

Corrigés des TD du chapitre 7

Exercice 1

1) En effectuant $C_j \leftarrow C_j - C_n$ pour tout $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ n & \cdots & n & n-1 & n \\ n & n & \cdots & n & n \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} 1-n & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 2-n & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & n \\ 0 & \cdots & n & -1 & n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}_n = (1-n)(2-n)\dots(-1)n = (-1)^{n-1}(n-1)(n-2)\dots(1)n.$$

Soit :

$$\Delta_1 = (-1)^{n-1} n!$$

En développant par rapport à la première colonne :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}_{n-1} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

Soit :

$$\Delta_2 = 1 + (-1)^{n+1}$$

En effectuant $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$, puis $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}$, puis $L_{n-2} \leftarrow L_{n-2} - L_{n-3}$, puis ... , puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$:

$$\Delta_3 = D_n = \begin{vmatrix} \binom{1}{1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{2}{2} - \binom{1}{1} & \binom{2}{1} - 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \binom{n-1}{n-1} - \binom{n-2}{n-2} & \cdots & \cdots & \binom{n-1}{1} - 1 & 1 \\ \binom{n}{n} - \binom{n-1}{n-1} & \binom{n}{n-1} - \binom{n-1}{n-2} & \cdots & \binom{n}{2} - \binom{n-1}{1} & \binom{n}{1} - 1 \end{vmatrix}_n$$

Avec la formule de Pascal $\binom{p}{k} - \binom{p-1}{k-1} = \binom{p-1}{k}$ (pour $1 \leq k \leq p-1$), on obtient :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \binom{1}{1} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \binom{n-2}{1} & 1 \\ 0 & \binom{n-1}{n-1} & \cdots & \binom{n-1}{2} & \binom{n-1}{1} \end{vmatrix}_n$$

Et en développant par rapport à la première colonne :

$$D_n = \begin{vmatrix} \binom{1}{1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \binom{2}{2} & \binom{2}{1} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \binom{n-2}{1} & 1 \\ \binom{n-1}{n-1} & \binom{n-1}{n-2} & \dots & \binom{n-1}{2} & \binom{n-1}{1} \end{vmatrix}_{n-1} = D_{n-1}.$$

$$\text{Ainsi, } D_n = D_{n-1} = D_{n-2} = \dots = D_2 = \begin{vmatrix} \binom{1}{1} & 1 \\ \binom{2}{2} & \binom{2}{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \text{ donc :}$$

$$\Delta_3 = 1$$

2) On fixe $x \in \mathbb{R}$.

En développant par rapport à la première colonne, on obtient pour tout $n \geq 2$:

$$D_n(x) = x D_{n-1}(x) - \frac{x^2}{2!} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x^2/2! & x & 1 & \ddots & \vdots \\ x^3/3! & x^2/2! & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & x & 1 \\ x^{n-1}/(n-1)! & x^{n-2}/(n-2)! & \dots & x^2/2! & x \end{vmatrix}_{n-1} + \frac{x^3}{3!} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ x^3/3! & x^2/2! & x & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ x^{n-1}/(n-1)! & x^{n-2}/(n-2)! & \dots & x^2/2! & x \end{vmatrix}_{n-1} \\ - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n!} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ x^2/2! & x & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ x^{n-2}/(n-2)! & \dots & x^2/2! & x & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

En développant chacun des déterminants $(n-1) \times (n-1)$ obtenus par rapport à la première ligne plusieurs fois de suite si nécessaire, on obtient, en posant $D_0(x) = 1$:

$$D_n(x) = x D_{n-1}(x) - \frac{x^2}{2!} D_{n-2}(x) + \frac{x^3}{3!} D_{n-3}(x) - \dots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} D_1(x) + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n!} D_0(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k!} D_{n-k}(x).$$

On a de plus :

$$D_0(x) = 1 \quad D_1(x) = x \quad D_2(x) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ x^2/2! & x \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2!} \quad D_3(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ x^2/2! & x & 1 \\ x^3/3! & x^2/2! & x \end{vmatrix} = \frac{x^3}{3!}.$$

On conjecture alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D_n(x) = \frac{x^n}{n!}$. On le prouve par récurrence forte sur n .

