

Corrigés des TD du chapitre 9

Exercice 1

Il est clair que si $k = f'(a)$ alors $c = a$ convient et si $k = f'(b)$, alors $c = b$ convient.

On considère maintenant k tel que $f'(a) < k < f'(b)$.

- Supposons $k = 0$. On a donc $f'(a) < 0 < f'(b)$.

La fonction f est dérivable sur $[a, b]$, donc continue sur $[a, b]$ et comme $[a, b]$ est un segment, f admet un minimum atteint en $c \in [a, b]$.

Mais $f'(a) < 0$ donc $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$. Ceci implique que $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$, soit $f(x) < f(a)$, au voisinage de a^+ donc que le minimum de f n'est pas atteint en a et $c \neq a$.

De même avec $f'(b) > 0$, on prouve que $c \neq b$.

Ainsi, f atteint un minimum en $c \in]a, b[$ donc f' s'annule (et change de signe) en c .

- Supposons k quelconque tel que $f'(a) < k < f'(b)$.

Posons $g(x) = f(x) - kx$.

La fonction g est dérivable sur $[a, b]$ et $g'(x) = f'(x) - k$ donc $g'(a) < 0 < g'(b)$. Ainsi, g vérifie les hypothèses du cas précédent, donc il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$, ce qui revient à $f'(c) = k$.

Finalement, pour tout $k \in [f'(a), f'(b)]$:

Il existe $c \in [a, b]$ tel que $f'(c) = k$.

Exercice 2

1) On a $[x_{n+1}, x_n] \subset]0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc f est de classe C^1 sur $[x_{n+1}, x_n]$ et on peut appliquer le théorème des accroissements finis : il existe $c_n \in]x_{n+1}, x_n[$ tel que $\frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} = f'(c_n)$ et donc :

$$\left| \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} \right| = |f'(c_n)| \leq M.$$

Ceci prouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|f(x_{n+1}) - f(x_n)| \leq M |x_{n+1} - x_n|$$

Soient maintenant $n, p \in \mathbb{N}$. On a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$|f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq M |x_{k+1} - x_k| = M \left| \frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^k} \right| = \frac{M}{2^{k+1}}.$$

Et si $n \geq 1$:

$$|f(x_{n+p}) - f(x_p)| = \left| \sum_{k=p}^{n+p-1} [f(x_{k+1}) - f(x_k)] \right| \leq \sum_{k=p}^{n+p-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \sum_{k=p}^{n+p-1} \frac{M}{2^{k+1}}.$$

Enfin :

$$\sum_{k=p}^{n+p-1} \frac{M}{2^{k+1}} = \frac{M}{2^{p+1}} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{M}{2^p} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{M}{2^p}.$$

En remarquant que la relation voulue est immédiatement vraie quand $n = 0$, on a bien pour tous $n, p \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\left|f(x_{n+p}) - f(x_p)\right| \leq \frac{M}{2^p}}$$

2) En prenant $p = 0$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|f(x_n) - f(x_0)\right| = \left|f(x_n) - f(1)\right| \leq M \Rightarrow f(1) - M \leq f(x_n) \leq f(1) + M.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } (f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée.}}$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sup_{k \geq n} f(x_k)$ est bien défini car $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée et $u_n = \max(f(x_n), u_{n+1})$, donc :

$$u_n \geq u_{n+1}.$$

Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Comme $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'est aussi et donc :

$$\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers une limite finie } L.}$$

4) En intervertissant n et p dans le résultat de la question 1, on a pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, $\left|f(x_{n+p}) - f(x_n)\right| \leq \frac{M}{2^n}$.

On peut récrire cela sous la forme : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout entier $k \geq n$, $\left|f(x_k) - f(x_n)\right| \leq \frac{M}{2^n}$.

En passant au sup sur $k \geq n$, on obtient :

$$\left|\sup_{k \geq n} f(x_k) - f(x_n)\right| \leq \frac{M}{2^n}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\left|u_n - f(x_n)\right| \leq \frac{M}{2^n}}$$

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|L - f(x_n)\right| = \left|L - u_n + u_n - f(x_n)\right| \leq \left|L - u_n\right| + \left|u_n - f(x_n)\right| \leq \left|L - u_n\right| + \frac{M}{2^n}.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left|L - u_n\right| + \frac{M}{2^n}\right) = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L}$$

5) Pour tout $x \in]0,1]$, il existe un unique $N_x \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^{N_x+1}} < x \leq \frac{1}{2^{N_x}} : N_x = E\left(-\frac{\ln x}{\ln 2}\right)$.

De la même façon que dans la question 1, on prouve qu'il existe $c_x \in \left]x, \frac{1}{2^{N_x}}\right]$ tel que :

$$\frac{f(x) - f(x_{N_x})}{x - x_{N_x}} = f'(c_x) \Rightarrow |f(x) - f(x_{N_x})| = |f'(c_x)| |x - x_{N_x}| \leq |f'(c_x)| |x_{N_x+1} - x_{N_x}| \leq \frac{M}{2^{N_x+1}}$$

On a alors :

$$|f(x) - L| \leq |f(x) - f(x_{N_x})| + |f(x_{N_x}) - L| \leq \frac{M}{2^{N_x+1}} + |f(x_{N_x}) - L|.$$

Or, quand $x \rightarrow 0^+$, $N_x \rightarrow +\infty$ donc $f(x_{N_x}) \rightarrow L$ et $\frac{M}{2^{N_x+1}} \rightarrow 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{M}{2^{N_x+1}} + |f(x_{N_x}) - L| \right) = 0$, ce qui à nouveau grâce au théorème des gendarmes, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = L$$

Exercice 3

1) Posons $g(x) = \|f(x)\|^2$. Comme f est deux fois dérivable sur I , g l'est aussi avec pour tout $x \in I$:

$$g'(x) = 2(f'(x) | f(x)) \text{ et } g''(x) = 2\left[\|f'(x)\|^2 + (f''(x) | f(x))\right].$$

Or, $\|f\|$ est constante, donc g aussi et ainsi, $g' = g'' = 0$, donc pour tout $x \in I$:

$$g''(x) = 2\left[\|f'(x)\|^2 + (f''(x) | f(x))\right] = 0 \Rightarrow (f''(x) | f(x)) = -\|f'(x)\|^2 \leq 0.$$

Ainsi :

$$\text{Si } \|f\| \text{ est constante, } (f | f'') \text{ est à valeurs négatives.}$$

Interprétation cinématique :

Si on pose $f(t) = \overrightarrow{OM}$, $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = f'(t)$ est la vitesse et $\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = f''(t)$ est l'accélération du mobile M .

Si $\|f(t)\| = OM = cste$, le mobile a une trajectoire circulaire.

Dans ce cas, on a $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{v} = 0$, le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire circulaire et $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{a} \leq 0$ indique que la composante colinéaire à $\overrightarrow{OM}$ de l'accélération $\vec{a}$ est de sens contraire au vecteur $\overrightarrow{OM}$: cela correspond à la force centripète.

2) Tel qu'indiqué, considérons la fonction $g : x \mapsto \|f(x)\|^2 e^{-2kx}$, définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Comme f est dérivable sur I , $x \mapsto \|f(x)\|^2$ l'est aussi de dérivée $x \mapsto 2(f'(x) | f(x))$. Alors, g est dérivable sur I , avec pour tout $x \in I$:

$$g'(x) = 2(f'(x) | f(x)) e^{-2kx} - 2k \|f(x)\|^2 e^{-2kx} = 2\left((f'(x) | f(x)) - k \|f(x)\|^2\right) e^{-2kx}.$$

Or, on a $\|f'(x)\| \leq k \|f(x)\|$ et grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient :

$$(f'(x) | f(x)) \leq \|f'(x)\| \cdot \|f(x)\| \leq k \|f(x)\|^2 \Rightarrow -k \|f(x)\|^2 \leq (f'(x) | f(x)) \leq k \|f(x)\|^2 \quad (1).$$

Donc, $g'(x) \leq 0$ et g est décroissante sur I .

Si f s'annule en un point $a \in I$, alors $g(a) = \|f(a)\|^2 e^{-2ka} = 0$ et ainsi, pour tout $x \in I$ tel que $x \geq a$, on a $g(x) \leq g(a) = 0$ et comme g est positive, on obtient $g(x) = 0$ et donc :

$$f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in I \text{ tel que } x \geq a.$$

Pour montrer que g est nulle à gauche de a aussi, la double inégalité (1), nous invite à considérer la fonction $h : x \mapsto \|f(x)\|^2 e^{2kx}$, qui comme g , est positive et dérivable sur I , avec pour tout $x \in I$:

$$h'(x) = 2(f'(x) | f(x)) e^{2kx} + 2k \|f(x)\|^2 e^{2kx} = 2((f'(x) | f(x)) + k \|f(x)\|^2) e^{2kx}.$$

Grâce à (1), on a $h'(x) \geq 0$, donc h est croissante sur I et ainsi, pour tout $x \in I$ tel que $x \leq a$, $h(x) \leq h(a) = 0$, ce qui donne $h(x) = 0$ et donc :

$$f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in I \text{ tel que } x \leq a.$$

Finalement, on a $f(x) = 0$ pour tout $x \in I$, et ainsi :

Si la fonction f s'annule en un point de I , alors elle est nulle sur I .

