rightarrow 0$ et donc :

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers u .

Exercice 3

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, on a $f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t) dt$, donc f_{n+1} est définie sur $[0,1]$ si l'on peut intégrer f_n sur ce segment, et ceci est le cas, quand f_n est continue sur $[0,1]$.

Si cela est vrai, alors $F_n : x \mapsto \int_0^x f_n(t) dt$ est elle aussi continue sur $[0,1]$ (et même de classe C^1), donc f_{n+1} est continue sur $[0,1]$.

Comme $f_0 = \varphi$ est continue sur $[0,1]$, nous avons prouvé par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est définie et continue sur $[0,1]$:

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

2) Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f , alors f est continue sur $[0,1]$ (car toutes les fonctions f_n le sont), $f_{n+1} \rightarrow f$ quand $n \rightarrow +\infty$ et pour tout $x \in [0,1]$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,x]$, donc $\int_0^x f_n(t) dt \rightarrow \int_0^x f(t) dt$ quand $n \rightarrow +\infty$.

En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ dans la relation de récurrence, on obtient alors pour tout $x \in [0,1]$:

$$f(x) = 1 + \int_0^x f(t) dt.$$

Ceci prouve immédiatement que $f(0) = 1$ et f est de classe C^1 sur $[0,1]$ avec $f' = f$ et ainsi :

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément, c'est vers la fonction exponentielle.

3) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, $g_n(x) = f_n(x) - e^x$ et $\mu = \sup_{[0,1]} |g_0|$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, on a :

$$g_{n+1}(x) = f_{n+1}(x) - e^x = 1 + \int_0^x f_n(t) dt - e^x = \int_0^x (f_n(t) - e^t) dt = \int_0^x g_n(t) dt.$$

Donc :

$$|g_{n+1}(x)| = \left| \int_0^x g_n(t) dt \right| \leq \int_0^x |g_n(t)| dt.$$

Prouvons alors par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$, on a $|g_n(x)| \leq \mu \frac{x^n}{n!}$.

- On a $\mu = \sup_{[0,1]} |g_0|$, donc pour tout $x \in [0, 1]$, $|g_0(x)| \leq \mu = \mu \frac{x^0}{0!}$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
- Supposons la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$, soit pour tout $x \in [0, 1]$, $|g_n(x)| \leq \mu \frac{x^n}{n!}$.

Alors, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$|g_{n+1}(x)| \leq \int_0^x |g_n(t)| dt \leq \int_0^x \mu \frac{t^n}{n!} dt = \mu \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$, $\mu \frac{x^n}{n!} \leq \frac{\mu}{n!}$, donc $|g_n(x)| \leq \frac{\mu}{n!}$, soit pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sup_{x \in [0,1]} |g_n(x)| \leq \frac{\mu}{n!}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mu}{n!} = 0$, la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} = (f_n - \exp)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle, donc :

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction exponentielle.

Exercice 4

1) Pour tout $x \in]1; +\infty[$, $\zeta(x)$ est la somme d'une série de Riemann convergente, donc est bien défini.

De plus, pour tout $a \in]1; +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sup_{x \in [a; +\infty[} \left| \frac{1}{n^x} \right| = \frac{1}{n^a}$ et $\sum \frac{1}{n^a}$ converge (car $a > 1$).

Ainsi, la série $\sum \frac{1}{n^x}$ converge normalement sur $[a; +\infty[$, et comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto \frac{1}{n^x} = e^{-x \ln n}$ est continue sur cet intervalle, la fonction ζ est continue sur $[a; +\infty[$.

Ainsi, ζ est définie et continue sur $[a; +\infty[$ pour tout $a \in]1; +\infty[$, donc :

ζ est définie et continue sur $]1; +\infty[$.

