

Exercices d'entraînement chapitres 17 à 19 - Énoncés
Chapitre 17

- 1) Soient E un espace euclidien, k un réel et a un vecteur unitaire de E .

Montrer que $u : x \mapsto k(a \mid x)a + x$ est un endomorphisme autoadjoint de E .

En écrivant sa matrice dans une base bien choisie de E , déterminer la ou les valeur(s) de k pour la(les)quelle(s) u est un automorphisme orthogonal. Caractériser cette isométrie.

- 2) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, non nulle, telle que $A^2 = A^T$.

a. Trouver un polynôme annulateur de A .

b. On suppose que $0 \in Sp(A)$. Déterminer $Sp(A)$.

c. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec une matrice de passage orthogonale.

- 3) Montrer que $f : P \mapsto 2XP' + (X^2 - 1)P''$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ (où n est un entier supérieur ou égal à 2). En donner les valeurs propres.

Montrer que f est autoadjoint pour le produit scalaire $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 PQ$.

- 4) Donner le rang de $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer son noyau et son image, une base orthogonale du

noyau et de l'image, puis montrer que ces deux sous-espaces sont orthogonaux pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^4$.

Diagonaliser M . De quel endomorphisme s'agit-il ?

Montrer que $A = I_4 + M$ est inversible, que $(A^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice d'un endomorphisme que l'on déterminera.

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de s , la symétrie orthogonale par rapport à $\text{Im } M$.

- 5) Déterminer $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}), A \text{ orthogonale}\}$.

- 6) Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique, on note s la symétrie orthogonale par rapport à :

$$P : \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

Déterminer la matrice de s dans la base canonique.

- 7) Soient un entier $n \geq 2$ et $u : M \mapsto -M + \text{tr}(M)I_n$ défini sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Prouver que -1 est valeur propre de u . Trouver une base de $E_{-1}(u)$, le sous-espace propre associé.

Montrer que u est diagonalisable. Déterminer $\det u$ et $\text{tr}(u)$.

Donner un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour lequel u est un endomorphisme autoadjoint.

Trouver une base orthonormale de vecteurs propres de u pour ce produit scalaire.

8) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $A^T A = A A^T$ et il existe $p \in \mathbb{N}^*$, $A^p = 0_n$.

Montrer que $A^T A = A A^T = 0_n$, puis que $A = 0_n$.

9) On donne $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $\sigma = ab + bc + ca$ et $s = a + b + c$.

Montrer que M est orthogonale si et seulement si $\sigma = 0$ et $|s| = 1$.

Montrer que $M \in SO_3(\mathbb{R})$ si et seulement si $\sigma = 0$ et $s = 1$.

Montrer que $M \in SO_3(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $k \in \left[0, \frac{4}{27}\right]$, a, b et c sont les racines de $X^3 - X^2 + k$.

10) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. A quelle condition sur $a, b, c \in \mathbb{R}$, M est-elle positive ? définie positive ?

Chapitre 18

1) Montrer que l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ -6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ dans la base canonique est une rotation. Préciser ses éléments caractéristiques.

2) Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $X_m \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour lequel $\inf_{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \|AX - B\|$ est atteint.

3) Montrer que $P: x + y + z = 0$ et $D: x = y = z$ sont orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur P .

4) Montrer que f , de matrice $M = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 1 & 8 & 4 \\ -4 & 4 & -7 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, est un endomorphisme orthogonal indirect. Quelle est la nature de cette isométrie ? En donner les caractéristiques.

On note g la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et d'axe D dirigé et orienté par $(1, 1, 0)$. Déterminer la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Déterminer l'image du plan $P: x + y + z = 0$ par $g \circ f$.

Chapitre 19

Dans ce qui suit, l'espace affine est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) Etudier les arcs paramétrés suivants (asymptotes, points stationnaires, points multiples) :

$$f: t \mapsto \begin{cases} x(t) = t^2 + \frac{2}{t} \\ y(t) = t + \frac{1}{t} \end{cases} \quad g: t \mapsto \begin{cases} x(t) = \cos(3t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases} \quad c: t \mapsto \begin{cases} x(t) = a(t - \sin t) \\ y(t) = a(1 - \cos t) \end{cases} \text{ avec } a > 0.$$

Quelle est la longueur d'une arche de c ?

2) (St Cyr PSI) Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} ; (x, y, z) \mapsto \frac{\arctan(xyz)}{1+(xyz)^2} - \frac{\pi}{8}$.

Donner une équation du plan tangent en $(1,1,1)$ à la surface d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$.

- 3) Donner la représentation, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la projection f , sur le plan P d'équation $z = 0$, parallèlement à D , dirigée par $\overrightarrow{OS}$ avec $S(1, -1, 1)$.

On note $\mathcal{E}$ l'image par f du cercle $\mathcal{C}$ d'équations $\begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$.

Montrer que $\mathcal{E}$ a pour équation $x^2 + 2y^2 + 2xy = 1$ dans le plan P rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 4) Soient l'application $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2x^2y^2$ et S la surface de l'espace d'équation $z = f(x, y)$.

Montrer que S est invariante par quatre réflexions que l'on donnera.

Trouver les points critiques de f et déterminer les extremums locaux ou globaux de f sur $\mathbb{R}^2$.

- 5) Soit la surface S de l'espace d'équation cartésienne $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$.

Déterminer tous les plans tangents à S passant par le point A de coordonnées $(1, 1, 0)$.

Déterminer tous les plans tangents à S contenant la droite D d'équations $\begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$.

- 6) Reconnaître la surface S de l'espace d'équation cartésienne $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $D(\lambda)$ (si elle existe) la droite horizontale passant par le point $A(\lambda)$, de coordonnées $(0, 0, \lambda)$ et qui coupe S une seule fois.

Que dire des droites $D(\lambda)$? En existe-t-il pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$?

Donner une équation cartésienne de la réunion de ces droites quand λ décrit $\mathbb{R}$.