La propriété est vraie au rang $n = 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, supposons la propriété vraie jusqu'à un rang $n-1$. On a alors pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $D_k(x) = \frac{x^k}{k!}$

(par hypothèse de récurrence), soit pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $D_{n-k}(x) = \frac{x^{n-k}}{(n-k)!}$ (car $n-k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$) et :

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k!} D_{n-k}(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k!} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^n}{k!(n-k)!} \\ &= -\frac{x^n}{n!} \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} = -\frac{x^n}{n!} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k = \frac{x^n}{n!} \left[1 - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \right] = \frac{x^n}{n!} [1 - (-1+1)^n] = \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang n .

Ainsi, la propriété est initialisée et héréditaire donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Finalement, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$D_n(x) = \frac{x^n}{n!}$$

Exercice 2

On a toujours :

- $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\text{Im } AB \subset \text{Im } A$ donc $\text{rg}(AB) \leq \text{rg}(A) \leq \min(n, p)$;
- $BA \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ avec $\text{Im } BA \subset \text{Im } B$ donc $\text{rg}(BA) \leq \text{rg}(B) \leq \min(n, p)$.

Comme $n \neq p$, on a $n < p$ ou $p < n$.

- Si $p < n$, on a $\min(n, p) = p$ donc $\text{rg}(AB) \leq p < n$: AB n'est pas inversible et $\det AB = 0$.
- Si $n < p$, on a $\min(n, p) = n$ donc $\text{rg}(BA) \leq n < p$: BA n'est pas inversible et $\det BA = 0$.

Ainsi, on a toujours :

$$\det AB = 0 \text{ ou } \det BA = 0.$$

Exercice 3

Le déterminant d'une matrice est polynômial en chacun de ses coefficients, donc la fonction $f : x \mapsto \det(A + xB)$ est une fonction polynômiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Elle est donc entre autres continue sur $\mathbb{R}$.

Or, $f(0) = \det A \neq 0$ car A est inversible. Comme f est continue en 0, elle ne s'annule pas au voisinage de 0, autrement dit, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $f(x) = \det(A + xB) \neq 0$, ce qui implique que $A + xB$ est inversible. Ainsi :

$$\text{Il existe un réel } \varepsilon > 0 \text{ tel que pour tout } x \in [-\varepsilon, \varepsilon], A + xB \in GL_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 4

1) a. On a :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & BD^{-1} \\ CD - DC & I_n \end{pmatrix}.$$

Et comme C et D commutent, on a $CD - DC = 0_n$, donc :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & BD^{-1} \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\det \left[\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix} \right] = \det \begin{pmatrix} AD - BC & BD^{-1} \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = \det(AD - BC) \times \det I_n = \det(AD - BC).$$

Et :

$$\det \left[\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix} \right] = \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \det \begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix} = \det M \times \det D \times \det(D^{-1}) = \det M.$$

Ainsi :

$$\boxed{\det M = \det(AD - BC)}$$

b. Posons $f(x) = \det(D(x)) = \det(D + xI_n)$. La fonction f est polynomiale en x .

On a $f(0) = \det D = 0$ (car D n'est pas inversible), donc 0 est racine de f .

Si f admet au moins une autre racine réelle (autre que 0), l'ensemble $R = \{z \in \mathbb{R}^*, f(z) = 0\}$ est non vide et fini, donc on peut poser $\alpha = \min\{|z|, z \in R\}$. Si f n'admet pas de autre racine réelle autre que 0, on peut prendre $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ quelconque. Dans les deux cas, On a alors, pour tout $x \in]-\alpha, \alpha[\setminus \{0\}$, $f(x) \neq 0$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe bien un réel } \alpha > 0 \text{ tel que pour tout } x \in]-\alpha, \alpha[\setminus \{0\}, \det(D(x)) \neq 0.}$$

c. D'après ce qui précède, on a pour tout $x \in]-\alpha, \alpha[\setminus \{0\}$, $\det(D(x)) \neq 0$, donc $D(x)$ est inversible.