2) Soient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x} = e^{-x \ln n}$ et $a \in]1; +\infty[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe C^∞ sur $]1; +\infty[$ (comme composée de fonctions de classe C^∞) et pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]1; +\infty[$:

$$f_n^{(k)}(x) = (-\ln n)^k e^{-x \ln n} = \frac{(-\ln n)^k}{n^x}.$$

Alors, pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$:

$$\sup_{x \in [a; +\infty[} |f_n^{(k)}(x)| = \frac{(\ln n)^k}{n^a}.$$

On peut écrire $\frac{(\ln n)^k}{n^a} = \frac{(\ln n)^k}{n^{(a-1)/2}} \frac{1}{n^{(a+1)/2}}$ et comme $\frac{a-1}{2} > 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^{(a-1)/2}} = 0$ et donc :

$$\sup_{x \in [a; +\infty[} |f_n^{(k)}(x)| = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^{(a+1)/2}} \right).$$

Comme $a > 1$, on a $\frac{a+1}{2} > 1$, et donc la série $\sum \frac{1}{n^{(a+1)/2}}$ converge, ce qui prouve que $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a; +\infty[$ et ainsi, ζ est de classe C^∞ sur $[a; +\infty[$.

Comme ceci est vrai pour tout $a \in]1; +\infty[$:

$$\zeta \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur }]1; +\infty[\text{ et pour tout } k \in \mathbb{N} \text{ et tout } x \in]1; +\infty[, \zeta^{(k)}(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-\ln n)^k}{n^x}.$$

3) D'après ce qui précède, on a pour tout $x \in]1; +\infty[$:

$$\zeta'(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{-\ln n}{n^x} = - \sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^x} < 0.$$

Ainsi, ζ est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$.

Par ailleurs, $\sum \frac{1}{n^x}$ converge normalement sur $[2; +\infty[$, donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} = 1.$$

Enfin, pour tout $x \in]1; +\infty[$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} e^{-(x-1)\ln n}.$$

Or, pour tout $h \in \mathbb{R}_+$, on a $e^{-h} \geq 1 - h$, donc

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} e^{-(x-1)\ln n} \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} (1 - (x-1)\ln n) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - (x-1) \sum_{n=1}^N \frac{\ln n}{n}.$$

Comme la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, pour tout réel $A > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ et que $\sum_{n=1}^{N_0} \frac{1}{n} > A$ et :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} > \sum_{n=1}^{N_0} \frac{1}{n^x} > A - (x-1) \sum_{n=1}^{N_0} \frac{\ln n}{n}.$$

Alors, si ζ admet une limite finie ℓ en 1, l'inégalité ci-dessus donne $\ell \geq A$ en passant à la limite quand $x \rightarrow 1$.

Ainsi, on aurait $\ell \geq A$ pour tout réel $A > 0$, ce qui est absurde, et donc comme ζ est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$, on a $\lim_{x \rightarrow 1} \zeta(x) = +\infty$.

On obtient le tableau :

x	1	$+\infty$
ζ	$+\infty$	1

4) D'après ce qui précède, la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ est absolument convergente pour tout $x \in]1; +\infty[$, donc :

La fonction τ est bien définie sur $]1; +\infty[$.

On a pour tout $x \in]1; +\infty[$:

$$\begin{aligned}\tau(x) &= \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} + \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ impair}}} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ impair}}} \frac{1}{n^x} - \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{1}{n^x} \\ &= \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ impair}}} \frac{1}{n^x} + \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{1}{n^x} - 2 \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{1}{n^x} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x} - 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n)^x} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x} - 2 \frac{1}{2^x} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}\end{aligned}$$

Soit pour tout $x \in]1; +\infty[$:

$$\tau(x) = \left(1 - \frac{1}{2^{x-1}}\right) \zeta(x)$$

5) La fonction $x \mapsto 1 - \frac{1}{2^{x-1}}$ est de classe C^∞ sur $]1; +\infty[$, donc, en tant que produit de telles fonctions :

La fonction τ est de classe C^∞ sur $]1; +\infty[$.

6) La série alternée $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge et sa somme est $\ln 2$ (obtenue avec la formule de Taylor avec reste intégrale appliquée à $x \mapsto \ln(1+x)$ entre 0 et 1).

De plus, d'après le théorème sur les séries alternées, on a pour tout $x \in [1; +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Ceci prouve que la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge uniformément sur $[1; +\infty[$ et comme les fonctions $x \mapsto \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ sont toutes continues (quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$), la fonction $x \mapsto \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ est continue sur $[1; +\infty[$ et donc, τ est prolongeable par continuité en 1, avec $\lim_{x \rightarrow 1} \tau(x) = \ln 2$.

Alors :

$$\zeta(x) = \frac{2^{x-1}}{2^{x-1} - 1} \tau(x) = \frac{2^{x-1}}{e^{(x-1)\ln 2} - 1} \tau(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{(x-1)\ln 2} \ln 2.$$

Soit :

$$\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{x-1}$$

On a vu plus haut que pour tout $x \in [1; +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \tau(x) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^x}$.