Exercice 4

1) On a $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t} [f(t) - f(kt)] \right) = \ell$ donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall t \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\}, \left\| \frac{1}{t} [f(t) - f(kt)] - \ell \right\| \leq \varepsilon.$$

Or, $k \in]0, 1[$, donc pour tout $i \in \mathbb{N}$, $0 < k^i \leq 1$ (égal à 1 pour $i = 0$) et pour tout $t \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\}$, on a :

$$0 < |t| \leq \alpha \Rightarrow 0 < |k^i t| \leq k^i \alpha \leq \alpha \Rightarrow \left\| \frac{1}{k^i t} [f(k^i t) - f(k^{i+1} t)] - \ell \right\| \leq \varepsilon.$$

Et finalement, on a bien :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall t \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\}, \forall i \in \mathbb{N}, \left\| \frac{1}{k^i t} [f(k^i t) - f(k^{i+1} t)] - \ell \right\| \leq \varepsilon$$

2) Avec les notations de la question précédente, on a pour tout $t \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\}$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\left\| \sum_{i=0}^{p-1} \left(\frac{1}{t} [f(k^i t) - f(k^{i+1} t)] - k^i \ell \right) \right\| \leq \sum_{i=0}^{p-1} \left\| \frac{1}{t} [f(k^i t) - f(k^{i+1} t)] - k^i \ell \right\| \leq \sum_{i=0}^{p-1} \varepsilon k^i = \varepsilon \sum_{i=0}^{p-1} k^i.$$

Or :

$$\sum_{i=0}^{p-1} \left(\frac{1}{t} [f(k^i t) - f(k^{i+1} t)] - k^i \ell \right) = \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{p-1} [f(k^i t) - f(k^{i+1} t)] - \left(\sum_{i=0}^{p-1} k^i \right) \ell = \frac{1}{t} [f(t) - f(k^p t)] - \left(\sum_{i=0}^{p-1} k^i \right) \ell.$$

Avec $\sum_{i=0}^{p-1} k^i = \frac{1-k^p}{1-k}$, on obtient :

$$\left\| \frac{1}{t} [f(t) - f(k^p t)] - \frac{1-k^p}{1-k} \ell \right\| \leq \frac{1-k^p}{1-k} \varepsilon.$$

Or, $\lim_{p \rightarrow +\infty} k^p = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, donc en passant à la limite quand $p \rightarrow +\infty$ dans l'inégalité ci-dessus (qui est vraie quel que soit p), on obtient :

$$\left\| \frac{1}{t} [f(t) - f(0)] - \frac{1}{1-k} \ell \right\| \leq \frac{1}{1-k} \varepsilon.$$

Ainsi, avec $K = \frac{1}{1-k} > 0$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall t \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\}, \left\| \frac{1}{t} [f(t) - f(0)] - \frac{1}{1-k} \ell \right\| \leq K\varepsilon$$

Ceci prouve que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(t) - f(0)] = \frac{1}{1-k} \ell$ et donc que :

$$f \text{ est dérivable en } 0 \text{ avec } f'(0) = \frac{1}{1-k} \ell.$$

Exercice 5

Dans ce qui suit, on munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique, et orienté par sa base canonique, notée $\mathcal{B}_c = (E_1, E_2, \dots, E_n)$ et on appelle u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A .

On note $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ où les x_i sont des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On notera et S l'espace vectoriel de ses solutions de $(S) : X' = AX$.

a. A est une matrice de projection orthogonale sur un plan F (avec $n \geq 3$).

Il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (V_1, V_2, \dots, V_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $F = \text{Vect}(V_1, V_2)$.

Avec $P = P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}} \in O_n(\mathbb{R})$, on a alors :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = D = \text{diag}(1, 1, 0, \dots, 0) = P^T A P \Leftrightarrow A = P D P^T.$$

Si on pose $Y = P^T X = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$, on a :

$$X' = AX \Leftrightarrow X' = P D P^T X \Leftrightarrow P^T X' = D P^T X \Leftrightarrow Y' = D Y \Leftrightarrow \begin{cases} y'_1 = y_1 \\ y'_2 = y_2 \\ y'_k = 0, \forall k \in \llbracket 3, n \rrbracket \end{cases}$$

Et on obtient, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y_1(t) = c_1 e^t \\ y_2(t) = c_2 e^t \\ y_k = c_k, \forall k \in \llbracket 3, n \rrbracket \end{cases}$$

avec $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$.

Avec $X = P Y$, on aboutit à :

$$S = \text{Vect}(t \mapsto e^t V_1, t \mapsto e^t V_2, t \mapsto V_3, \dots, t \mapsto V_n)$$

b. Si A est une nilpotente d'indice n , alors $A^{n-1} \neq 0_n$ (et $A^n = 0_n$), donc il existe $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $A^{n-1}X_0 \neq 0$ et $A^n X_0 = 0$. La famille $\mathcal{B} = (X_0, AX_0, A^2X_0, \dots, A^{n-1}X_0)$ est alors une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et dans cette base $\mathcal{B}$, la matrice de u est alors :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En procédant comme dans la question précédente, avec $P = P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}}$ et $Y = P^{-1}X$, on obtient le système :

$$\begin{cases} y'_1 = 0 \\ y'_k = y_{k-1}, \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket \end{cases}$$

Ceci donne pour tous $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $t \in \mathbb{R}$:

$$y_k(t) = c_1 t^{k-1} + \dots + c_{k-1} t + c_k = \sum_{i=1}^k c_i t^{k-i}$$

avec $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$.

Et, avec $X = PY$, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$X(t) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^k c_i t^{k-i} \right) A^{k-1} X_0 = \sum_{i=1}^n \left(c_i \sum_{k=i}^n t^{k-i} A^{k-1} X_0 \right) = \sum_{i=1}^n \left(c_i \sum_{k=0}^{n-i} t^k A^{k+i-1} X_0 \right).$$

Ce qui nous donne :

$$S_{(H)} = \text{Vect} \left(t \mapsto \sum_{k=0}^{n-i} t^k A^{k+i-1} X_0, i \in \llbracket 1, n \rrbracket \right)$$

Exercice 6

Remarquons que $\vec{v} = (1, 1, 0)$ est orthogonale à $\vec{u}$, donc si $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = 2(-1, 1, 1)$, $(\vec{v}, \vec{w})$ est une base orthogonale de $P = (\vec{u})^\perp$.

Soit $\vec{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ une éventuelle solution de $\vec{f}' \wedge \vec{u} = \vec{f}$. On a alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\vec{f}(t) \in P$ donc :

$$\vec{f}(t) = x(t)\vec{v} + y(t)\vec{w}$$

où x et y sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (car $\vec{f}$ l'est).

Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\vec{f}'(t) \wedge \vec{u} = \vec{f}(t) \Leftrightarrow -x'(t)\vec{w} + 6y'(t)\vec{v} = x(t)\vec{v} + y(t)\vec{w} \Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = \frac{1}{6}x(t) \end{cases}$$

Comme où x et y sont dérivables sur $\mathbb{R}$, x' et y' le sont aussi et en dérivant la première équation, on obtient :

$$x''(t) = -y'(t) = -\frac{1}{6}x(t).$$

Alors, $x(t) = a \cos\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right) + b \sin\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $y(t) = -x'(t) = \frac{a}{\sqrt{6}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right) - \frac{b}{\sqrt{6}} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)$.

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\vec{f}(t) &= \left(a \cos\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right) + b \sin\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right) \right) \vec{v} + \left(\frac{a}{\sqrt{6}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right) - \frac{b}{\sqrt{6}} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right) \right) \vec{w} \\ &= a \left[\cos\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right) \vec{v} + \frac{1}{\sqrt{6}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right) \vec{w} \right] + b \left[\sin\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right) \vec{v} - \frac{1}{\sqrt{6}} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right) \vec{w} \right].\end{aligned}$$

Réciproquement, on montre que les fonctions ci-dessus sont bien solution de l'équation et ainsi :

$$S_{(H)} = \text{Vect} \left(\cos\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right) \vec{v} + \frac{1}{\sqrt{6}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right) \vec{w}, \sin\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right) \vec{v} - \frac{1}{\sqrt{6}} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right) \vec{w} \right) \text{ avec } \vec{v} = (1, 1, 0) \text{ et } \vec{w} = 2(-1, 1, 1).$$

Exercice 7

Supposons que $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ admet deux solutions y_1 et y_2 telles que pour tout $t \in I$, $y_2(t) = t y_1(t)$.

Alors, pour tout $t \in I$:

$$\begin{cases} y_2'(t) = t y_1'(t) + y_1(t) \\ y_2''(t) = t y_1''(t) + 2 y_1'(t) \end{cases}$$

D'où :

$$y_2''(t) + a(t)y_2'(t) + b(t)y_2(t) = t[y_1''(t) + a(t)y_1'(t) + b(t)y_1(t)] + 2y_1'(t) + a(t)y_1(t) = 2y_1'(t) + a(t)y_1(t)$$

Comme $y_2'' + a y_2' + b y_2 = 0$, on obtient :

$$2y_1' + a y_1 = 0.$$

Comme a est de classe C^1 sur I , on peut dériver la relation ci-dessus et on obtient :

$$2y_1'' + a' y_1 + a y_1' = 0.$$

Et, avec $2y_1' + a y_1 = 0$, soit $2y_1' = -a y_1$, et $y_1'' + a y_1' + b y_1 = 0$, on peut écrire :

$$\left. \begin{aligned} 2y_1'' + a' y_1 + a y_1' &= 0 \\ y_1'' + a y_1' + b y_1 &= 0 \\ 2y_1' &= -a y_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a^2 y_1 + 2a' y_1 = 4b y_1.$$

Comme y_1 n'est pas nulle sur I mais y est continue, il existe au moins un intervalle $J \subset I$, non réduit à un point, sur lequel y_1 ne s'annule pas. On obtient alors $a^2 + 2a' = 4b$ sur J .