Or, si C et D commutent, C et $D(x)$ commutent aussi pour tout réel x (C et I_n commutent). Alors, d'après la question a., on a, pour tout $x \in]-\alpha, \alpha[\setminus \{0\}$:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D(x) \end{pmatrix} = \det(AD(x) - BC).$$

Or, les deux déterminants ci-dessus sont des fonctions polynomiales en x , donc continues en 0 et ainsi :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D(0) \end{pmatrix} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D(x) \end{pmatrix} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} [\det(AD(x) - BC)] = \det(AD(0) - BC).$$

Soit :

$$\boxed{\det M = \det(AD - BC)}$$

2) a. Comme A et B commutent, on peut utiliser la question précédente :

$$\det N = \det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = \det(A^2 - B(-B)) = \det(A^2 + B^2).$$

Posons $Z = A + iB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La matrice $\bar{Z}$ étant la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de Z , on a $\bar{\bar{Z}} = A - iB$ (car A et B sont deux matrices à coefficients réels).

De plus, l'expression du déterminant d'une matrice étant polynômiale en ses coefficients, on a $\det \bar{Z} = \overline{\det Z}$.

Alors :

$$\det(Z\bar{Z}) = (\det Z)(\det \bar{Z}) = (\det Z)(\overline{\det Z}) = |\det Z|^2 \geq 0.$$

Or, comme A et B commutent, on a :

$$Z\bar{Z} = (A + iB)(A - iB) = A^2 - i(AB - BA) + B^2 = A^2 + B^2.$$

Ainsi :

$$\det N = \det(A^2 + B^2) \geq 0$$

b. On peut écrire :

$$\det N = \det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \stackrel{L_{j+n} \leftarrow L_{j+n} + iL_j}{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} = \det \begin{pmatrix} A & B \\ -B + iA & A + iB \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & B \\ i(A + iB) & A + iB \end{pmatrix}$$

Comme $i(A + iB)$ et $A + iB$ commutent, on peut utiliser la question 1 :

$$\begin{aligned} \det N &= \det \left(A(A + iB) - B[i(A + iB)] \right) = \det \left((A - iB)(A + iB) \right) \\ &= \det(A - iB) \det(A + iB) = \overline{\det(A + iB)} \det(A + iB) = |\det(A + iB)|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, même si A et B ne commutent pas :

$$\det N \geq 0$$

3) On a :

$$\begin{pmatrix} xI_p & A \\ B & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_p & 0_{p,q} \\ B & -xI_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB - xI_p & -xA \\ 0_{q,p} & -xI_q \end{pmatrix} \quad (1).$$

$$\begin{pmatrix} xI_p & A \\ B & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_p & A \\ 0_{q,p} & -xI_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xI_p & 0_{p,q} \\ -B & BA - xI_q \end{pmatrix} \quad (2).$$

Alors, avec (1), on a :

$$\det \begin{pmatrix} xI_p & A \\ B & I_q \end{pmatrix} \times \det \begin{pmatrix} -I_p & 0_{p,q} \\ B & -xI_q \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} AB - xI_p & -xA \\ 0_{q,p} & -xI_q \end{pmatrix} = \det(AB - xI_p) \times \det(-xI_q).$$

Or, $\det(-xI_q) = (-x)^q$ et $\det \begin{pmatrix} -I_p & 0_{p,q} \\ B & -xI_q \end{pmatrix} = \det(-I_p) \times \det(-xI_q) = (-1)^p \times (-x)^q$, donc :

$$\det(AB - xI_p) \times (-x)^q = \det \begin{pmatrix} xI_p & A \\ B & I_q \end{pmatrix} \times (-1)^p \times (-x)^q.$$

De même avec (2), on obtient :

$$\det(BA - xI_q) \times (-x)^p = \det \begin{pmatrix} xI_p & A \\ B & I_q \end{pmatrix} \times (-1)^p \times (-x)^q.$$

Et ainsi :

$$(-x)^q \det(AB - xI_p) = (-x)^p \det(BA - xI_q)$$

4) Considérons deux cas.