En particulier, pour $n=1$, on obtient pour tout $x \in [1; +\infty[$:

$$|\tau(x) - 1| \leq \frac{1}{2^x}.$$

En passant à la limite quand $x \rightarrow +\infty$, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tau(x) = 1$. Alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\tau(x)}{1 - \frac{1}{2^{x-1}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Donc :

$$\boxed{\zeta(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1}$$

Exercice 5

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \frac{1}{x^2 + n^2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$ (et $\mathbb{R}_-^*$).

Soit $x > 0$ fixé.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{x^2 + t^2}$ est décroissante, continue et positive sur $\mathbb{R}_+$. On peut donc appliquer la comparaison série-intégrale, qui donne pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{n+1} \frac{dt}{x^2 + t^2} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{x^2 + k^2} \leq \frac{1}{x^2} + \int_0^n \frac{dt}{x^2 + t^2}.$$

Or :

$$\int_0^n \frac{dt}{x^2 + t^2} = \frac{1}{x} \int_0^n \frac{\frac{1}{x} dt}{1 + \left(\frac{t}{x}\right)^2} = \frac{1}{x} \arctan\left(\frac{n}{x}\right).$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{x} \arctan\left(\frac{n+1}{x}\right) \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{x^2 + k^2} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \arctan\left(\frac{n}{x}\right).$$

Et en passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient :

$$\frac{\pi}{2x} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + k^2} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{\pi}{2x} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \leq x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + k^2} \leq \frac{1}{x} + \frac{\pi}{2}.$$

On a alors immédiatement par le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + k^2} \right] = \frac{\pi}{2}$, soit :

$$\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{x^2 + n^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x}}$$

Exercice 6

1) Une étude rapide de $x \mapsto x(1-x)$ sur $[0,1]$, montre que pour tout $x \in [0,1]$, on a $0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$.

Alors, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{4^n}.$$

Comme la série géométrique $\sum \frac{1}{4^n}$ converge :

La série $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,1]$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 t^n (1-t)^n dt$. On intègre par parties, avec $t \mapsto \frac{1}{n+1} t^{n+1}$ et $t \mapsto (1-t)^n$ de classe C^1 sur $[0,1]$:

$$I_n = \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} (1-t)^n \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{n+1} t^{n+1} n (1-t)^{n-1} dt = \frac{n}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} (1-t)^{n-1} dt.$$

En recommençant plusieurs fois de suite, on obtient :

$$I_n = \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)} \int_0^1 t^{n+2} (1-t)^{n-2} dt = \dots = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)} \int_0^1 t^{n+k} (1-t)^{n-k} dt \dots = \frac{n(n-1)\dots(1)}{(n+1)(n+2)\dots(2n)} \int_0^1 t^{2n} dt.$$

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (la relation reste vraie pour $n=0$) :

$$I_n = \frac{n! \times n!}{(2n)!} \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1) \binom{2n}{n}}$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est polynômiale, donc continue sur $[0,1]$ et $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,1]$, donc la série $\sum I_n$ converge avec :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} I_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 f_n(t) dt \right) = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt.$$

Or, pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leq t(1-t) \leq \frac{1}{4} < 1$, donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n (1-t)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} [t(1-t)]^n = \frac{1}{1-t(1-t)} = \frac{1}{t^2 - t + 1}.$$

Et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} I_n = \int_0^1 \frac{dt}{t^2 - t + 1} = \int_0^1 \frac{dt}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^1 \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} dt}{\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) \right]_0^1 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Finalement, avec $I_n = \frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$:

$$\text{La série } \sum \frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}} \text{ converge avec } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Exercice 7

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ (elle est définie sur $\mathbb{R}_+$ et rationnelle) et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$f_n'(x) = \frac{1}{n} \frac{1}{(1+n^2x)^2} > 0.$$

La fonction f_n est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ de $f_n(0) = 0$ à $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{n^3 x} = \frac{1}{n^3}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$|f_n(x)| < \frac{1}{n^3}.$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^3}$ converge :

$$\sum f_n \text{ converge normalement sur } \mathbb{R}_+.$$

2) Comme les fonctions f_n sont toutes continues sur $\mathbb{R}_+$ et $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$:

$$S = \sum_{n \geq 1} f_n \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a vu que la fonction f_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ et, on a de plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n} \frac{(-1)^{k+1} n^{2(k-1)} k!}{(1+n^2x)^{k+1}}.$$