- 7) Après avoir justifié qu'elles sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, calculer la matrice hessienne de f en $a \in \mathbb{R}^2$, puis rechercher les extremums éventuels de f sur $\mathbb{R}^2$ pour :

a. $f : (x, y) \mapsto x^2 + x^{19} - y^2$

b. $f : (x, y) \mapsto \sin(x^2 + y^2)$

Exercices d'entraînement chapitres 17 à 19 - Corrigés

Chapitre 17

1) On pose $u : x \mapsto k(a|x)a + x$ avec E un espace euclidien, $k \in \mathbb{R}$ et $a \in E$ tel que $\|a\| = 1$.

Par bilinéarité du produit scalaire, $x \mapsto (a|x)a$ est linéaire, donc un endomorphisme de E . Comme u est une combinaison linéaire de cet endomorphisme et de id_E , u est un endomorphisme de E .

Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a :

$$(u(x)|y) = (k(a|x)a + x|y) = k(a|x)(a|y) + (x|y) = k(a|y)(x|a) + (x|y) = (x|k(a|y)a + y) = (x|u(y)).$$

Ainsi, u est autoadjoint et donc :

L'application u est un endomorphisme autoadjoint de E .

Posons $a = e_1$ et $(e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $\{a\}^\perp$. La famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est alors une base orthonormée de E . On a alors :

- $u(e_1) = k(a|e_1)a + e_1 = k(e_1|e_1)e_1 + e_1 = (k+1)e_1$;
- Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u(e_j) = k(a|e_j)a + e_j = k(e_1|e_j)e_1 + e_j = e_j$.

Donc, $M_{\mathcal{B}}(u) = \text{diag}(k+1, 1, \dots, 1)$. Cette matrice est orthogonale si et seulement si $|k+1| = 1$, donc si seulement si $k = 0$ ou -2 .

Ainsi :

u est un automorphisme orthogonal si seulement si $k = 0$ ou -2 , et $u = id_E$ dans le premier cas, et u est la réflexion par rapport à $\{a\}^\perp$ dans le second.

2) a. On a $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A \neq 0_2$ et $A^2 = A^T$. Alors :

$$A = (A^2)^T = (A^T)^2 = (A^2)^2 = A^4.$$

Donc :

$X^4 - X$ est un polynôme annulateur de A .

b. Si $0 \in Sp(A)$, χ_A est scindé dans $\mathbb{R}$ (car A est une matrice 2×2) avec $\chi_A = X(X - \lambda)$.

Or, $X^4 - X = X(X-1)(X-j)(X-\bar{j})$ un polynôme annulateur de A scindé à racines simples, donc A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et ses seules valeurs propres (réelles) possibles sont 0 et 1. Or, si 0 était sa seule valeur propre, A serait semblable à la matrice nulle, donc nulle, ce qui n'est pas. Ainsi, 0 et 1 sont les valeurs propres de A , soit :

$$Sp(A) = \{0, 1\}$$

c. D'après ce qui précède, $\chi_A = X(X-1)$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$, donc A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Avec $Sp(A) = \{0, 1\}$, il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$ avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarquons que $B^2 = B = {}^tB$, donc :

$$A^T = A^2 = (PBP^{-1})^2 = PB^2P^{-1} = PBP^{-1} = A.$$

Ainsi, A est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée. Autrement dit :

$$A \text{ est semblable à } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec une matrice de passage orthogonale.}$$

3) Les applications $P \mapsto XP'$ et $P \mapsto (X^2 - 1)P''$ sont linéaires (par linéarité de la dérivation).

De plus, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\deg P' \leq n-1$ et $\deg P'' \leq n-2$, donc $\deg(XP') = 1 + \deg P' \leq n$ et $\deg((X^2 - 1)P'') = 2 + \deg P'' \leq n$. Ainsi, $P \mapsto XP'$ et $P \mapsto (X^2 - 1)P''$ sont des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$ et finalement, comme f est une combinaison linéaire de ces deux endomorphismes :

$$f : P \mapsto 2XP' + (X^2 - 1)P'' \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].$$

On a $f(1) = 0$, $f(X) = 2X$ et pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$:

$$f(X^k) = 2X(kX^{k-1}) + (X^2 - 1)(k(k-1)X^{k-2}) = k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}$$

Ainsi, si on note $\mathcal{B}_c = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, on a :

$$M_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 6 & 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 12 & \ddots & -k(k-1) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & k(k+1) & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & -n(n-1) \\ \vdots & & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}$$

Cette matrice est triangulaire supérieure, donc les valeurs propres de f sont les coefficients diagonaux (tous distincts car l'application $x \mapsto x(x+1)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc injective). Ainsi :

$$Sp(f) = \{0, 2, 6, \dots, k(k+1), \dots, n(n+1)\} = \{k(k+1), k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$$

Pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, on a :

$$\langle f(P), Q \rangle = \langle 2XP' + (X^2 - 1)P'', Q \rangle = 2\langle XP', Q \rangle + \langle (X^2 - 1)P'', Q \rangle = 2 \int_{-1}^1 tP'(t)Q(t)dt + \int_{-1}^1 (t^2 - 1)P''(t)Q(t)dt.$$

Toutes les applications en jeu sont polynomiales donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On peut réaliser des intégrations par parties :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 tP'(t)Q(t)dt &= [tP(t)Q(t)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 P(t)(Q(t) + tQ'(t))dt \\ &= Q(1)P(1) + Q(-1)P(-1) - \int_{-1}^1 P(t)(Q(t) + tQ'(t))dt \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 (t^2 - 1)P''(t)Q(t)dt &= \left[(t^2 - 1)P'(t)Q(t) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 P'(t)(2tQ(t) + (t^2 - 1)Q'(t))dt \\
 &= - \left[P(t)(2tQ(t) + (t^2 - 1)Q'(t)) \right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 P(t)(2Q(t) + 4tQ'(t) + (t^2 - 1)Q''(t))dt \\
 &= -2Q(1)P(1) - 2Q(-1)P(-1) + 2 \int_{-1}^1 P(t)(Q(t) + tQ'(t))dt \\
 &\quad + \int_{-1}^1 P(t)(2tQ'(t) + (t^2 - 1)Q''(t))dt \\
 &= -2 \int_{-1}^1 tP'(t)Q(t)dt + \langle P, f(Q) \rangle
 \end{aligned}$$