1^{er} cas : $a = 0$

Alors, $\det M = \det \begin{pmatrix} 0_n & bA \\ cA & dA \end{pmatrix}$ et on effectue $L_i \leftrightarrow L_{i+n}$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Chaque interversion multiplie le déterminant par -1 et ainsi, on obtient :

$$\det M = (-1)^n \det \begin{pmatrix} cA & dA \\ 0_n & bA \end{pmatrix}.$$

Avec le déterminant par blocs :

$$\det M = (-1)^n \det(cA) \det(bA) = (-1)^n c^n \times \det A \times b^n \times \det A = (-bc)^n (\det A)^2.$$

Et avec $a = 0$, on a $\det B = -bc$, donc :

$$\det M = (\det B)^n (\det A)^2.$$

2nd cas : $a \neq 0$

On effectue $L_{i+n} \leftrightarrow L_{i+n} - \frac{c}{a} L_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, ce qui donne :

$$\det M = \det \begin{pmatrix} aA & bA \\ 0_n & \left(d - \frac{c}{a}b\right)A \end{pmatrix}.$$

Alors, à nouveau avec le déterminant par blocs :

$$\det M = \det(aA) \det\left(\left(d - \frac{c}{a}b\right)A\right) = a^n \times \det A \times \left(d - \frac{c}{a}b\right)^n \times \det A = (ad - cb)^n (\det A)^2.$$

Soit, à nouveau :

$$\det M = (\det B)^n (\det A)^2.$$

Donc, dans tous les cas :

$$\det M = (\det B)^n (\det A)^2$$

Exercice 5

Posons :

$$P(X) = \begin{vmatrix} 1 & X & \cdots & X^{k-1} & X^k & X^k & \cdots & X^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^{k-1} & a_1^k & a_1^{k+1} & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{k-1} & a_2^k & a_2^{k+1} & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{k-1} & a_n^k & a_n^{k+1} & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la première ligne, on justifie facilement que P est un polynôme (en X), de degré au plus n .

Le coefficient de X^n est, au signe près, un déterminant de Vandermonde :

$$(-1)^{n+2} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^k & a_1^{k+1} & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^k & a_2^{k+1} & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^k & a_n^{k+1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^n V_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = (-1)^n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \neq 0$$

Donc, P est de degré n .

De plus, pour tout $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $P(a_\ell) = 0$ (car c'est le déterminant d'une matrice possédant deux lignes identiques). Comme les a_ℓ sont deux à deux distincts, ce sont les n racines simples de P et ainsi :

$$P(X) = (-1)^n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \prod_{\ell=1}^n (X - a_\ell).$$

Dans le développement par rapport à la première ligne, le coefficient de X^k est :

$$(-1)^{k+2} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{k-1} & a_1^{k+1} & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{k-1} & a_2^{k+1} & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{k-1} & a_n^{k+1} & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} = (-1)^k \Delta_k$$

Or, si $P(X) = \alpha_n X^n + \dots + \alpha_k X^k + \dots + \alpha_1 X + \alpha_0$ (avec P scindé, de racines les a_ℓ), on a :

$$\alpha_k = (-1)^{n-k} \alpha_n \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-k} \leq n} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_{n-k}}.$$

Ainsi :

$$(-1)^k \Delta_k = (-1)^{n-k} (-1)^n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-k} \leq n} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_{n-k}}.$$

Soit :

$$\Delta_k = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-k} \leq n} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_{n-k}}$$

Exercice 6

1) Soit $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = QDQ^{-1}$. Pour tout $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on a alors :

$$P(A) = \sum_{k=0}^p a_k A^k = \sum_{k=0}^p a_k (QDQ^{-1})^k = \sum_{k=0}^p a_k QD^k Q^{-1} = Q \left(\sum_{k=0}^p a_k D^k \right) Q^{-1} = Q(P(D))Q^{-1}.$$

Or, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, donc :

$$P(D) = \sum_{k=0}^p a_k D^k = \sum_{k=0}^p a_k \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) = \text{diag} \left(\sum_{k=0}^p a_k \lambda_1^k, \dots, \sum_{k=0}^p a_k \lambda_n^k \right) = \text{diag}(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)) = \sum_{i=1}^p P(\lambda_i) E_{i,i}$$

où $E_{i,i}$ est la matrice de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans laquelle le 1 est le $i^{\text{ième}}$ coefficient diagonal.