Finalement, une condition nécessaire sur a et b pour que l'équation $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ admette deux solutions non nulles y_1 et y_2 telles que pour tout $t \in I$, $y_2(t) = t y_1(t)$ est :

$$a^2 + 2a' = 4b \text{ sur tout intervalle inclus dans } I \text{ sur lequel } y_1 \text{ ne s'annule pas.}$$

Supposons que $a^2 + 2a' = 4b$. L'équation se réécrit alors :

$$y'' + a y' + \frac{1}{4}(a^2 + 2a')y = 0.$$

Posons $z = y' + \frac{1}{2}a y$. On a alors (avec $y'' = -a y' - \frac{1}{4}a^2 y - \frac{1}{2}a' y$) :

$$z' = y'' + \frac{1}{2}a y' + \frac{1}{2}a' y = -a y' - \frac{1}{4}a^2 y - \frac{1}{2}a' y + \frac{1}{2}a y' + \frac{1}{2}a' y = -\frac{1}{2}a \left(y' + \frac{1}{2}a y \right) = -\frac{1}{2}a z.$$

Donc z est solution de $z' + \frac{1}{2}az = 0$, soit, si A est une primitive de a sur I :

$$z : t \mapsto Ke^{-\frac{1}{2}A(t)} \text{ avec } K \text{ constante.}$$

Alors, z est solution de $y' + \frac{1}{2}a(t)y = Ke^{-\frac{1}{2}A(t)}$. Les solutions de l'équation sans second membre sont les fonctions $z : t \mapsto Ce^{-\frac{1}{2}A(t)}$ avec C constante.

On cherche une solution particulière de la forme $t \mapsto C(t)e^{-\frac{1}{2}A(t)}$ avec C dérivable sur I . En réinjectant dans l'équation, on obtient $C'(t) = K$ et on peut prendre $C(t) = Kt$.

Ainsi, $t \mapsto e^{-\frac{1}{2}A(t)}$ et $t \mapsto te^{-\frac{1}{2}A(t)}$ sont toutes deux solutions de $y'' + ay' + \frac{1}{4}(a^2 + 2a')y = 0$ et ainsi :

La condition est suffisante.

Soient $(E) : y'' + 2ty' + (t^2 + 1)y = te^{-t^2/2}$ et $(H) : y'' + 2ty' + (t^2 + 1)y = 0$.

Posons $a(t) = 2t$ et $b(t) = t^2 + 1$. Les fonctions a et b sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$a(t)^2 + 2a'(t) - 4b(t) = 4t^2 + 4 - 4t^2 - 4 = 0.$$

La condition ci-dessus est satisfaite. En posant, $A(t) = t^2$, une base de solutions de (H) est :

$$\left(t \mapsto e^{-t^2/2}, t \mapsto te^{-t^2/2} \right).$$

Cherchons une solution particulière de (E) de la forme $t \mapsto g(t)e^{-t^2/2}$ où g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

En réinjectant dans (E) , on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$g''(t)e^{-t^2/2} - 2tg'(t)e^{-t^2/2} - g(t)e^{-t^2/2} + t^2g(t)e^{-t^2/2} + 2tg'(t)e^{-t^2/2} - 2t^2g(t)e^{-t^2/2} + (t^2 + 1)g(t)e^{-t^2/2} = te^{-t^2/2}.$$

Soit :

$$g''(t) = t.$$

On peut prendre $g(t) = \frac{1}{6}t^3$ et une solution particulière est $t \mapsto \frac{1}{6}t^3e^{-t^2/2}$.

Finalement :

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $t \mapsto \left(\frac{1}{6}t^3 + \alpha t + \beta \right) e^{-t^2/2}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 8

Les fonctions h_1 et h_2 étant solutions de (E) sur I , elles sont deux fois dérivables sur cet intervalle, donc

$W = h_1h_2' - h_1'h_2$ est dérivable sur I en tant que différence de telles fonctions et :

$$W' = (h_1h_2' - h_1'h_2)' = h_1'h_2' + h_1h_2'' - h_1'h_2' - h_1''h_2 = h_1h_2'' - h_1''h_2.$$

Or, $h_1'' = -ah_1' - bh_1$ et $h_2'' = -ah_2' - bh_2$, donc :

$$W' = h_1(-ah_2' - bh_2) - (-ah_1' - bh_1)h_2 = -ah_1h_2' - bh_1h_2 + ah_1'h_2 + bh_1h_2 = a(h_1'h_2 - h_1h_2').$$

Soit $W' = -aW$ et donc, W est solution de $y' + ay = 0$. Alors, si A est la primitive de a qui s'annule en $t_0 \in I$, on a pour tout $t \in I$:

$$W(t) = W(t_0)e^{-A(t)}.$$

Ceci prouve immédiatement l'équivalence :

$$(\exists t_0 \in I, W(t_0) \neq 0) \Leftrightarrow (\forall t \in I, W(t) \neq 0)$$

Supposons maintenant que la famille (h_1, h_2) est liée. Alors, si h_1 est nulle, on a $W(t) = 0$ pour tout $t \in I$, et si h_1 n'est pas nulle, alors il existe une constante k telles que $h_2 = kh_1$ et $W = h_1 h_2' - h_1' h_2 = h_1(kh_1') - h_1'(kh_1) = 0$. Ainsi, si (h_1, h_2) est liée, alors $W = 0$.

Supposons enfin que $W = 0$. Si h_1 est nulle, alors (h_1, h_2) est liée.

Si h_1 n'est pas nulle, alors il existe $t_0 \in I$ tel que $h_1(t_0) \neq 0$. Comme h_1 est continue sur I , elle ne s'annule pas au voisinage de t_0 . Soit alors J un intervalle ouvert inclus dans I , contenant t_0 et tel que h_1 ne s'annule pas sur J . On a alors sur J :

$$\frac{W}{h_1^2} = \frac{h_1 h_2' - h_1' h_2}{h_1^2} = \left(\frac{h_2}{h_1} \right)'.$$

Alors, si W est nulle sur I , donc sur J , on a $\left(\frac{h_2}{h_1} \right)' = 0$, donc $\frac{h_2}{h_1}$ est constante sur J , autrement dit, il existe un scalaire k tel que $h_2 = kh_1$ sur J .

Considérons maintenant un point $t_1 \in I$ tel que $h_1(t_1) = 0$ (s'il en existe). Alors, on a $h_1'(t_1) \neq 0$, car sinon h_1 serait nulle comme unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ h_1(t_1) = h_1'(t_1) = 0 \end{cases}$. Comme h_1 est deux fois dérivable sur I , elle y est de classe C^1 et par continuité, h_1' reste de signe constant strict au voisinage de t_1 , donc h_1 est strictement monotone au voisinage de t_1 , donc ne s'annule pas au voisinage de t_1 (mais, par hypothèse ici, s'annule en t_1).

D'après ce qui précède, ceci veut dire que $h_2 = k_+ h_1$ et $h_2 = k_- h_1$ au voisinage de t_1^+ et t_1^- respectivement.

Alors, $h_2' = k_+ h_1'$ et $h_2' = k_- h_1'$ au voisinage de t_1^+ et t_1^- , et comme $h_1'(t_1) \neq 0$ on a par continuité de h_1' et h_2' en t_1 , on obtient $\frac{h_2'(t_1)}{h_1'(t_1)} = k_+ = k_-$. Ainsi, $h_2 = kh_1$ au voisinage de t_1 .

Finalement, ceci permet de conclure qu'il existe un scalaire k tel que $h_2 = kh_1$ sur I et donc que la famille (h_1, h_2) est liée.

Nous venons donc de prouver que :

$$((h_1, h_2) \text{ est liée}) \Leftrightarrow (\forall t \in I, W(t) = 0).$$

Par contraposée :

$$((h_1, h_2) \text{ est libre}) \Leftrightarrow (\exists t_0 \in I, W(t_0) \neq 0)$$

Exercice 9

Posons $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \binom{2n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n} \right| = \frac{\frac{1}{2n+1} \binom{2n+2}{n+1}}{\frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n}} |x| = \frac{2n-1}{2n+1} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} |x| = 2 \frac{2n-1}{n+1} |x| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 4|x|.$$

D'après la règle de d'Alembert, la série converge quand $4|x| < 1$ et diverge quand $4|x| > 1$, donc :

Le rayon de convergence de f est $\frac{1}{4}$.

La série entière f est alors de classe C^∞ sur $I = \left] -\frac{1}{4}; \frac{1}{4} \right[$ et pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \binom{2n}{n} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{2(n+1)}{n+1} (n+1) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \binom{2n}{n} (n+1) x^n = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{2n}{n} x^n \end{aligned}$$

Mais, on peut aussi écrire :

$$2x f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n}{2n-1} \binom{2n}{n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n}{2n-1} \binom{2n}{n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2n-1}\right) \binom{2n}{n} x^n.$$

Comme on vient de voir que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \binom{2n}{n} x^n$ converge, on obtient, avec le résultat précédent :

$$2x f'(x) = f(x) - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{2n}{n} x^n = f(x) - \frac{1}{2} f'(x).$$

Ainsi, pour tout $x \in I$, $(4x+1)f'(x) - 2f(x) = 0$, donc f est solution sur I de :

$$(E): (4x+1)y' - 2y = 0.$$

Pour tout $x \in I$, $4x+1 \neq 0$, donc l'équation se réécrit $y' - \frac{2}{4x+1}y = 0$ et les solutions sont de la forme :

$$x \mapsto K \exp\left(\int^x \frac{2}{4t+1} dt\right) = K \exp\left(\frac{1}{2}(4x+1)\right) = K\sqrt{4x+1}.$$

De plus, avec $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \binom{2n}{n} x^n$, on a $f(0) = \frac{-1}{-1} = 1$, donc, pour tout $x \in \left] -\frac{1}{4}; \frac{1}{4} \right[$:

