

DM de Mathématiques n° 1

Soient P et Q deux polynômes non nuls de $\mathbb{C}[X]$.

On veut établir une méthode pour décomposer $\frac{P}{Q}$ en éléments simples.

Quitte à simplifier par les facteurs communs de P et Q , et le coefficient dominant de Q , on suppose que P et Q n'ont aucune racine complexe commune et que Q est unitaire et non constant.

On peut alors écrire :

$$Q = \prod_{k=1}^r (X - a_k)^{n_k}$$

avec $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{C}$, distincts deux à deux et $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on pose : $Q_k = \prod_{\ell=1, \ell \neq k}^r (X - a_\ell)^{n_\ell}$.

On admettra que pour un polynôme $A \in \mathbb{C}[X]$ et tout $z_0 \in \mathbb{C}$, on a $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{A(z) - A(z_0)}{z - z_0} = A'(z_0)$.

1) Etablir l'existence d'un unique couple $(L, R) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que $\deg R < \deg Q$, $R \neq 0$ et $\frac{P}{Q} = L + \frac{R}{Q}$.

2) Soient $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq b$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Prouver qu'il existe $(\lambda, A) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}[X]$ tel que :

$$\frac{1}{(X - a)(X - b)^p} = \frac{\lambda}{X - a} + \frac{A}{(X - b)^p}.$$

3) Prouver qu'il existe $(P_1, \dots, P_r) \in \mathbb{C}[X]^r$ tel que pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $\deg P_k < n_k$ et :

$$\frac{P}{Q} = L + \sum_{k=1}^r \frac{P_k}{(X - a_k)^{n_k}}.$$

Cette écriture est la décomposition en éléments simples de $\frac{P}{Q}$.

4) Montrer alors que $\frac{P}{Q} = L + \sum_{k=1}^r \sum_{\ell=1}^{n_k} \frac{\alpha_{k,\ell}}{(X - a_k)^\ell}$ où l'on exprimera les $\alpha_{k,\ell}$ à l'aide des dérivées successives de P_k .

5) On suppose dans cette question uniquement que toutes les racines de Q sont simples.

Montrer que $\frac{P}{Q} = L + \sum_{k=1}^r \frac{\alpha_k}{X - a_k}$ et donner α_k en fonction de $P(a_k)$ et $Q'(a_k)$.

6) Soit $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$. Prouver que $P_k = \sum_{j=0}^{n_k-1} \frac{1}{j!} \left(\frac{P}{Q_k} \right)^{(j)} (a_k) (X - a_k)^j$ et en déduire une expression des $\alpha_{k,\ell}$.

7) Prouver que la décomposition en éléments simples de $\frac{P}{Q}$ est unique.

8) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposer en éléments simples $\frac{X^n}{X^n - 1}$ et $\frac{1}{(X^2 - 1)^n}$.