Soit :

$$\int_{-1}^1 (t^2 - 1)P''(t)Q(t)dt + 2 \int_{-1}^1 tP'(t)Q(t)dt = \langle P, f(Q) \rangle.$$

Ainsi $\langle f(P), Q \rangle = \langle f(Q), P \rangle$ et ceci pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, donc :

L'endomorphisme f est autoadjoint pour le produit scalaire $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 PQ$.

4) Notons C_1, C_2, C_3, C_4 les colonnes de M . On a $C_3 = -C_1$ et $C_4 = -C_2$. Comme C_1 et C_2 ne sont pas colinéaires :

$\text{rg}(M) = 2$

Notons $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à M .

D'après ce qui précède $\text{Im } M = \text{Vect}(u(e_1), u(e_2)) = \text{Vect}(C_1, C_2)$. Et $C_1 = e_1 - e_3$, et $C_2 = e_2 - e_4$, donc :

$\text{Im } M = \text{Vect}(e_1 - e_3, e_2 - e_4)$

Remarquons que $(e_1 - e_3 | e_2 - e_4) = 0$, donc $(e_1 - e_3, e_2 - e_4)$ est une base orthogonale de l'image de M .

Le théorème du rang donne $\dim(\ker M) = 2$ et comme $C_1 + C_3 = u(e_1 + e_3) = 0$, $C_2 + C_4 = u(e_2 + e_4) = 0$ et les vecteurs $e_1 + e_3$ et $e_2 + e_4$ ne sont pas colinéaires, on a :

$\ker M = \text{Vect}(e_1 + e_3, e_2 + e_4)$

Remarquons que $(e_1 - e_3 | e_2 - e_4) = 0$, donc $(e_1 - e_3, e_2 - e_4)$ est une base orthogonale du noyau de M .

On a :

$$\begin{aligned}
 (e_1 - e_3 | e_1 + e_3) &= (e_2 - e_4 | e_2 + e_4) = 1 - 1 = 0 \\
 (e_1 - e_3 | e_2 + e_4) &= (e_2 - e_4 | e_1 + e_3) = 0
 \end{aligned}$$

Donc, les vecteurs d'une base de $\text{Im } M$ sont orthogonaux aux vecteurs d'une base de $\ker M$, donc :

$\ker M \perp \text{Im } M$

Comme $\ker M$ et $\operatorname{Im} M$ sont orthogonaux et $\dim(\ker M) + \dim(\operatorname{Im} M) = 4$, on a $\ker M = (\operatorname{Im} M)^\perp$, $\mathbb{R}^4 = \ker M \oplus \operatorname{Im} M$ et $\mathcal{B} = (e_1 + e_3, e_2 + e_4, e_1 - e_3, e_2 - e_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ adaptée à cette décomposition.

Or, $u(e_1) = -u(e_3) = e_1 - e_3$ et $u(e_2) = -u(e_4) = e_2 - e_4$, donc :

$$u(e_1 - e_3) = 2u(e_1) = 2(e_1 - e_3)$$

$$u(e_2 - e_4) = 2u(e_2) = 2(e_2 - e_4)$$

$$u(e_1 + e_3) = 0$$

$$u(e_2 + e_4) = 0$$

Et ainsi, on a $M_{\mathcal{B}}(u) = \operatorname{diag}(0, 0, 2, 2)$. Finalement :

$$Sp(M) = \{0; 2\}, \ker M = \operatorname{Vect}(e_1 + e_3, e_2 + e_4) \text{ et } \ker(M - 2I_4) = \operatorname{Im} M = \operatorname{Vect}(e_1 - e_3, e_2 - e_4).$$

On a $M_{\mathcal{B}}(u) = \operatorname{diag}(0, 0, 2, 2) = 2 \operatorname{diag}(0, 0, 1, 1)$ et $\operatorname{diag}(0, 0, 1, 1)$ est la matrice de la projection orthogonale p sur $\operatorname{Im} M$ (parallèlement à $\ker M = (\operatorname{Im} M)^\perp$). Ainsi :

M est la matrice de la composée de $2\operatorname{id}_{\mathbb{R}^4}$, l'homothétie de rapport 2, par la projection orthogonale p sur $\operatorname{Vect}(e_1 - e_3, e_2 - e_4)$.

Comme -1 n'est pas valeur propre de M , $\ker(M + I_4) = \{0\}$ et donc :

$$A = I_4 + M \text{ est inversible.}$$

Si on note $P = P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}}$, on a $P^{-1}MP = M_{\mathcal{B}}(u) = 2D$ avec $D = \operatorname{diag}(0, 0, 1, 1)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D^n = D$. Alors :

$$M = 2PDP^{-1} \text{ et } M^2 = 4PD^2P^{-1} = 2(2PDP^{-1}) = 2M.$$

On a alors $M^3 = 2M^2 = 4M = 2^2M$ et on prouve par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = 2^{n-1}M$ (le faire).