$f(x) = \sqrt{4x+1}$

A l'aide de la formule de Stirling, on peut écrire :

$$\frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{2n-1} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{1}{4^n} \sim \frac{1}{2n} \frac{\sqrt{4\pi n}}{2\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \left(\frac{e}{n}\right)^{2n} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{2\sqrt{\pi} n^{1.5}}.$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{1.5}}$ converge ($1,5 > 1$), la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}$ est absolument convergente. Ceci implique que la convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \binom{2n}{n} x^n$ est normale sur $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$ et donc que f est définie et continue sur ce segment et, entre autres, en $\frac{1}{4}$. Alors :

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} = \sqrt{4 \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{2}.$$

Par ailleurs, on a vu plus haut que pour tout entier naturel n , on a :

$$\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \binom{2n}{n} = 2 \frac{2n+1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{2(n+1)}{n+1} \frac{1}{4^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{2n+1} 2 \frac{2n+1}{n+1} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^{n+1}} = \frac{1}{2} \frac{(-1)^n}{n+1} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}.$$

Et, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n+1} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} = \sum_{n=0}^N 2 \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{2(n+1)}{n+1} \frac{1}{4^{n+1}} = 2 \sum_{n=1}^{N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} = 2 \sum_{n=0}^{N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} - 2.$$

Comme la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}$ converge, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+1} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}$ converge aussi et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} - 2.$$

Soit finalement :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} = 2(\sqrt{2} - 1)}$$

Exercice 10

1) Comme $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, on a $\alpha \neq 0$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f'(x) + \alpha f(x)] = \ell$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $A_1 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in [A_1, +\infty[$:

$$|f'(x) + \alpha f(x) - \ell| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |e^{\alpha x} f'(x) + \alpha e^{\alpha x} f(x) - \ell e^{\alpha x}| \leq \varepsilon |e^{\alpha x}| = \varepsilon e^{\operatorname{Re}(\alpha)x}.$$

Alors, pour tout $x \in [A, +\infty[$:

$$\left| \int_{A_1}^x (e^{\alpha t} f'(t) + \alpha e^{\alpha t} f(t) - \ell e^{\alpha t}) dt \right| \leq \int_{A_1}^x |e^{\alpha t} f'(t) + \alpha e^{\alpha t} f(t) - \ell e^{\alpha t}| dt \leq \int_{A_1}^x \varepsilon e^{\operatorname{Re}(\alpha)t} dt.$$

Soit :

$$\left| e^{\alpha x} f(x) - \frac{\ell}{\alpha} e^{\alpha x} - e^{\alpha A_1} f(A) + \frac{\ell}{\alpha} e^{\alpha A_1} \right| \leq \varepsilon \frac{e^{\operatorname{Re}(\alpha)x} - e^{\operatorname{Re}(\alpha)A_1}}{\operatorname{Re}(\alpha)} \leq \frac{\varepsilon}{\operatorname{Re}(\alpha)} e^{\operatorname{Re}(\alpha)x}.$$

Ceci implique que :

$$\left| f(x) - \frac{\ell}{\alpha} - B e^{-\alpha x} \right| \leq \frac{\varepsilon}{\operatorname{Re}(\alpha)}$$

avec $B = e^{\alpha A_1} \left(f(A_1) - \frac{\ell}{\alpha} \right)$.

Alors, pour tout $x \in [A_1, +\infty[$:

$$\left| f(x) - \frac{\ell}{\alpha} \right| = \left| f(x) - \frac{\ell}{\alpha} - B e^{-\alpha x} + B e^{-\alpha x} \right| \leq \left| f(x) - \frac{\ell}{\alpha} - B e^{-\alpha x} \right| \leq \frac{\varepsilon}{\operatorname{Re}(\alpha)} + |B| e^{-\operatorname{Re}(\alpha)x}.$$

Or, comme $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} |B| e^{-\operatorname{Re}(\alpha)x} = 0$ et donc, il existe $A_2 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in [A_2, +\infty[$:

$$|B| e^{-\operatorname{Re}(\alpha)x} \leq \frac{\varepsilon}{\operatorname{Re}(\alpha)}.$$

Finalement, en posant $A = \max(A_1, A_2)$, on a pour tout $x \in [A, +\infty[$:

$$\left| f(x) - \frac{\ell}{\alpha} \right| \leq \frac{2\varepsilon}{\operatorname{Re}(\alpha)}.$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\ell}{\alpha}}$$

2) Cherchons $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $f'' + f' + f = (f' + af)' + b(f' + af)$.

Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, on a $(f' + af)' + b(f' + af) = f'' + (a+b)f' + abf$, donc pour $a+b = ab = 1$, on a la relation voulue.

Or, si a et b vérifient $a+b = ab = 1$, ils sont racines de $X^2 - X + 1$, donc valent $\alpha = e^{i\pi/3}$ ou $\bar{\alpha} = e^{-i\pi/3}$.

On a alors :

$$f'' + f' + f = (f' + \alpha f)' + \bar{\alpha}(f' + \alpha f).$$

Et, comme $\operatorname{Re}(\alpha) = \operatorname{Re}(\bar{\alpha}) = \frac{1}{2} > 0$, on peut appliquer deux fois la question précédente :

$$\lim_{+\infty} [f'' + f' + f] = \lim_{+\infty} [(f' + \alpha f)' + \bar{\alpha}(f' + \alpha f)] = 0 \Rightarrow \lim_{+\infty} (f' + \alpha f)' = \frac{0}{\bar{\alpha}} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f = \frac{0}{\alpha} = 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$$

3) Nous allons faire une preuve par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ en utilisant le même principe que ci-dessus.

- Pour $n=1$, soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\lim_{+\infty} [f' + \alpha f] = 0$ où toutes les racines de $P = X + \alpha \in \mathbb{C}[X]$ ont une partie réelle strictement négative, autrement dit ici : $\operatorname{Re}(-\alpha) < 0$, soit $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$.

D'après la question 1, on a immédiatement $\lim_{+\infty} f = 0$: la propriété est vraie au rang $n=1$.

- On suppose la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in C^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\lim_{+\infty} [f^{(n+1)} + \alpha_n f^{(n)} + \alpha_{n-1} f^{(n-1)} + \dots + \alpha_1 f' + \alpha_0 f] = 0$ où les α_k sont des nombres complexes tels que toutes les racines de $P = X^{n+1} + \alpha_n X^n + \dots + \alpha_1 X + \alpha_0$ ont une partie réelle strictement négative.

Soit $-\alpha$ une racine de P . On a alors $\operatorname{Re}(-\alpha) < 0$, donc $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ et :

$$\begin{aligned} P &= (X + \alpha)(X^n + \beta_{n-1}X^{n-1} + \dots + \beta_1X + \beta_0) \\ &= X^{n+1} + (\alpha + \beta_{n-1})X^n + (\alpha\beta_{n-1} + \beta_{n-2})X^{n-1} + \dots + (\alpha\beta_1 + \beta_0)X + \alpha\beta_0 \\ &= X^{n+1} + \alpha_n X^n + \dots + \alpha_1 X + \alpha_0 \end{aligned}$$

Et toutes les racines de $X^n + \beta_{n-1}X^{n-1} + \dots + \beta_1X + \beta_0$ sont des racines de P , donc ont une partie réelle strictement négative.

Posons $g = f^{(n)} + \beta_{n-1}f^{(n-1)} + \dots + \beta_1f' + \beta_0f$. On a alors :

$$\begin{aligned} g' + \alpha g &= f^{(n+1)} + \beta_{n-1}f^{(n)} + \dots + \beta_1f'' + \beta_0f' + \alpha f^{(n)} + \alpha\beta_{n-1}f^{(n-1)} + \dots + \alpha\beta_1f' + \alpha\beta_0f \\ &= f^{(n+1)} + (\beta_{n-1} + \alpha)f^{(n)} + (\beta_{n-2} + \alpha\beta_{n-1})f^{(n-1)} + \dots + (\beta_1 + \alpha\beta_2)f'' + (\beta_0 + \alpha\beta_1)f' + \alpha\beta_0f \\ &= f^{(n+1)} + \alpha_n f^{(n)} + \alpha_{n-1}f^{(n-1)} + \dots + \alpha_1f' + \alpha_0f \end{aligned}$$

Donc, $\lim_{+\infty} [g' + \alpha g] = 0$ et comme $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, on a $\lim_{+\infty} g = 0$ d'après la question 1.

Ainsi, $\lim_{+\infty} [f^{(n)} + \beta_{n-1}f^{(n-1)} + \dots + \beta_1f' + \beta_0f] = 0$ et toutes les racines de $X^n + \beta_{n-1}X^{n-1} + \dots + \beta_1X + \beta_0$ ont une partie réelle strictement négative, donc d'après l'hypothèse de récurrence, on a $\lim_{+\infty} f = 0$: la propriété est vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi, si f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) telle que $\lim_{+\infty} [f^{(n)} + \alpha_{n-1}f^{(n-1)} + \dots + \alpha_1f' + \alpha_0f] = 0$ où les racines de $P = X^n + \alpha_{n-1}X^{n-1} + \dots + \alpha_1X + \alpha_0 \in \mathbb{C}[X]$ ont toutes une partie réelle strictement négative, alors :

$$\lim_{+\infty} f = 0$$

Exercice 11

1) Remarquons préalablement que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a $\left| t \cos\left(\frac{\alpha}{t}\right) \right| \leq |t|$ et $\left| t \sin\left(\frac{\alpha}{t}\right) \right| \leq |t|$, donc :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[t \cos\left(\frac{\alpha}{t}\right) \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \left[t \sin\left(\frac{\alpha}{t}\right) \right] = 0.$$

La fonction $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(a, 0), a \in \mathbb{R}\}$ en tant que produit de

telles fonctions avec pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \cos\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \sin\left(\frac{x}{y}\right) - x \cos\left(\frac{x}{y}\right).$$

Soit $a \in \mathbb{R}$.

- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, 0) - f(a, 0)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} 0 = 0$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(a, 0)$ existe et vaut 0.
- $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(a, y) - f(a, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \left[y \sin\left(\frac{a}{y}\right) \right] = 0$, donc $\frac{\partial f}{\partial y}(a, 0)$ existe et vaut 0.

Ainsi, f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

A l'aide de ce que l'on vu en introduction, on a :

- $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, 0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(a, 0)$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(a, 0)$;
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, 0)} 2y \sin\left(\frac{x}{y}\right) = 0$, mais $x \cos\left(\frac{x}{y}\right)$ n'admet pas de limite quand $(x, y) \rightarrow (a, 0)$, donc $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'admet pas de limite quand $(x, y) \rightarrow (a, 0)$.

Ainsi, f n'est pas de classe C^1 en $(a, 0)$ quand $a \in \mathbb{R}^*$.

Par contre, $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} y \cos\left(\frac{x}{y}\right) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 2y \sin\left(\frac{x}{y}\right) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} x \cos\left(\frac{x}{y}\right) = 0$, donc :

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \quad \text{et} \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).$$

Ainsi, f est de classe C^1 en $(0, 0)$.

Finalement :

f est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \cup \{(0, 0)\}$, mais pas plus.

Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ existe, c'est la dérivée de $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0)$ en 0. Or, la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0)$ n'est pas définie, donc :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \text{ n'existe pas.}$$

Si $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ existe, c'est la dérivée de $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = y$ en 0, soit 1. Donc :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \text{ existe et vaut 1.}$$

2) La fonction sh étant une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\text{sh } x - \text{sh } y = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ où Δ est la première bissectrice (d'équation $x = y$) en tant que quotient de telles fonctions.

De plus, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$:

$$f(x, y) = \frac{\sin x - \sin y}{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y} = \frac{2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{2 \operatorname{ch}\left(\frac{x+y}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{x-y}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{x+y}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{x-y}{2}\right)} = \phi\left(\frac{x+y}{2}\right) \varphi\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

avec $\phi(t) = \frac{\cos t}{\operatorname{ch} t}$ et $\varphi(t) = \frac{\sin t}{\operatorname{sh} t}$.

Remarquons que les fonctions ϕ et φ sont toutes deux des fonctions d'une seule variable réelle et on a :

- Les fonctions $(x, y) \mapsto \frac{x+y}{2}$ et $(x, y) \mapsto \frac{x-y}{2}$ sont polynomiales, donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
- La fonction ϕ est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (la fonction ch ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$).
- La fonction φ est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ (la fonction sh ne s'annulant qu'en 0).

De plus, en 0, on a $\varphi(t) \underset{0}{\sim} 1$ donc φ est prolongeable par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 1$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $\varphi'(t) = \frac{\cos t \operatorname{sh} t - \sin t \operatorname{ch} t}{\operatorname{sh}^2 t}$ et, au voisinage de 0, on a $\varphi'(t) = \frac{o(t^2)}{t^2 + o(t^2)} = \frac{o(1)}{1 + o(1)}$, donc

φ' admet une limite finie en 0 (qui est 0) et le prolongement de φ est de classe C^1 en 0, donc sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, par composition, $(x, y) \mapsto \phi\left(\frac{x+y}{2}\right)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et $(x, y) \mapsto \varphi\left(\frac{x-y}{2}\right)$ est prolongeable en une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et finalement :

La fonction f admet un prolongement de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 12

1) Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$, on a :

$$f(P) = \int_0^1 P^2 = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n a_k t^k \right)^2 dt = \int_0^1 \left(\sum_{0 \leq i, j \leq n} a_i a_j t^{i+j} \right) dt = \sum_{0 \leq i, j \leq n} a_i a_j \int_0^1 t^{i+j} dt = \sum_{0 \leq i, j \leq n} \frac{1}{i+j+1} a_i a_j.$$

Ainsi, f est polynômiale sur $\mathbb{R}_n[X]$ donc :

f est différentiable sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a :

$$f(P) = \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq n \\ i, j \neq k}} \frac{1}{i+j+1} a_i a_j + 2 \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{1}{i+k+1} a_i a_k + \frac{1}{2k+1} a_k^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial a_k}(P) = \sum_{i=0}^n \frac{2}{i+k+1} a_i.$$

Donc, pour tout $H = \sum_{k=0}^n h_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$, $df(P) \cdot H = \sum_{j=0}^p \left(h_j \sum_{i=0}^n \frac{2}{i+j+1} a_i \right)$, soit :

$$df(P) \cdot H = \sum_{0 \leq i, j \leq n} \frac{2 a_i h_j}{i+j+1}$$

Autre version (plus chic !) :

Munissons $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $(P|Q) = \int_0^1 PQ$ (on peut choisir le produit scalaire que l'on veut car $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie). On a alors $f(P) = \int_0^1 P^2 = \|P\|^2$ et pour tous $P, H \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$f(P+H) = \|P+H\|^2 = \|P\|^2 + 2(P|H) + \|H\|^2 = f(P) + 2(P|H) + o_{H \rightarrow 0}(\|H\|).$$

Ceci prouve que :

$$df(P) \cdot H = 2(P|H) = 2 \int_0^1 PH$$

Remarquons qu'avec $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $H = \sum_{k=0}^n h_k X^k$, on a $2 \int_0^1 PH = \sum_{0 \leq i, j \leq n} \frac{2a_i h_j}{i+j+1}$.

2) Remarquons que $A \mapsto \det A$ est polynômiale en les coefficients de A , donc continue. Alors, $\det^{-1}(\{0\})$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (car $\{0\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$), donc $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \det^{-1}(\{0\})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in GL_n(\mathbb{R})$ et $\chi_A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$.

Comme A est inversible, 0 n'est pas valeur propre de A , donc $\chi_A(0) = a_0 \neq 0$. Or, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\chi_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I_n = 0_n$, donc :

$$-\frac{1}{a_0}(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_1I_n)A = I_n \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_1I_n).$$

Or, $\chi_A = \det(XI_n - A)$, donc les a_k sont polynômiaux en les coefficients de A . Comme les coefficients des puissances de A , sont aussi polynômiaux en les coefficients de A , les coefficients de A^{-1} sont polynômiaux en les coefficients de A .

Enfin, les fonctions polynômiales sont différentiables sur leur ensemble de définition, donc :

$$f \text{ est différentiable sur son ensemble de définition.}$$

Pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $A + tE_{i,j} \in GL_n(\mathbb{R})$ pour t réel proche de 0 (car $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert) et :

$$\frac{1}{t} [f(A + tE_{i,j}) - f(A)] = \frac{1}{t} [(A + tE_{i,j})^{-1} - A^{-1}] = \frac{1}{t} (A + tE_{i,j})^{-1} (I_n - (A + tE_{i,j})A^{-1}) = -(A + tE_{i,j})^{-1} E_{i,j} A^{-1}.$$

Alors, $\frac{\partial f}{\partial a_{i,j}}(A) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t} [f(A + tE_{i,j}) - f(A)] \right) = -A^{-1} E_{i,j} A^{-1}$ et donc pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$df(A)(E_{i,j}) = -A^{-1} E_{i,j} A^{-1}.$$

Et ainsi :

$$df(A) : M \mapsto -A^{-1} M A^{-1}$$

Exercice 13

Comme φ admet un maximum local en $(u(a), v(b))$, il existe une boule ouverte B , de centre $(u(a), v(b))$ et de rayon $r > 0$, telle que :

$$\forall (X, Y) \in B, \varphi(X, Y) \leq \varphi(u(a), v(b)).$$

Par ailleurs, u et v sont continues respectivement en a et b donc $(x, y) \mapsto (u(x), v(y))$ est continue en (a, b) .

Ceci implique qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in B((a, b), \alpha)$:

$$(u(x), v(y)) \in B.$$

Alors, pour tout $(x, y) \in B((a, b), \alpha)$, on a :

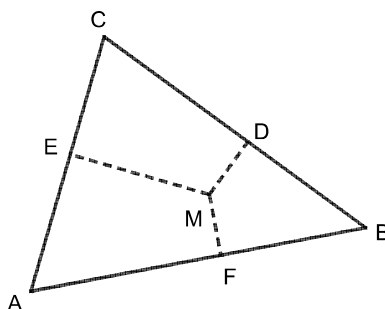
$$f(x, y) = \varphi(u(x), v(y)) \leq \varphi(u(a), v(b)).$$

Ceci montre que :

$f \text{ admet un maximum local en } (a, b).$

Exercice 14

Faisons un schéma. On note D , E et F les projetés orthogonaux de M sur (BC) , (AC) et (AB) respectivement.



On cherche le maximum de $MD \times ME \times MF$.

Appelons S l'aire du triangle ABC . On a :

$$S = S_{MBC} + S_{MAC} + S_{MAB} = \frac{1}{2}(MD \times BC + ME \times AC + MF \times AB).$$

Posons $x = MD$ et $y = ME$. On a alors $x, y \in \mathbb{R}_+$ et $MF = \frac{2S - MD \times BC - ME \times AC}{AB}$, donc :

$$MD \times ME \times MF = \frac{MD \times ME \times (2S - MD \times BC - ME \times AC)}{AB}.$$

Et $MD \times ME \times MF$ est maximal quand $MD \times ME \times (2S - MD \times BC - ME \times AC)$ l'est.