Ici, on a immédiatement $\sup_{\mathbb{R}_+} |f_n^{(k)}| = |f_n'(0)| = n^{2k-3} k!$ et comme la série $\sum \frac{1}{n^{2k-3}}$ diverge pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il n'y a pas de convergence normale de $\sum f_n^{(k)}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Par contre, pour tout réel $a > 0$, on a $\sup_{[a, +\infty[} |f_n^{(k)}| = |f_n^{(k)}(a)| = \frac{n^{2k-3} k!}{(1+n^2a)^{k+1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k!}{n^5 a^{k+1}}$.

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^5}$ converge, $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ et donc, pour tout réel $a > 0$, S est de classe C^∞ sur $[a, +\infty[$.

Ceci permet de conclure que :

$$S \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0) = 0$, donc $S(0) = 0$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{S(x) - S(0)}{x} = \frac{S(x)}{x} = \sum_{n \geq 1} \frac{f_n(x)}{x} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(1+n^2x)}.$$

Par comparaison série-intégrale, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(1+k^2x)} \geq \int_1^{n+1} \frac{dt}{t(1+t^2x)}$$

Et :

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{t(1+t^2x)} \underset{u=t^2x}{=} \frac{1}{2} \int_x^{(n+1)^2x} \frac{du}{u(1+u)} = \frac{1}{2} \int_x^{(n+1)^2x} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u} \right) du = \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{(n+1)^2x}{1+(n+1)^2x} \right) - \ln \left(\frac{x}{1+x} \right) \right].$$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^2x}{1+(n+1)^2x} = 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{n+1} \frac{dt}{t(1+t^2x)} = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{x}{1+x} \right)$ et ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(1+n^2x)} \geq -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{x}{1+x} \right) \Rightarrow \frac{S(x) - S(0)}{x} \geq -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{x}{1+x} \right).$$

Enfin, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{2} \ln \left(\frac{x}{1+x} \right) \right] = +\infty$, donc par comparaison :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{S(x) - S(0)}{x} = +\infty.$$

Ceci prouve que :

S n'est pas dérivable en 0.

3) On a vu que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \frac{1}{n^3}$ et que le série $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.

On a alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n \geq 1} f_n(x) = \sum_{n \geq 1} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}.$$

Et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3} = \zeta(3)$ où ζ est la fonction de l'exercice 4 (on a $\zeta(3) \approx 1,2$), donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \zeta(3)$$

Exercice 8

Pour tout $x \in [0, 1]$, posons :

$$f_n(x) = x - P_n(x).$$

On a alors $f_0(x) = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) - \frac{1}{2} f_n(x)^2 = g(f_n(x))$$

avec $g(x) = x - \frac{1}{2} x^2$.

La fonction g est polynomiale donc dérivable sur $[0,1]$ avec pour tout $x \in [0,1]$, $g'(x) = 1 - x \geq 0$.

Ainsi, g est croissante sur $[0,1]$ de $g(0) = 0$ à $g(1) = \frac{1}{2}$ et donc $g([0,1]) \subset [0,1]$. Comme $f_0(x) = x \in [0,1]$, on a alors $f_n(x) \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\frac{1}{2}f_n(x)^2 \leq 0.$$

Ainsi, à $x \in [0,1]$ fixé, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et décroissante, donc elle converge vers $\ell(x) \in [0,1]$.

Comme g est continue (car polynomiale) sur $[0,1]$ et $f_{n+1}(x) = g(f_n(x))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\ell(x) = g(\ell(x)) \Leftrightarrow \ell(x) = \ell(x) - \frac{1}{2}\ell(x)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ell(x)^2 = 0 \Leftrightarrow \ell(x) = 0.$$

Finalement, pour tout $x \in [0,1]$, $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, donc $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x , autrement dit :

La suite de fonctions $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction $x \mapsto x$.

L'énoncé admet que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions *polynômes* (on le prouve facilement par récurrence).

Les fonctions f_n sont alors elles aussi toutes polynomiales, donc continues sur le segment $[0,1]$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet un maximum sur $[0,1]$, noté M_n . On vu de plus que pour tous $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \in [0,1]$, donc f_n est positive sur $[0,1]$ et $M_n \in [0,1]$.