Comme M et I_4 commutent, on peut écrire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} A^n &= (I_4 + M)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M^k = I_4 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{k-1} M \\ &= I_4 + \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^k \right] M = I_4 + \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k - 1 \right] M = I_4 + \frac{1}{2} (3^n - 1) M \end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^{-n} = (A^n)^{-1}$ et comme $M^2 = 2M$, on a :

$$\begin{aligned} (A^n)^2 &= \left(I_4 + \frac{1}{2} (3^n - 1) M \right)^2 = I_4 + (3^n - 1) M + \frac{1}{4} (3^n - 1)^2 M^2 = I_4 + (3^n - 1) M + \frac{1}{2} (3^n - 1)^2 M \\ &= I_4 + \frac{1}{2} \left[2(3^n - 1) + (3^n - 1)^2 \right] M = I_4 + \frac{1}{2} \left[(3^n - 1 + 1)^2 - 1 \right] M = I_4 + \frac{1}{2} ((3^n)^2 - 1) M \\ &= I_4 + \frac{1}{2} (3^n + 1)(3^n - 1) M = I_4 + (3^n + 1)(A^n - I_4) = (3^n + 1)A^n - 3^n I_4 \end{aligned}$$

Donc, $I_4 = \frac{1}{3^n} \left[(3^n + 1)A^n - (A^n)^2 \right] = \frac{1}{3^n} \left[(3^n + 1)I_4 - A^n \right] A^n$ et ainsi, avec $A^n = I_4 + \frac{1}{2}(3^n - 1)M$:

$$A^{-n} = (A^n)^{-1} = \frac{1}{3^n} \left[(3^n + 1)I_4 - A^n \right] = \frac{1}{3^n} \left[(3^n + 1)I_4 - \left(I_4 + \frac{1}{2}(3^n - 1)M \right) \right] = I_4 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right) M.$$

Finalement, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^{-n} = I_4 - \frac{1}{2}M$ et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A^{-n} = I_4 - \frac{1}{2}M = I_4 - PDP^{-1} = P(I_4 - D)P^{-1}.$$

Ainsi, $I_4 - \frac{1}{2}M$ est la matrice de $id_{\mathbb{R}^4} - p$ le projecteur associé à p , donc :

La suite $(A^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $I_4 - \frac{1}{2}M$, qui est la matrice de la projection sur $\text{Vect}(e_1 + e_3, e_2 + e_4)$ parallèlement à $\text{Vect}(e_1 - e_3, e_2 - e_4)$.

On note s , la symétrie orthogonale par rapport à $\text{Im } M$.

Comme $p = \frac{1}{2}u$ est la projection orthogonale sur $\text{Im } M$, on a $s = 2p - id_{\mathbb{R}^4} = u - id_{\mathbb{R}^4}$, donc :

La matrice de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est $M - I_4$.

5) On cherche les matrices $n \times n$ à coefficients entiers et orthogonales.

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ une telle matrice.

On a pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{i=1}^n a_{i,j}^2 = 1$. Ceci implique que pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $0 \leq a_{i,j}^2 \leq 1$, donc que

$a_{i,j}^2 = 0$ ou 1 , car $a_{i,j}^2$ est un entier. De plus, pour avoir $\sum_{i=1}^n a_{i,j}^2 = 1$, il faut alors qu'exactement l'un des $a_{i,j}^2$ soit égal à 1 et tous les autres nuls. Ainsi, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $i_0 = \varphi(j) \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $a_{i_0,j}^2 = 1$, soit $a_{i_0,j} = a_{\varphi(j),j} = \pm 1$ et $a_{i,j} = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{\varphi(j)\}$.

Ceci peut se résumer en $a_{i,j} = \pm \delta_{i,\varphi(j)}$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Enfin, on a doit avoir pour tous $j, j' \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $j \neq j'$, $\sum_{i=1}^n a_{i,j} a_{i,j'} = 0$, soit $a_{\varphi(j),j} a_{\varphi(j'),j'} = 0$ et comme $a_{\varphi(j),j} = \pm 1$, ceci donne $a_{\varphi(j),j'} = 0$ et donc $\varphi(j) \neq \varphi(j')$.

Ainsi, φ est une injection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans lui-même, donc une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans lui-même, autrement dit une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Ainsi, $A = (\pm \delta_{i,\varphi(j)})_{1 \leq i, j \leq n}$ où φ est une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Réciproquement, si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ a la forme ci-dessus, A est à coefficients entiers et pour tous $j, j' \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\sum_{i=1}^n a_{i,j} a_{i,j'} = \sum_{i=1}^n (\pm \delta_{i,\varphi(j)}) (\pm \delta_{i,\varphi(j')}) = \begin{cases} (\pm \delta_{\varphi(j),\varphi(j)}) (\pm \delta_{\varphi(j),\varphi(j')}) = 0 & \text{quand } j \neq j' \\ (\pm \delta_{\varphi(j),\varphi(j)})^2 = 1 & \text{quand } j = j' \end{cases}$$

Donc, A est orthogonale.

Finalement :

Les matrices $n \times n$ à coefficients entiers et orthogonales sont les matrices de la forme $(\pm \delta_{i, \varphi(j)})_{1 \leq i, j \leq n}$ où φ est une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

6) On note $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ (muni du produit scalaire canonique).

On note s est la symétrie orthogonale par rapport à :

$$P: \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

Soit $X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On a :

$$X \in P \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X \in \text{Vect}(f_1, f_2).$$

$$\text{avec } f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3) \text{ et } f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, -1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 - e_4).$$

On a donc $P = \text{Vect}(f_1, f_2)$.

Les vecteurs f_1 et f_2 sont unitaires et orthogonaux. On peut compléter (f_1, f_2) en une base orthonormée

$\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ de $\mathbb{R}^4$, en posant $f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_3)$ et $f_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 + e_4)$.