Posons $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ et :

$$f(x, y) = MD \times ME \times (2S - MD \times BC - ME \times AC) = xy(2S - ax - by) = 2Sxy - ax^2y - bxy^2.$$

La fonction f est polynômiale donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2Sy - 2axy - by^2 = y(2S - 2ax - by) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2Sx - ax^2 - 2bxy = x(2S - ax - 2by) \end{aligned}$$

On a alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y(2S - 2ax - by) = 0 \\ x(2S - ax - 2by) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ ou } 2ax + by = 2S \\ x = 0 \text{ ou } ax + 2by = 2S \end{cases}$$

Si $x = 0$ ou $y = 0$, alors $f(x, y) = 0$ donc f est minimale (car $f(x, y)$ est toujours positif : c'est un produit de distances). On s'intéresse donc à l'unique point critique (x, y) tel que $x \neq 0$ et $y \neq 0$, qui est donnée par :

$$\begin{cases} 2ax + by = 2S \\ ax + 2by = 2S \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{2S}{3a}, \frac{2S}{3b} \right).$$

Alors :

$$f\left(\frac{2S}{3a}, \frac{2S}{3b}\right) = \frac{8S^3}{27ab}.$$

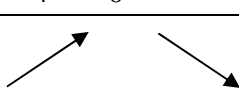
Or, on peut écrire pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$:

$$f(x, y) = 2Sxy - ax^2y - bxy^2 = \frac{y(by - 2S)^2}{4a} - ay\left(x + \frac{by - 2S}{2a}\right)^2 \leq \frac{y(by - 2S)^2}{4a} = \frac{1}{4a} g(y).$$

Remarquons que comme M reste à l'intérieur du triangle ABC , $y = ME$ reste inférieur à la longueur h de la hauteur issue de B . Or, $S = \frac{h \times AC}{2} = \frac{hb}{2}$, donc $h = \frac{2S}{b}$. Ainsi, $y \in \left[0, \frac{2S}{b}\right]$.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec $g'(y) = (by - 2S)^2 + 2by(by - 2S) = (3by - 2S)(by - 2S)$.

On a alors le tableau :

y	0	$\frac{2S}{3b}$	$\frac{2S}{b}$
$g'(y)$	+	0	-
g			

Ainsi, g est maximale quand $y = \frac{2S}{3b}$ et donc, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ avec $y \in \left[0, \frac{2S}{b}\right]$, on a :

$$f(x, y) \leq \frac{1}{4a} g(y) \leq \frac{1}{4a} g\left(\frac{2S}{3b}\right) = \frac{8S^3}{27ab}.$$

Finalement, $\frac{8S^3}{27ab}$ est le maximum de f atteint quand $x = MD = \frac{2S}{3a}$ et $y = ME = \frac{2S}{3b}$, et dans ce cas, avec $c = AB$, on obtient :

$$MF = \frac{2S - MD \times BC - ME \times AC}{AB} = \frac{2S}{3c}.$$

Ainsi :

Le maximum du produit des distances d'un point M intérieur à un triangle ABC aux cotés de ce triangle est $\frac{8S^3}{27AB \times BC \times CA}$, atteint quand $d(M, (BC)) = \frac{2S}{3BC}$, $d(M, (AC)) = \frac{2S}{3AC}$ et $d(M, (AB)) = \frac{2S}{3AB}$.

Remarquons que le point M ci-dessus est le centre de gravité G de ABC .

En effet, si, comme plus haut, D est le projeté orthogonal de G sur (BC) , on a $S_{GBC} = \frac{BC \times GD}{2}$, donc :

$$GD = \frac{2S_{GBC}}{BC}.$$

Or, si $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe du plan, on a :

$$2S_{GBC} = \left| \left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BG} \right] \right| = \left| \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BG}) \right| = \left| \det_{\mathcal{B}} \left(\overrightarrow{BC}, \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) \right) \right| = \left| \det_{\mathcal{B}} \left(\overrightarrow{BC}, \frac{1}{3} \overrightarrow{BA} \right) \right| = \frac{1}{3} \left| \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \right| = \frac{1}{3} 2S.$$

Donc :

$$GD = d(G, (BC)) = \frac{2S}{3BC}.$$

Et on a de même, $d(G, (AC)) = \frac{2S}{3AC}$ et $d(G, (AB)) = \frac{2S}{3AB}$.

Exercice 15

1) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n : t \mapsto \frac{e^{-nt}}{n^2}$ et $g = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ (car proportionnelle à une fonction exponentielle) et, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$0 < g_n(t) \leq \frac{1}{n^2}.$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, la série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement (donc uniformément et simplement) sur $\mathbb{R}_+$, et ainsi, $g = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ est bien définie et même continue sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, $\lim_{t \rightarrow +\infty} g_n(t) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La convergence normale de $\sum g_n$ sur $\mathbb{R}_+$ permet alors de conclure que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{t \rightarrow +\infty} g_n(t) = 0.$$

Enfin, pour tout réel $a > 0$, tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [a, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} |g_n'(t)| &= \left| -n \frac{e^{-nt}}{n^2} \right| = \frac{e^{-nt}}{n} \leq e^{-na} \\ |g_n''(t)| &= \left| n^2 \frac{e^{-nt}}{n^2} \right| = e^{-nt} \leq e^{-na} \end{aligned}$$

Comme la série géométrique $\sum e^{-na}$ converge car $e^{-a} \in]0, 1[$, les séries de fonctions $\sum g_n'$ et $\sum g_n''$ converge normalement (donc uniformément) sur $[a, +\infty[$, donc g est de classe C^2 sur $[a, +\infty[$.

Ceci étant vrai pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$, avec pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$g'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n'(t) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{n} < 0$$

$$g''(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n''(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt} = \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}$$

Ainsi, g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc sur $\mathbb{R}_+$ (car continue en 0).

Finalement, la fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement décroissante de $g(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ à $\lim_{+\infty} g = 0$,

donc d'après le théorème de la bijection continue, g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\left]0, \frac{\pi^2}{6}\right]$ et ainsi :

$$g(\mathbb{R}_+) = \left]0, \frac{\pi^2}{6}\right].$$

Or, quand (x, y) décrit $\mathbb{R}^2$, $x^2 + y^2$ décrit $\mathbb{R}_+$, donc $f(\mathbb{R}^2) = g(\mathbb{R}_+)$, soit :

$$\boxed{f(\mathbb{R}^2) = \left]0, \frac{\pi^2}{6}\right]}$$

2) On a vu que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$g''(t) = \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}.$$

Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$g'(t) = \ln(1-e^{-t}) + k \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

Or, sur $[1, +\infty[$, $g' = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n'$ et la convergence est uniforme. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} g_n'(t) = 0$, on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g'(t) = 0.$$

Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(1-e^{-t}) = 0$, on obtient $k = 0$ et donc pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(t) = \ln(1-e^{-t})$.

Alors, pour tous $\varepsilon, t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$g(t) = g(\varepsilon) + \int_{\varepsilon}^t g'(u) du = g(\varepsilon) + \int_{\varepsilon}^t \ln(1-e^{-u}) du.$$

Enfin :

$$\ln(1-e^{-u}) = \ln\left(1 - \left[1 - u + o_0(u)\right]\right) = \ln\left(u + o_0(u)\right) = \ln u + \ln\left(1 + o_0(1)\right) = \ln u + o_0(\ln u).$$

Comme $u \mapsto \ln u$ est de signe constant au voisinage de 0 et intégrable en 0, $\int_0^t \ln(1-e^{-u}) du$ converge et comme g est continue en 0, on peut écrire :

$$g(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[g(\varepsilon) + \int_{\varepsilon}^t \ln(1-e^{-u}) du \right] = g(0) + \int_0^t \ln(1-e^{-u}) du.$$

Soit, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{g(t) = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^t \ln(1-e^{-u}) du}$$

3) La fonction f est la composée de $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ par g , qui comme on vient de le voir est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, la fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est de classe C^1 (car polynomiale) sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et à images dans $\mathbb{R}_+^*$. Alors, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (composée de fonctions C^1) avec pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x g'(x^2 + y^2) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2y g'(x^2 + y^2)\end{aligned}$$

Comme g' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$ (on a vu que $g' < 0$), f n'admet pas de point critique dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, donc pas d'extremum (local ou global) sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Par contre, on a vu que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $g(t) \leq g(0) = \frac{\pi^2}{6}$, donc pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x, y) \leq f(0, 0) = g(0) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ainsi :

La fonction f n'a pas de minimum, mais admet un maximum global, $\frac{\pi^2}{6}$, atteint uniquement en $(0, 0)$.

Exercice 16

Soit $\vec{f}$ une éventuelle solution du problème. On a :

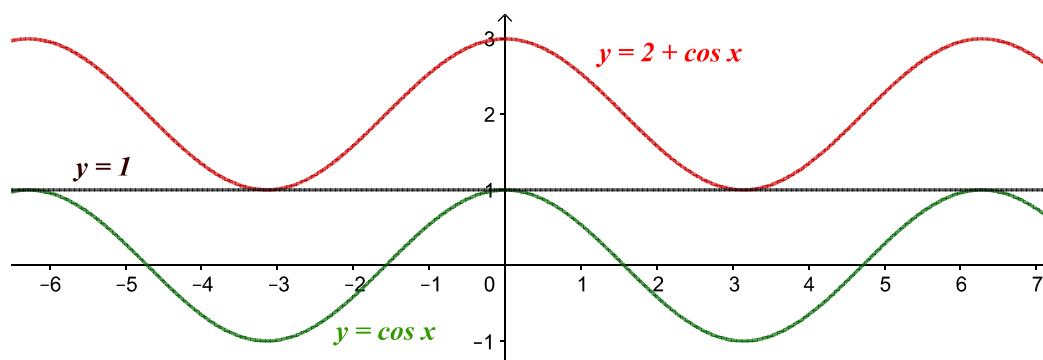
$$\begin{cases} \|\vec{f}\| \leq 2 \\ \vec{f} \cdot \vec{f}' \geq \sin \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \frac{1}{2} \|\vec{f}\|^2 \leq 2 \\ \left(\frac{1}{2} \|\vec{f}\|^2 \right)' \geq \sin \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \leq \frac{1}{2} \|\vec{f}\|^2 + \cos \leq 2 + \cos \\ \left(\frac{1}{2} \|\vec{f}\|^2 + \cos \right)' \geq 0 \end{cases}$$

Posons alors $g = \frac{1}{2} \|\vec{f}\|^2 + \cos = \frac{1}{2} \vec{f} \cdot \vec{f} + \cos$.