Alors :

$$P(A) = Q \left(\sum_{i=1}^p P(\lambda_i) E_{i,i} \right) Q^{-1} = \sum_{i=1}^p P(\lambda_i) Q E_{i,i} Q^{-1}.$$

Et, en posant $A_i = Q E_{i,i} Q^{-1}$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ (qui ne dépend pas de P), on obtient :

Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A) = \sum_{i=1}^n P(\lambda_i) A_i$.

2) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On veut montrer que $A_i = Q E_{i,i} Q^{-1}$ est un polynôme en A , autrement dit qu'il existe $P_i \in \mathbb{C}[X]$ tel que :

$$A_i = P_i(A) \Leftrightarrow Q E_{i,i} Q^{-1} = Q(P_i(D)) Q^{-1} \Leftrightarrow P_i(D) = E_{i,i} \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P_i(\lambda_k) = \delta_{i,k}.$$

Comme les λ_i sont deux à deux distincts, il suffit de prendre pour P_i le polynôme interpolateur de Lagrange associé aux λ_k et $\delta_{i,k}$. Ainsi :

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe bien un polynôme $P_i \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A_i = P_i(A)$.

Exercice 7

Remarquons que comme la famille $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ contient n fonctions, $\text{rg}(f_1, f_2, \dots, f_n) = n$ si et seulement la famille est libre. On veut donc prouver que :

$$(f_1, f_2, \dots, f_n) \text{ est libre} \Leftrightarrow \exists (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \det \left[(f_j(x_i))_{1 \leq i, j \leq n} \right] \neq 0.$$

Soit par contraposée :

$$(f_1, f_2, \dots, f_n) \text{ est liée} \Leftrightarrow \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \det \left[(f_j(x_i))_{1 \leq i, j \leq n} \right] = 0.$$

Par ailleurs, pour fixer les idées, notons que :

$$\det \left[(f_j(x_i))_{1 \leq i, j \leq n} \right] = \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix}_n.$$

($\Rightarrow$) On suppose que la famille $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est liée, donc il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n = 0_{\mathbb{R}}$, soit pour tout réel x :

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \dots + \lambda_n f_n(x) = 0.$$

Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On a alors pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_1 f_1(x_j) + \lambda_2 f_2(x_j) + \dots + \lambda_n f_n(x_j) = 0$.

Donc :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} f_1(x_1) \\ f_1(x_2) \\ \vdots \\ f_1(x_n) \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} f_2(x_1) \\ f_2(x_2) \\ \vdots \\ f_2(x_n) \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} f_n(x_1) \\ f_n(x_2) \\ \vdots \\ f_n(x_n) \end{pmatrix} = 0.$$

Autrement dit, les colonnes de la matrice $(f_j(x_i))_{1 \leq i, j \leq n}$ sont liées et donc $\det \left[(f_j(x_i))_{1 \leq i, j \leq n} \right] = 0$.

($\Leftarrow$) On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- Pour $n = 1$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\det[f_1(x)] = f_1(x) = 0$, donc $f_1 = 0_{\mathbb{R}}$ et (f_1) est liée.
- On suppose la propriété vraie à un rang n .

Soit $(f_1, f_2, \dots, f_n, f_{n+1})$ pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\det[f_i(x_j)]_{1 \leq i, j \leq n+1} = 0$, soit :

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_n(x_1) & f_{n+1}(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_n(x_2) & f_{n+1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_n(x_n) & f_{n+1}(x_n) \\ f_1(x_{n+1}) & f_2(x_{n+1}) & \cdots & f_n(x_{n+1}) & f_{n+1}(x_{n+1}) \end{vmatrix}_{n+1} = 0.$$

Si la famille $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est liée, alors $(f_1, f_2, \dots, f_n, f_{n+1})$ aussi.