La symétrie orthogonale s est alors la symétrie par rapport à $P = \text{Vect}(f_1, f_2)$, parallèlement à $P^\perp = \text{Vect}(f_3, f_4)$. On a alors :

$$\begin{cases} s(f_1) = f_1 \\ s(f_2) = f_2 \\ s(f_3) = -f_3 \\ s(f_4) = -f_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s(e_1 - e_3) = s(e_1) - s(e_3) = e_1 - e_3 \\ s(e_2 - e_4) = s(e_2) - s(e_4) = e_2 - e_4 \\ s(e_1 + e_3) = s(e_1) + s(e_3) = -e_1 - e_3 \\ s(e_2 + e_4) = s(e_2) + s(e_4) = -e_2 - e_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s(e_1) = -e_3 \\ s(e_2) = -e_4 \\ s(e_3) = -e_1 \\ s(e_4) = -e_2 \end{cases}$$

Ainsi :

La matrice de s dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7) On prend un entier $n \geq 2$ et $u : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; M \mapsto -M + \text{tr}(M)I_n$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$u(M) = -M \Leftrightarrow \text{tr}(M)I_n = 0_n \Leftrightarrow \text{tr}(M) = 0.$$

Donc :

-1 est valeur propre de u et $E_{-1}(u) = \ker(u + \text{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{tr}(M) = 0\}$.

Remarquons que comme la trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $E_{-1}(u) = \ker(\text{Tr})$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc de dimension $n^2 - 1$.

Remarquons de plus que, si $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors, pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $i \neq j$, on a $\text{tr}(E_{i,j}) = 0$, donc $E_{i,j} \in E_{-1}(u)$. De plus, pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on a $\text{tr}(E_{1,1} - E_{i,i}) = 1 - 1 = 0$, donc $E_{1,1} - E_{i,i} \in E_{-1}(u)$. La famille $\left((E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n, i \neq j} \cup (E_{1,1} - E_{i,i})_{i \in \llbracket 2, n \rrbracket} \right)$ contient $(n^2 - n) + (n - 1) = n^2 - 1$ matrices et est libre (à prouver), donc :

$$\left((E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n, i \neq j} \cup (E_{1,1} - E_{i,i})_{i \in \llbracket 2, n \rrbracket} \right) \text{ est une base de } E_{-1}(u).$$

On vient de voir que -1 est valeur propre de u et que la dimension du sous-espace propre associé est $n^2 - 1$ (avec $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$).

Soit maintenant $\lambda \in \mathbb{R}$ une éventuelle valeur propre de u différente de -1 et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé. On a alors $u(M) = -M + \text{tr}(M)I_n = \lambda M$, soit :

$$(\lambda + 1)M = \text{tr}(M)I_n.$$

Comme $(\lambda + 1)M \neq 0_n$, on a $\text{tr}(M) \neq 0$ et, en passant à la trace dans la relation ci-dessus, on obtient :

$$(\lambda + 1) \times \text{tr}(M) = \text{tr}(M) \times \text{tr}(I_n) = \text{tr}(M) \times n.$$

Avec $\text{tr}(M) \neq 0$, on a $\lambda + 1 = n$, soit $\lambda = n - 1$ et :

$$M = \frac{\text{tr}(M)}{\lambda + 1} I_n = \frac{\text{tr}(M)}{n} I_n.$$

Ainsi, tout vecteur propre associé à $n - 1$ est proportionnelle à I_n .

Réciproquement, on a :

$$u(I_n) = -I_n + \text{tr}(I_n)I_n = -I_n + nI_n = (n - 1)I_n.$$

Donc $n - 1$ est bien valeur propre de u et I_n est un vecteur propre associé.

On a alors $E_{n-1}(u) = \ker(u - (n - 1)\text{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = \text{Vect}(I_n)$ et $\dim(E_{n-1}(u)) = 1$.

Finalement, $\dim(E_{-1}(u)) + \dim(E_{n-1}(u)) = (n^2 - 1) + 1 = n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, donc :

$$u \text{ est diagonalisable.}$$

On a vu que u est diagonalisable avec $\text{Sp}(u) = \{-1, n - 1\}$, $\dim(E_{-1}(u)) = n^2 - 1$ et $\dim(E_{n-1}(u)) = 1$, donc -1 est de multiplicité $n^2 - 1$ et $n - 1$ de multiplicité 1, d'où :

- $\det u = (-1)^{n^2-1}(n - 1) = (-1)^{n-1}(n - 1)$ (car n et n^2 ont la même parité) :
- $\text{tr}(u) = (n^2 - 1)(-1) + (n - 1) = n - n^2$.

Finalement :

$$\det u = (-1)^{n-1}(n - 1) \text{ et } \text{tr}(u) = n - n^2.$$

Soit $(\cdot | \cdot)$ un éventuel produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour lequel u est un endomorphisme autoadjoint.

On a alors pour toutes $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}(u(M) | N) &= (M | u(N)) \Leftrightarrow (-M + \text{tr}(M)I_n | N) = (M | -N + \text{tr}(N)I_n) \\ &\Leftrightarrow -(M | N) + \text{tr}(M)(I_n | N) = -(M | N) + \text{tr}(N)(M | I_n) \\ &\Leftrightarrow \text{tr}(M)(I_n | N) = \text{tr}(N)(I_n | M)\end{aligned}$$

En considérant (à tout hasard !) le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(A, B) \mapsto (A | B) = \text{tr}(A^\top B)$, on a, pour toutes matrices M, N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(I_n | M) = \text{tr}(I_n^\top M) = \text{tr}(M)$ et de la même façon $(I_n | N) = \text{tr}(N)$, donc $\text{tr}(M)(I_n | N) = \text{tr}(N)(I_n | M)$. Ainsi :

L'endomorphisme u est autoadjoint pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

La base canonique $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est orthonormale pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (par définition), donc la famille extraite $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n, i \neq j}$ l'est aussi.

De plus, pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $i \neq j$ et tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on a :

$$(E_{i,j} | E_{1,1} - E_{k,k}) = (E_{i,j} | E_{1,1}) - (E_{i,j} | E_{k,k}) = 0 - 0 = 0.$$

Donc, la base $\left((E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n, i \neq j} \cup (E_{1,1} - E_{i,i})_{i \in \llbracket 2, n \rrbracket} \right)$ de $E_{-1}(u)$ est orthogonale et comme pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on a $\|E_{1,1} - E_{k,k}\| = \sqrt{2}$, on en déduit que la famille $\left((E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n, i \neq j} \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(E_{1,1} - E_{k,k}) \right)_{2 \leq k \leq n} \right)$ est une base orthonormale de $E_{-1}(u)$.