La fonction g est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et, comme $\vec{f}$ et $\cos$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, g l'est aussi et vérifie :

$$\cos \leq g \leq 2 + \cos \quad \text{et} \quad g' \geq 0.$$

La deuxième condition implique que g est croissante sur $\mathbb{R}$ et la première condition traduit le fait que la courbe de g est comprise entre les courbes de $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto 2 + \cos x$, représentées ci-dessous (ainsi que la droite horizontale d'équation $y = 1$).



Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $g(x_0) > 1$. Alors, comme g est croissante sur $\mathbb{R}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ tel que $(2k+1)\pi \geq x_0$, on a $g((2k+1)\pi) \geq g(x_0) > 1$. Or, $g((2k+1)\pi) \leq 2 + \cos((2k+1)\pi) = 1$, ce qui est absurde.

Ainsi, on a $g(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Supposons maintenant qu'il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $g(x_1) < 1$. Toujours grâce à la croissance de g , on a $g(2k\pi) \leq g(x_1) < 1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2k\pi \leq x_1$. Or, $g(2k\pi) \geq \cos(2k\pi) = 1$, ce qui est absurde.

Ainsi, on a $g(x) \geq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Finalement, on obtient $g(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, si $\vec{f}$ est solution du problème, on a :

$$\frac{1}{2} \|\vec{f}\|^2 + \cos = 1 \Leftrightarrow \|\vec{f}\|^2 = 2(1 - \cos).$$

Réciproquement, on vérifie facilement que toute fonction $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ telle que $\|\vec{f}\|^2 = 2(1 - \cos)$ vérifie bien $\|\vec{f}\| \leq 2$ et $\vec{f} \cdot \vec{f}' \geq \sin$, et finalement :

Toute fonction $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ telle que $\|\vec{f}\|^2 = 2(1 - \cos)$ est solution du problème.

Exercice 17

1) L'équation (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Les solutions de l'équation homogène associée (H) : $x^2 y' + y = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto k e^{\frac{1}{x}}$ avec $k \in \mathbb{R}$. On cherche alors une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ de la forme $x \mapsto k(x) e^{\frac{1}{x}}$ avec k dérivable.

En remplaçant dans l'équation (E), on obtient : $k'(x) e^{\frac{1}{x}} = 1$, donc $k'(x) = e^{-\frac{1}{x}}$.

En remarquant que $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} e^{-u} = 0$, on peut prolonger $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ par continuité en 0 et donc poser :

$$k(x) = \int_0^x e^{-\frac{1}{t}} dt.$$

Une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est alors $x \mapsto e^{\frac{1}{x}} \int_0^x e^{-\frac{1}{t}} dt$ et :

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $x \mapsto e^{\frac{1}{x}} \int_0^x e^{-\frac{1}{t}} dt + k e^{\frac{1}{x}}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Remarquons déjà que $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty$.

De plus, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $\varepsilon \in]0, x]$:

$$\forall t \in [\varepsilon, x], \quad 0 < \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{t}} \leq \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}}.$$

Donc :

$$0 < \frac{1}{x^2} \int_{\varepsilon}^x e^{-\frac{1}{t}} dt \leq \int_{\varepsilon}^x \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} dt = \left[e^{-\frac{1}{t}} \right]_{\varepsilon}^x = e^{-\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \leq e^{-\frac{1}{x}}.$$

Ceci donne :

$$0 < \int_{\varepsilon}^x e^{-\frac{1}{t}} dt \leq x^2 e^{-\frac{1}{x}}.$$

Et en faisant tendre ε vers 0, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$0 < \int_0^x e^{-\frac{1}{t}} dt \leq x^2 e^{-\frac{1}{x}} \Leftrightarrow 0 < e^{\frac{1}{x}} \int_0^x e^{-\frac{1}{t}} dt \leq x^2.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} \int_0^x e^{-\frac{1}{t}} dt = 0.$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^{\frac{1}{x}} \int_0^x e^{-\frac{1}{t}} dt + k e^{\frac{1}{x}} \right) = \text{sgn}(k) \infty$ donc :

La fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{x}} \int_0^x e^{-\frac{1}{t}} dt$ est l'unique solution qui converge en 0.

2) Supposons qu'il existe une solution f de (E) développable en série entière au voisinage de 0, de rayon de convergence $R > 0$. Il existe alors une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in]-R; R[$, $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et :

$$\begin{aligned} x^2 f'(x) + f(x) &= x^2 &\Leftrightarrow & x^2 \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} + \sum_{n \geq 0} a_n x^n = x^2 \\ &\Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n+1} + a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n x^n = x^2 \\ &\Leftrightarrow a_0 + \sum_{n \geq 0} n a_n x^{n+1} + \sum_{n \geq 0} a_{n+1} x^{n+1} = x^2 \\ &\Leftrightarrow a_0 + \sum_{n \geq 0} (n a_n + a_{n+1}) x^{n+1} = x^2 \end{aligned}$$

Soit, par unicité du développement en série entière :

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 0 \\ a_1 + a_2 = 1 \\ \forall n \geq 3, n a_n + a_{n+1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \\ \forall n \geq 3, a_{n+1} = -n a_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = a_1 = 0 \\ \forall n \geq 2, a_n = (-1)^n (n-1)! \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $x \in]-R; R[$:

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n (n-1)! x^n.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\left| (-1)^n (n-1)! x^n \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc la série $\sum (-1)^n (n-1)! x^n$ diverge grossièrement et $R = 0$, ce qui contredit notre hypothèse.

Ainsi :

Il n'existe pas de solution de (E) développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 18

1) Posons pour tout $x \in [a, b]$:

$$G(x) = \int_a^x \varphi(t)g(t)dt \quad \text{et} \quad \Phi(x) = \int_a^x \varphi(t)dt.$$

Les fonctions G et Φ sont toutes les deux de classe C^1 sur $[a, b]$ car φ et g sont continues.

Comme φ est positive sur $[a, b]$, on a pour tout $x \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} g(x) \leq c + \int_a^x \varphi(t)g(t)dt &\Leftrightarrow \varphi(x)e^{-\Phi(x)}g(x) \leq c\varphi(x)e^{-\Phi(x)} + \varphi(x)e^{-\Phi(x)}\int_a^x \varphi(t)g(t)dt \\ &\Leftrightarrow e^{-\Phi(x)}G'(x) \leq c\Phi'(x)e^{-\Phi(x)} + \Phi'(x)e^{-\Phi(x)}G(x) \\ &\Leftrightarrow e^{-\Phi(x)}G'(x) - \Phi'(x)e^{-\Phi(x)}G(x) \leq c\Phi'(x)e^{-\Phi(x)} \end{aligned}$$

Alors, par croissance de l'intégrale, on obtient pour tout $x \in [a, b]$:

$$\int_a^x [e^{-\Phi(t)}G'(t) - \Phi'(t)e^{-\Phi(t)}G(t)]dt \leq \int_a^x c\Phi'(t)e^{-\Phi(t)}dt \Leftrightarrow [e^{-\Phi(t)}G(t)]_a^x \leq [-ce^{-\Phi(t)}]_a^x.$$

Avec $G(a) = \Phi(a) = 0$, on obtient pour tout $x \in [a, b]$:

$$e^{-\Phi(x)}G(x) \leq c - ce^{-\Phi(x)} \Leftrightarrow c + G(x) \leq ce^{\Phi(x)}.$$

Or, $g(x) \leq c + \int_a^x \varphi(t)g(t)dt = c + G(x)$, donc $g(x) \leq c + G(x) \leq ce^{\Phi(x)}$, ce qui donne pour tout $x \in [a, b]$:

$$g(x) \leq ce^{\int_a^x \varphi(t)dt}$$

2) Soit f une solution de $y'' + qy = 0$ sur $\mathbb{R}_+$ (f est donc au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$). Alors :

$$f'' + qf = 0 \Leftrightarrow f'' = -qf \Rightarrow 2f''f' = -qf'f \Leftrightarrow ((f')^2)' = -q(f^2)'.$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\int_0^x ((f')^2)' = - \int_0^x q(f^2)' \Leftrightarrow (f'(x))^2 - (f'(0))^2 = - \int_0^x q(f^2)'.$$

Comme f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$, elle y est de classe C^1 , donc f^2 aussi. Alors, comme par hypothèse, q est de classe C^1 , on peut réaliser une intégration par parties :

$$\int_0^x q(f^2)' = [qf^2]_0^x - \int_0^x q'f^2 = q(x)(f(x))^2 - q(0)(f(0))^2 - \int_0^x q'f^2.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$(f'(x))^2 - (f'(0))^2 = - \left[q(x)(f(x))^2 - q(0)(f(0))^2 - \int_0^x q'(t)(f(t))^2 dt \right]$$

Soit :

$$q(x)(f(x))^2 = (f'(0))^2 + q(0)(f(0))^2 + \int_0^x q'(t)(f(t))^2 dt - (f'(x))^2.$$

Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $(f'(x))^2 \geq 0$, on obtient :

$$q(x)(f(x))^2 \leq (f'(0))^2 + q(0)(f(0))^2 + \int_0^x q'(t)(f(t))^2 dt.$$

Comme la fonction q est strictement positive sur $\mathbb{R}_+$, elle ne s'y annule pas et, en posant $g = qf^2$ et $c = (f'(0))^2 + q(0)(f(0))^2$, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$g(x) \leq c + \int_0^x \frac{q'(t)}{q(t)} g(t) dt.$$

Or, la fonction q est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc $q' \geq 0$ et q est de classe C^1 et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$, donc la fonction $\varphi = \frac{q'}{q} \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$. On peut donc utiliser le résultat de la question 1 sur $[0, x]$, ce qui donne :

$$g(x) \leq ce^{\int_0^x \frac{q'(t)}{q(t)} dt} = ce^{[\ln(q(t))]}_0^x = ce^{\ln(q(x)) - \ln(q(0))} = c \frac{q(x)}{q(0)}.$$

Soit, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$q(x)(f(x))^2 \leq c \frac{q(x)}{q(0)}.$$

Et avec $q(x) > 0$, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$(f(x))^2 \leq \frac{c}{q(0)}.$$

Enfin $\frac{c}{q(0)} = \frac{(f'(0))^2}{q(0)} + (f(0))^2 \geq 0$ (car $q(0) > 0$), et en définitive, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$|f(x)| \leq \sqrt{\frac{c}{q(0)}}.$$

Ceci prouve que :

Toute solution f de l'équation différentielle $y'' + qy = 0$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 19

On a $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; $X \mapsto C^T X + X^T S X$.

Comme S est une matrice symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormée, d'après le théorème spectral. Autrement dit, il existe $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $D = P^T S P$.

Alors, en posant $C' = P^T C$, on a pour tout $X \in \mathbb{R}^n$:

$$f(PX) = C^T(PX) + (PX)^T S(PX) = (C^T P)X + X^T (P^T S P)X = C'^T X + X^T D X = g(X).$$

Or, comme P est inversible, PX décrit $\mathbb{R}^n$ quand X décrit $\mathbb{R}^n$, donc les (éventuels) extrema de f sont ceux de g (attention : pas atteint au même endroit a priori).

Cherchons alors les éventuels extrema de g . Soient $X_0 \in \mathbb{R}^n$ et $H \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$\begin{aligned} g(X_0 + H) &= C'^T(X_0 + H) + (X_0 + H)^T D(X_0 + H) \\ &= C'^T X_0 + C'^T H + X_0^T D X_0 + X_0^T D H + H^T D X_0 + H^T D H \\ &= g(X_0) + C'^T H + X_0^T D H + H^T D X_0 + H^T D H \end{aligned}$$

Or, $'HDX_0$ est un scalaire, donc $H^T DX_0 = (H^T DX_0)^T = (DX_0)^T H$ et :

$$\begin{aligned} g(X_0 + H) &= g(X_0) + C'^T H + X_0^T DH + (DX_0)^T H + H^T DH \\ &= g(X_0) + (C'^T + X_0^T D + (DX_0)^T) H + H^T DH \\ &= g(X_0) + E^T H + H^T DH \end{aligned}$$

avec $E = (C'^T + X_0^T D + (DX_0)^T)^T = C' + D^T X_0 + DX_0 = C' + 2DX_0$ (car D est diagonale donc $D^T = D$).

Si on note $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; $H \mapsto E^T H + H^T DH$, g admet un extremum (local ou global) en X_0 si et seulement si l'application φ admet un extremum (local ou global) en $(0, \dots, 0)$.

Si on pose $E = (a_1, \dots, a_n)$, on a pour tout $H = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\varphi(H) = \varphi(h_1, \dots, h_n) = E^T H + H^T DH = a_1 h_1 + \dots + a_n h_n + \lambda_1 h_1^2 + \dots + \lambda_n h_n^2.$$

Ainsi, φ est polynomiale, donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ avec pour tout $(h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ et tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial h_k}(h_1, \dots, h_n) = a_k + 2\lambda_k h_k.$$

Pour que φ admette un extremum en $(0, \dots, 0)$, il faut au moins que $(0, \dots, 0)$ soit un point critique, c'est-à-dire que $\frac{\partial \varphi}{\partial h_k}(0, \dots, 0) = a_k = 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, donc que $E = 0$.

Dans ce cas, on a $\varphi(h_1, \dots, h_n) = \lambda_1 h_1^2 + \dots + \lambda_n h_n^2$ et s'il existe $k, \ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $k \neq \ell$, $\lambda_k > 0$ et $\lambda_\ell < 0$, alors pour tous $h_k, h_\ell \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(0, \dots, 0, h_k, 0, \dots, 0) &= \lambda_k h_k^2 > 0 = \varphi(0, \dots, 0) \\ \varphi(0, \dots, 0, h_\ell, 0, \dots, 0) &= \lambda_\ell h_\ell^2 < 0 = \varphi(0, \dots, 0) \end{aligned}$$

Donc, φ n'admet pas d'extremum en $(0, \dots, 0)$.

Par contre, si tous les λ_k sont positifs (*resp.* négatifs), alors pour tout $(h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\varphi(h_1, \dots, h_n) = \lambda_1 h_1^2 + \dots + \lambda_n h_n^2 \geq 0 = \varphi(0, \dots, 0) \quad (\text{resp. } \leq 0 = \varphi(0, \dots, 0))$$

et φ admet $\varphi(0, \dots, 0) = 0$ pour minimum (*resp.* maximum) global.

Ainsi, φ présente un extremum (global) sur $\mathbb{R}^n$ en $(0, \dots, 0)$ si et seulement si $E = C' + 2DX_0 = 0$ et $Sp(S) \subset \mathbb{R}_-$ ou $Sp(S) \subset \mathbb{R}_+$. Alors, g présente un extremum (global) sur $\mathbb{R}^n$ en X_0 si et seulement si $E = C' + 2DX_0 = 0$ et $Sp(S) \subset \mathbb{R}_-$ ou $Sp(S) \subset \mathbb{R}_+$. Et donc, comme $f(PX_0) = g(X_0)$, f présente un extremum (global) sur $\mathbb{R}^n$ en $X_1 = PX_0$ si et seulement si $E = C' + 2DX_0 = 0$ et $Sp(S) \subset \mathbb{R}_-$ ou $Sp(S) \subset \mathbb{R}_+$.

Enfin, on a :

$$E = C' + 2DX_0 = 0 \Leftrightarrow P^T C + 2DX_0 = 0 \Leftrightarrow C = S(-2PX_0) = S(-2X_1).$$

Cette dernière relation n'est possible que si $C \in \text{Im } S$, et, dans ce cas, il existe toujours $X_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que $C = S(-2X_1)$. Finalement :

f présente un extremum sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $C \in \text{Im } S$ et $Sp(S) \subset \mathbb{R}_-$ ou $Sp(S) \subset \mathbb{R}_+$.

Et dans ce cas, l'extremum est global.

Exercice 20

La fonction $g : (x, y) \mapsto f\left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right)$ est de classe C^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ comme composée de la fonction $(x, y) \mapsto \frac{x^2 + y^2}{y}$, de classe C^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et à images dans $\mathbb{R}_+^*$ par f qui est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= \frac{2x}{y} f'\left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{2}{y} f'\left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right) + \left(\frac{2x}{y}\right)^2 f''\left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= \left(-\frac{x^2}{y^2} + 1\right) f'\left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{2x^2}{y^3} f'\left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right) + \left(-\frac{x^2}{y^2} + 1\right)^2 f''\left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right)\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) &= \left(\frac{2}{y} + \frac{2x^2}{y^3}\right) f'\left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right) + \left[\left(\frac{2x}{y}\right)^2 + \left(-\frac{x^2}{y^2} + 1\right)^2\right] f''\left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right) \\ &= 2\frac{x^2 + y^2}{y^3} f'\left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right) + \left[\left(\frac{x^2}{y^2}\right)^2 + 2\frac{x^2}{y^2} + 1\right] f''\left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right) \\ &= 2\frac{x^2 + y^2}{y^3} f'\left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right) + \left(\frac{x^2 + y^2}{y^2}\right)^2 f''\left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right) \\ &= \frac{x^2 + y^2}{y^3} \left[2f'\left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right) + \frac{x^2 + y^2}{y} f''\left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right)\right]\end{aligned}$$

Donc, g est solution de $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$ si et seulement si pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$\frac{x^2 + y^2}{y^3} \left[2f'\left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right) + \frac{x^2 + y^2}{y} f''\left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right)\right] = 0 \Leftrightarrow 2f'\left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right) + \frac{x^2 + y^2}{y} f''\left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right) = 0.$$

Or, à $y \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, $\frac{x^2 + y^2}{y} = \frac{x^2}{y} + y$ décrit $[y, +\infty[$ quand x décrit $\mathbb{R}_+^*$, donc quand (x, y) décrit $(\mathbb{R}_+^*)^2$,

$t = \frac{x^2 + y^2}{y}$ décrit $\bigcup_{y \in \mathbb{R}_+^*} [y, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$.

Alors, g est solution de $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$ si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$2f'(t) + t f''(t) = 0.$$

Autrement dit, si et seulement si f' est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E) : $y' + \frac{2}{t}y = 0$.

Or, les solutions de cette équation différentielle linéaire, homogène et d'ordre 1 sont les fonctions de la forme $t \mapsto k e^{-2 \ln t} = \frac{k}{t^2}$ avec $k \in \mathbb{R}$, et si f' est de cette forme, alors $f : t \mapsto \frac{a}{t} + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Finalement, g est solution de $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$ si et seulement si f a la forme ci-dessus, donc :

Les fonctions f recherchées sont les fonctions de la forme $t \mapsto \frac{a}{t} + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.