Comme g est croissante sur $[0,1]$, on a alors pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_{n+1}(x) = g(f_n(x)) \leq g(M_n) \text{ donc } M_{n+1} \leq g(M_n).$$

Or, pour tout $x \in [0,1]$, $g(x) - x = -\frac{1}{2}x^2 \leq 0$, donc $g(x) \leq x$, d'où :

$$M_{n+1} \leq M_n.$$

La suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée par 0 : elle converge vers $m \in [0,1]$.

Toujours grâce à la continuité de g , on peut passer à la limite dans l'inégalité $M_{n+1} \leq g(M_n)$, ce qui donne :

$$m \leq g(m) = m - \frac{1}{2}m^2.$$

On a alors, $0 \leq -\frac{1}{2}m^2$, soit $m = 0$.

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\max_{x \in [0,1]} |P_n(x) - x| \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\max_{x \in [0,1]} |f_n(x)| \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\max_{x \in [0,1]} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = 0.$$

Ceci prouve que :

La suite de fonctions $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $x \mapsto x$.

Soit $x \in [0, 1]$. Posons $u_n = f_n(x) = x - P_n(x)$. On a donc et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$ et $u_n \rightarrow 0$.

Pour $x = 0$, on a $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (car $0 = g(0)$), donc $\sum u_n$ converge.

On suppose maintenant $x > 0$.

Remarquons que la fonction g est strictement croissante sur $[0, 1]$, donc si $u_n > 0$, alors $u_{n+1} = g(u_n) > g(0) = 0$ et comme $u_0 = x > 0$, on a (par récurrence) $u_n > 0$ (donc $u_n \neq 0$) pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors, comme $u_n \rightarrow 0$, on a :

$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}u_n^2} = \frac{1}{u_n} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}u_n} = \frac{1}{u_n} \left(1 + \frac{1}{2}u_n + o(u_n) \right) = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{2} + o(1).$$

Donc, $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \rightarrow \frac{1}{2}$ et avec la propriété de Césaro, on obtient :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} \right) \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Or, $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} \right) = \frac{1}{nu_n} - \frac{1}{nu_0}$ et comme $\frac{1}{nu_0} \rightarrow 0$, on a :

$$\frac{1}{nu_n} \rightarrow \frac{1}{2} \Leftrightarrow nu_n \rightarrow 2 \Leftrightarrow u_n \sim \frac{2}{n}.$$

Or, la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc $\sum u_n$ diverge.

Finalement :

La série de fonctions $\sum (id - P_n)$ ne converge pas simplement sur $[0, 1]$.

Exercice 9

1) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a $\sin(\pi x) \neq 0$ et $\frac{1}{(x+n)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(x-n)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$, et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(x+n)^2}$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(x-n)^2}$ convergent et ainsi, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x-n)^2}$ converge.

Finalement, quand $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $f(x)$ est bien défini, donc :

f est bien définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

On a déjà :

$$x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \Leftrightarrow x+1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

Et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} f(x+1) &= -\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi(x+1))} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x+1-n)^2} \\ &= -\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x + \pi)} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x-(n-1))^2} \\ &\stackrel{n'=n-1}{=} -\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x-n)^2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Donc :

f est 1-périodique sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Soit $p \in \mathbb{Z}$ et $[a, b] \subset]p, p+1[$. Pour tout $x \in [a, b]$, on a :

- si $n \leq p$, on a $0 \leq p-n < a-n \leq x-n$, donc $0 < \frac{1}{(x-n)^2} \leq \frac{1}{(a-n)^2}$ et la série $\sum_{n \leq p} \frac{1}{(a-n)^2}$ converge, donc $x \mapsto \sum_{n \leq p} \frac{1}{(x-n)^2}$ converge normalement sur $[a, b]$;
- si $n \geq p+1$, on a $x-n \leq b-n < p+1-n \leq 0$ donc $0 < \frac{1}{(x-n)^2} \leq \frac{1}{(b-n)^2}$ et la série $\sum_{n \geq p+1} \frac{1}{(b-n)^2}$ converge, donc $x \mapsto \sum_{n \geq p+1} \frac{1}{(x-n)^2}$ converge normalement sur $[a, b]$.