Par ailleurs, pour tout $M \in E_{-1}(u) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{tr}(M) = 0\}$, on a $(I_n | M) = \text{tr}(M) = 0$, donc :

$$E_{-1}(u) \perp E_{n-1}(u).$$

Enfin, $\|I_n\| = \sqrt{n}$, donc $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} I_n \right)$ est une base orthonormale de $E_{n-1}(u)$ et finalement, pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\left((E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n, i \neq j} \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(E_{1,1} - E_{k,k}) \right)_{2 \leq k \leq n} \cup \left(\frac{1}{\sqrt{n}} I_n \right) \right) \text{ est une base orthonormée de de vecteurs propres de } u.$$

8) Posons $B = A^\top A = AA^\top$. Comme A et $A^\top$ commutent, on a $B^k = (A^\top)^k A^k = A^k (A^\top)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et en particulier $B^p = (A^\top)^p A^p = (A^\top)^p 0_n = 0_n$. Donc, B est nilpotente.

On a $(\det B)^p = \det(B^p) = \det 0_n = 0$, donc $\det B = 0$ et B n'est pas inversible. Ainsi, 0 est valeur propre de B .

Or, X^p est annulateur de B , donc le spectre de B est inclus dans l'ensemble des racines de X^p , donc 0 est la seule valeur propre de B .

Par ailleurs, on a $B^\top = (A^\top A)^\top = A^\top (A^\top)^\top = A^\top A = B$, donc B est symétrique réelle, donc diagonalisable d'après le théorème spectral. Or, si une matrice est diagonalisable et n'admet que 0 pour valeur propre, alors elle est semblable à 0_n , donc égale à 0_n . Ainsi :

$$B = A^\top A = AA^\top = 0_n$$

Soit maintenant $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ quelconque.

En utilisant le produit scalaire et la norme euclidienne canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\|AX\|^2 = (AX)^\top (AX) = X^\top A^\top AX = X^\top 0_n X = 0.$$

Ainsi, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|AX\| = 0$, soit $AX = 0$ et donc :

$$A = 0_n$$

9) On a $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\sigma = ab + bc + ca$ et $s = a + b + c$.

La matrice M est orthogonale si et seulement si ses colonnes sont orthonormées, soit :

$$\begin{cases} ab + bc + ca = \sigma = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases}$$

Or, $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = s^2 - 2\sigma$, donc M est orthogonale si et seulement si :

$$\begin{cases} \sigma = 0 \\ s^2 - 2\sigma = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma = 0 \\ s^2 = 1 \end{cases}$$

Soit :

$$M \text{ est orthogonale si et seulement si } \sigma = 0 \text{ et } |s| = 1.$$

La matrice M appartient à $SO_3(\mathbb{R})$ si et seulement si elle appartient à $O_3(\mathbb{R})$ et son déterminant vaut 1.

On a :

$$\det M = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \stackrel{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} s & b & c \\ s & a & b \\ s & c & a \end{vmatrix} = s \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} \stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} s \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la première ligne, on obtient :

$$\det M = s \begin{vmatrix} a-b & b-c \\ c-b & a-c \end{vmatrix} = s[(a-b)(a-c) - (c-b)(b-c)] = s(s^2 - 3\sigma).$$

Alors :

$$M \in SO_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} M \in O_3(\mathbb{R}) \\ \det M = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma = 0 \\ s^2 = 1 \\ s(s^2 - 3\sigma) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma = 0 \\ s = 1 \end{cases}$$

On a donc bien :

$$M \in SO_3(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } \sigma = 0 \text{ et } s = 1.$$

Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on a, avec les notations ci-dessus :

$$(X - a)(X - b)(X - c) = X^3 - sX^2 + \sigma X - abc.$$

Donc, pour $k \in \mathbb{R}$, si trois réels a, b et c sont racines de $X^3 - X^2 + k$, alors $s=1$, $\sigma=0$ et $k = -abc$.

Enfin, pour avoir l'équivalence souhaitée : a, b et c racines de $X^3 - X^2 + k$ si et seulement si $s=1$ et $\sigma=0$ (avec $k = -abc$), il faut que le polynôme $X^3 - X^2 + k$ admette trois racines réelles (distinctes ou pas).

Pour $k \in \mathbb{R}$, posons $f(x) = x^3 - x^2 + k$. La fonction polynomiale f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x = (3x - 2)x.$$

On obtient le tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$2/3$	$+\infty$
f	$-\infty$	k	$f(2/3)$	$+\infty$

Et $f\left(\frac{2}{3}\right) = k - \frac{4}{27}$.

Alors :

- Si $f(0) = k < 0$, $X^3 - X^2 + k$ n'a pas de racine réelle inférieure à $\frac{2}{3}$ et une unique racine réelle supérieure à $\frac{2}{3}$ (assurée par le théorème de la bijection continue appliqué à f sur $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right]$).
- Si $f\left(\frac{2}{3}\right) = k - \frac{4}{27} > 0$, soit $k > \frac{4}{27}$, $X^3 - X^2 + k$ n'a pas de racine réelle positive et une unique racine réelle négative (assurée par le théorème de la bijection continue appliqué à f sur $]-\infty, 0]$).
- Si $k \in \left[0, \frac{4}{27}\right]$, alors $f(0) \geq 0$ et $f\left(\frac{2}{3}\right) \leq 0$, et le théorème de la bijection continue assure l'existence de trois racines réelles (pas forcément distinctes) : l'une négative, l'autre comprise entre 0 et $\frac{2}{3}$, et la dernière supérieure à $\frac{2}{3}$.