Supposons que la famille $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est libre. Alors, par hypothèse de récurrence, il existe

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \det[f_j(x_i)]_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix}_n \neq 0.$$

Par hypothèse, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_n(x_1) & f_{n+1}(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_n(x_2) & f_{n+1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_n(x_n) & f_{n+1}(x_n) \\ f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) & f_{n+1}(x) \end{vmatrix}_{n+1} = 0.$$

En développant par rapport à la dernière ligne, on obtient :

$$(-1)^{n+2} f_1(x) \begin{vmatrix} f_2(x_1) & f_3(x_1) & \cdots & f_{n+1}(x_1) \\ f_2(x_2) & f_3(x_2) & \cdots & f_{n+1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_2(x_n) & f_3(x_n) & \cdots & f_{n+1}(x_n) \end{vmatrix}_n + \dots + (-1)^{n+1+n+1} f_{n+1}(x) \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix}_n = 0.$$

Ainsi, si on note λ_k le coefficient de $f_k(x)$ (indépendant de x) dans la relation ci-dessus, on a :

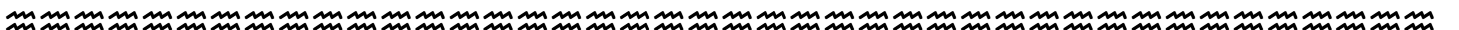
$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_{n+1} f_{n+1}(x) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_{n+1} f_{n+1} = 0_{\mathbb{R}}.$$

Comme $\lambda_{n+1} = \det[f_j(x_i)]_{1 \leq i, j \leq n} \neq 0$, les λ_k ne sont pas tous nuls, et ainsi, la famille $(f_1, f_2, \dots, f_n, f_{n+1})$ est liée. La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi, on a bien :

$$\text{rg}(f_1, f_2, \dots, f_n) = n \Leftrightarrow (f_1, f_2, \dots, f_n) \text{ est libre} \Leftrightarrow \exists (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \det[f_j(x_i)]_{1 \leq i, j \leq n} \neq 0$$



Corrigés des TD du chapitre 7
Exercice 8

Exercice classique (qui revient souvent à l'oral).

1) Tel qu'indiqué, procédons par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- Pour $n=1$, la seule matrice nilpotente de $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ est (0) qui commute avec toute matrice $A = (a)$ de $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ et on a immédiatement $\det(A+B) = \det(A+0_1) = \det A$. La propriété est vraie au rang $n=1$.
- Supposons la propriété vraie jusqu'à un rang $n-1 \in \mathbb{N}^*$.

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$ et B est nilpotente : il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $B^q = 0_n$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A et $p = \dim \ker(A - \lambda I_n) \in \llbracket 1, n \rrbracket$ (dans $\mathbb{C}^n$). Il existe alors $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$P^{-1}AP = A' = \begin{pmatrix} \lambda I_p & A_2 \\ 0_{n-p,p} & A_1 \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$\det A = \det A' = \det \begin{pmatrix} \lambda I_p & A_2 \\ 0_{n-p,p} & A_1 \end{pmatrix} = \det(\lambda I_p) \times \det(A_1).$$

Remarquons de plus que A' est la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A dans une base $\mathcal{B}$ dont les p premiers vecteurs forment une base de $\ker(A - \lambda I_n)$.

Comme $AB = BA$, si $X \in \ker(A - \lambda I_n)$, on a :

$$A(BX) = ABX = BAX = B(\lambda X) = \lambda BX.$$

Donc, $BX \in \ker(A - \lambda I_n)$.