Comme $x \mapsto \frac{1}{(x-n)^2}$ est continue sur $[a, b]$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $x \mapsto \sum_{n \leq p} \frac{1}{(x-n)^2}$ et $x \mapsto \sum_{n \geq p+1} \frac{1}{(x-n)^2}$ sont continues sur $[a, b]$. Il en va de même de $x \mapsto -\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$ et donc, f est continue sur $[a, b]$ en tant que somme de telles fonctions. Ceci étant vrai pour tout $[a, b] \subset]p, p+1[$, f est continue sur $]p, p+1[$.

Ceci étant vrai pour tout $p \in \mathbb{Z}$:

f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

2) On prouve comme ci-dessus que les séries $x \mapsto \sum_{n < 0} \frac{1}{(x-n)^2}$ et $x \mapsto \sum_{n > 0} \frac{1}{(x-n)^2}$ convergent normalement sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, donc que $x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{(x-n)^2}$ est continue sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et donc que $x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{(x-n)^2}$ admet une limite finie en 0 (qui est $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2} = 2 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$).

Par ailleurs, au voisinage de 0 :

$$-\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} + \frac{1}{x^2} = \frac{\sin^2(\pi x) - \pi^2 x^2}{x^2 \sin^2(\pi x)}.$$

Et :

$$\sin^2(\pi x) - \pi^2 x^2 = \left(\pi x - \frac{(\pi x)^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^4) \right)^2 - \pi^2 x^2 = \pi^2 x^2 - 2\pi x \frac{(\pi x)^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^4) - \pi^2 x^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\pi^4}{3} x^4$$

$$x^2 \sin^2(\pi x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \pi^2 x^4$$

Donc, $-\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} + \frac{1}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-\frac{\pi^4}{3} x^4}{\pi^2 x^4}$, soit :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} + \frac{1}{x^2} \right) = -\frac{\pi^2}{3}.$$

Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} + \frac{1}{x^2} \right) + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{(x-n)^2} \right) = -\frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}.$$

Et donc, f se prolonge par continuité en 0.

Comme f est 1-périodique, elle se prolonge par continuité en tout $0 + n \times 1 = n$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et donc :

f se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\frac{x}{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $\frac{x+1}{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, et on a :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) &= -\frac{\pi^2}{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\left(\frac{x}{2} - n\right)^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2\left(\frac{\pi(x+1)}{2}\right)} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2} - n\right)^2} \\ &= -\pi^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\pi(x+1)}{2}\right)} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{4}{(x-2n)^2} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{4}{(x+1-2n)^2} \\ &= -4\pi^2 \frac{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\left[2 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi(x+1)}{2}\right)\right]^2} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{4}{(x-2n)^2} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{4}{(x+1-2n)^2} \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) &= -4\pi^2 \frac{1}{\left[\cos\left(\frac{\pi(x+1)}{2} - \frac{\pi x}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi(x+1)}{2} + \frac{\pi x}{2}\right)\right]^2} + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \text{ pair}}} \frac{4}{(x-n)^2} + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \text{ impair}}} \frac{4}{(x-n)^2} \\ &= -\frac{4\pi^2}{\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right)\right]^2} + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \text{ pair}}} \frac{4}{(x-n)^2} + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \text{ impair}}} \frac{4}{(x-n)^2} = 4 \left[-\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x-n)^2} \right] \end{aligned}$$

Ainsi, $f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 4f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et par continuité de la fonction f prolongée sur $\mathbb{R}$, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$4f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

3) La fonction f (prolongée) est continue sur le segment $[0,1]$, donc $M = \sup_{[0,1]} |f| = \max_{[0,1]} |f|$ existe. Or, f est 1-périodique sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, donc elle l'est sur $\mathbb{R}$ une fois prolongée. Alors :

$$M = \sup_{\mathbb{R}} |f|.$$

Alors, d'après la question précédente, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$4|f(x)| = \left| f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) \right| \leq \left| f\left(\frac{x}{2}\right) \right| + \left| f\left(\frac{x+1}{2}\right) \right| \leq M + M = 2M.$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2|f(x)| \leq M$ d'où $2M \leq M$. Ceci prouve que $M = \sup_{\mathbb{R}} |f| = 0$ et donc que :

f est nulle.

On a alors $f(0) = 0$ et on a vu que $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$, donc $-\frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = 0$, soit :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$