Ainsi, $X^3 - X^2 + k$ admet trois racines réelles (distinctes ou pas) si et seulement si $k \in \left[0, \frac{4}{27}\right]$.

Finalement, trois réels a, b et c sont racines de $X^3 - X^2 + k$ si et seulement si $k = -abc \in \left[0, \frac{4}{27}\right]$, $s=1$ et $\sigma=0$. Avec la question précédente, on peut conclure que :

$$M \in SO_3(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si il existe } k = -abc \in \left[0, \frac{4}{27}\right], \text{ tel que } a, b \text{ et } c \text{ sont les racines de } X^3 - X^2 + k.$$

10) On a $M \in S_2(\mathbb{R})$ et si $Sp(M) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$:

$$\begin{cases} tr(M) = \lambda_1 + \lambda_2 = a + c \\ \det M = \lambda_1 \lambda_2 = ac - b^2 \end{cases}$$

Alors :

$$Sp(M) \subset \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 \geq 0 \\ \lambda_1 \lambda_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c \geq 0 \\ ac \geq b^2 \end{cases}$$

Donc :

$M \text{ est positive si et seulement si } \begin{cases} a + c \geq 0 \\ ac \geq b^2 \end{cases}$
--

De même :

$$Sp(M) \subset \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 > 0 \\ \lambda_1 \lambda_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c > 0 \\ ac > b^2 \end{cases}$$

Donc :

$M \text{ est définie positive si et seulement si } \begin{cases} a + c > 0 \\ ac > b^2 \end{cases}$
--

Chapitre 18

Dans tous les exercices de ce chapitre, on note $\mathcal{B}_c = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1) Les colonnes de A sont orthonormées, donc A est orthogonale. Cherchons les vecteurs invariants par u .

Soit $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \in \mathbb{R}^3$, on a $u(\vec{v}) = \vec{v}$ si et seulement si :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ -6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 6y - 3z = 7x \\ -6x + 3y + 2z = 7y \\ 3x + 2y + 6z = 7z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 6y + 3z = 0 \\ 6x + 4y - 2z = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 2y \end{cases}$$

Donc, $\ker(u - id_{\mathbb{R}^3}) = \text{Vect}(\vec{j} + 2\vec{k})$ est une droite et ainsi :

u est une rotation d'axe $\text{Vect}(\vec{j} + 2\vec{k})$.

Si α est l'angle de u , on a $1 + 2\cos\alpha = \text{Tr}(A) = \frac{11}{7}$, donc $\cos\alpha = \frac{2}{7}$ et $\alpha = \pm \arccos\left(\frac{2}{7}\right) [2\pi]$.

Le vecteur $\vec{i}$ est orthogonale à l'axe et $\vec{i} \wedge u(\vec{i}) = \vec{i} \wedge \left(\frac{2}{7}\vec{i} - \frac{6}{7}\vec{j} + \frac{3}{7}\vec{k}\right) = -\frac{6}{7}\vec{k} - \frac{3}{7}\vec{j} = -\frac{3}{7}(\vec{j} + 2\vec{k})$, donc si

l'axe $\text{Vect}(\vec{j} + 2\vec{k})$ est orienté par $\vec{j} + 2\vec{k}$, on a $\alpha = -\arccos\left(\frac{2}{7}\right) [2\pi]$.

Finalement :

u est une rotation d'axe dirigé et orienté par $\vec{j} + 2\vec{k}$ et d'angle $-\arccos\left(\frac{2}{7}\right)$.

2) On a $\inf_{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \|AX - B\| = \inf_{Y \in \text{Im } A} \|Y - B\|$. Or, $\det A = 6 \neq 0$, donc A est inversible et $\text{Im } A = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Alors, on a $\|AX - B\| = 0$ pour $X = A^{-1}B$, donc $\inf_{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \|AX - B\| = 0$, atteint pour $X = A^{-1}B$.

Enfin :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y - z = 1 \\ x - y + 2z = 1 \\ -x + 2y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{6} \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = \frac{5}{6} \end{cases}$$

Donc :

$\inf_{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \|AX - B\| = 0$, atteint pour $X = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

3) Un vecteur normal à P est $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, qui dirige D , donc :

$$P \perp D$$

Notons p la projection orthogonale sur P .

Les vecteurs $\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{i} - \vec{k}$ sont orthogonaux à $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ (les deux produits scalaires sont nuls), donc appartiennent à $P = \ker(p - id_{\mathbb{R}^3})$. Et $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ dirige $D = P^\perp = \ker(p + id_{\mathbb{R}^3})$, donc :

$$\begin{cases} p(\vec{i} - \vec{j}) = p(\vec{i}) - p(\vec{j}) = \vec{i} - \vec{j} \\ p(\vec{i} - \vec{k}) = p(\vec{i}) - p(\vec{k}) = \vec{i} - \vec{k} \\ p(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = p(\vec{i}) + p(\vec{j}) + p(\vec{k}) = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p(\vec{i}) = \frac{1}{3}(\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}) \\ p(\vec{j}) = \frac{1}{3}(-2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}) \\ p(\vec{k}) = \frac{1}{3}(-2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) \end{cases}$$

Ainsi :

$$M_{\mathcal{B}_c}(p) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

4) Les colonnes de M sont orthonormées, donc M est orthogonale. De plus :

$$\det M = \frac{1}{9^3} \begin{vmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 1 & 8 & 4 \\ -4 & 4 & -7 \end{vmatrix} \stackrel{C_1 \leftarrow C_1 + 2C_3}{=} \frac{1}{9^3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 9 & 8 & 4 \\ -18 & 4 & -7 \end{vmatrix} \stackrel{C_3 \leftarrow C_3 + 4C_2}{=} \frac{1}{9^3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 9 & 8 & 36 \\ -18 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Et, en développant par rapport à la deuxième colonne, on obtient :

$$\det M = -\frac{1}{9} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Donc :

f est un endomorphisme orthogonal indirect.