On en conclut que $\ker(A - \lambda I_n)$ est stable par B , donc la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à B dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme :

$$B' = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} B_3 & B_2 \\ 0_{n-p,p} & B_1 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \det(A+B) &= \det(P^{-1}(A+B)P) = \det(P^{-1}AP + P^{-1}BP) = \det(A' + B') \\ &= \det \left[\begin{pmatrix} \lambda I_p & A_2 \\ 0_{n-p,p} & A_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_3 & B_2 \\ 0_{n-p,p} & B_1 \end{pmatrix} \right] = \det \begin{pmatrix} \lambda I_p + B_3 & A_2 + B_2 \\ 0_{n-p,p} & A_1 + B_1 \end{pmatrix} \\ &= \det(\lambda I_p + B_3) \times \det(A_1 + B_1) \end{aligned}$$

De plus, avec le produit par blocs :

$$\circ \quad B'^q = \begin{pmatrix} B_3^q & C_2 \\ 0_{n-p,p} & B_1^q \end{pmatrix} = P^{-1}B^qP = 0_n \text{ donc } B_3^q = 0_p \text{ et } B_1^q = 0_{n-p} : B_1 \text{ et } B_3 \text{ sont nilpotentes ;}$$

$$\circ \quad A'B' = (P^{-1}AP)(P^{-1}BP) = P^{-1}(AB)P = P^{-1}(BA)P = (P^{-1}BP)(P^{-1}AP) = B'A', \text{ soit :}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda I_p & A_2 \\ 0_{n-p,p} & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_3 & B_2 \\ 0_{n-p,p} & B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda B_3 & \times \\ 0_{n-p,p} & A_1 B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_3 & B_2 \\ 0_{n-p,p} & B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I_p & A_2 \\ 0_{n-p,p} & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda B_3 & \times \\ 0_{n-p,p} & B_1 A_1 \end{pmatrix}.$$

Donc, $A_1 B_1 = B_1 A_1$.

Ainsi, si $p < n$, $A_1, B_1 \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ avec $1 \leq n-p \leq n-1$, $A_1 B_1 = B_1 A_1$ et B_1 est nilpotente, donc on peut utiliser l'hypothèse de récurrence pour conclure que :

$$\det(A_1 + B_1) = \det A_1.$$

Si $p = n$, les matrices A_1 et B_1 n'existent pas et A est scalaire.

Par ailleurs, comme $B_3^q = 0_p$, le polynôme X^q est annulateur de B_3 , donc 0 est la seule valeur propre (réelle ou complexe) de B_3 . Comme B_3 est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, elle est semblable à une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & \times & \cdots & \times \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \times \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\det(\lambda I_p + B_3) = \det \begin{pmatrix} \lambda & \times & \cdots & \times \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \times \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^p = \det(\lambda I_p).$$

Finalement :

$$\det(A + B) = \det(\lambda I_p + B_3) \times \det(A_1 + B_1) = \det(\lambda I_p) \times \det(A_1) = \det A.$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Autrement dit, pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$ et B est nilpotente, on a bien :

$$\det(A + B) = \det A$$

2) Avec $\det(A + B) = \det A$, cette question est immédiate :

$$A + B \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A + B) \neq 0 \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow A \in GL_n(\mathbb{K}).$$

Ainsi :

$$A + B \text{ est inversible si et seulement si } A \text{ l'est.}$$

Exercice 9

Posons $P(x) = \det(xA + B)$.

Tous les coefficients de $xA + B$ sont affines en x et $\det(xA + B)$ est une combinaison linéaire de produits de trois coefficients de $xA + B$, donc $P(x)$ est polynômiale en x , de degré au plus 3.

Or, $\det B = \det(A + B) = \det(A - B) = (-1)^3 \det(-A + B) = 0$, donc -1 , 0 et 1 sont racines de P .

Ainsi, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$P(x) = ax(x-1)(x+1) = a(x^3 - x).$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{P(x)}{x^3} = \frac{1}{x^3} \det(xA + B) = \det\left(A + \frac{1}{x}B\right).$$

On montre comme ci-dessus que l'application $t \mapsto \det(A + tB)$ est polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}$. Alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \det\left(A + \frac{1}{x}B\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \det(A + tB) = \det A = 0.$$

Or :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \det\left(A + \frac{1}{x}B\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a(x^3 - x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(a - \frac{a}{x^2}\right) = a.$$

Ainsi, $a = 0$ et donc $P(x) = 0$, soit :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\det(xA + B) = 0$.