Cherchons les vecteurs invariants par f .

Soit $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \in \mathbb{R}^3$, on a $u(\vec{v}) = \vec{v}$ si et seulement si :

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 1 & 8 & 4 \\ -4 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + y - 4z = 9x \\ x + 8y + 4z = 9y \\ -4x + 4y - 7z = 9z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ x - y + 4z = 0 \\ -4x + 4y - 7z = 9z \end{cases}$$

L'ensemble des vecteurs invariants par f donc le plan d'équation $x - y + 4z = 0$, donc :

f est la réflexion par rapport au plan d'équation $x - y + 4z = 0$.

On note g la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et d'axe D dirigé et orienté par $\vec{i} + \vec{j}$.

On a $D = \text{Vect}(\vec{u})$ avec $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$ et $\vec{k} \in D^\perp$. Alors :

$$\begin{cases} g(\vec{u}) = \vec{u} \\ g(\vec{k}) = \vec{u} \wedge \vec{k} = \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j}) \\ g(\vec{v}) = \vec{v} \wedge \vec{k} = -\vec{k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(\vec{i} + \vec{j}) = g(\vec{i}) + g(\vec{j}) = \vec{i} + \vec{j} \\ g(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} \\ g(\vec{i} - \vec{j}) = g(\vec{i}) - g(\vec{j}) = -\sqrt{2}\vec{k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(\vec{i}) = \frac{1}{2}(\vec{i} + \vec{j} - \sqrt{2}\vec{k}) \\ g(\vec{j}) = \frac{1}{2}(\vec{i} + \vec{j} + \sqrt{2}\vec{k}) \\ g(\vec{k}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} - \vec{j}) \end{cases}$$

Donc :

La matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $N = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Un vecteur normal à P est $\vec{n} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, donc $P = (\text{Vect}(\vec{n}))^\perp$. Comme f et g sont des isométries $g \circ f$ en est une aussi, donc conserve l'orthogonalité et ainsi, l'image de P par $g \circ f$ est un plan de vecteur normal $g \circ f(\vec{n}) = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ avec :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = NM \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 1 & 8 & 4 \\ -4 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ -7 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 11 \\ 25 \\ 8\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Donc, si $g \circ f(\vec{n}) = \frac{1}{18}(11\vec{i} + 25\vec{j} + 8\sqrt{2}\vec{k})$ et ainsi :

L'image du plan $P: x + y + z = 0$ par $g \circ f$ est le plan $P': 11x + 25y + 8\sqrt{2}z = 0$.

Chapitre 19

1) On note $\mathcal{C}_f$ la courbe de f . La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec :

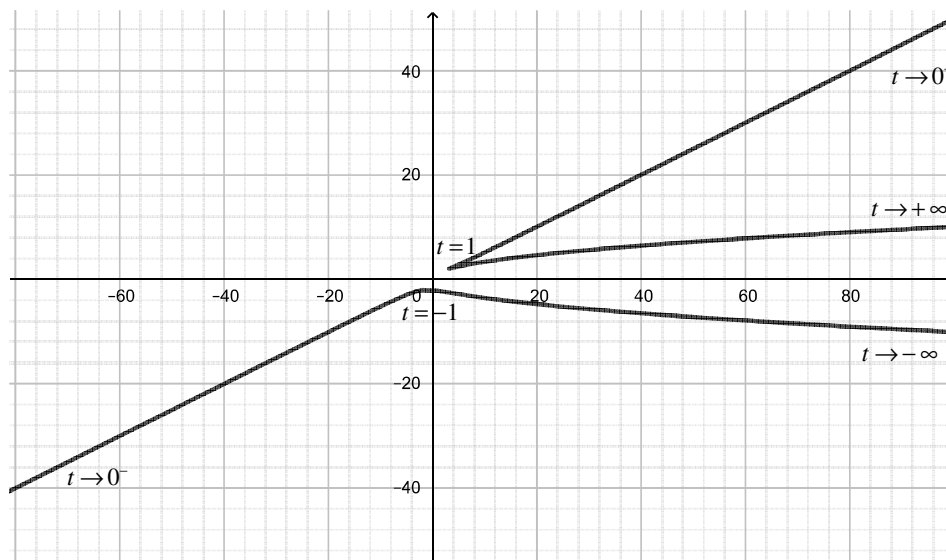
$$f': t \mapsto \begin{cases} x'(t) = 2t - \frac{2}{t^2} = 2 \frac{(t-1)(t^2+t+1)}{t^2} \\ y'(t) = \frac{(t-1)(t+1)}{t^2} \end{cases}$$

On obtient le tableau :

t	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$x'(t)$		$-$	-4	$-$	$+$
x	$+\infty$	-1	$-\infty$	3	$+\infty$
y	$-\infty$	0	$-\infty$	2	$+\infty$
$y'(t)$		$+$	0	$-$	$+$

- On a $\lim_{t \rightarrow \pm \infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$, donc $\mathcal{C}_f$ admet une direction asymptotique horizontale quand $t \rightarrow \pm \infty$.
- On a $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \left[y(t) - \frac{1}{2}x(t) \right] = 0$, donc $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote d'équation $y = \frac{1}{2}x$ en $t \rightarrow 0$.
- On a $f(1+h) - f(1) = h^2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - h^3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + o_{h \rightarrow 0}(h^3)$, et comme $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, le point stationnaire de $\mathcal{C}_f$ est un point de rebroussement de 1^{ère} espèce ($p=2, q=3$).

On obtient la courbe :



On note $\mathcal{C}_g$ la courbe de g . Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$, 2π -périodiques (toute la courbe est obtenue quand t décrit un segment de longueur 2π), respectivement paire et impaire (la courbe est symétrique par rapport à (Ox)) et vérifient $x(\pi-t) = -x(t)$ et $y(\pi-t) = -y(t)$ pour tout t (la courbe est symétrique par rapport à (Oy)). On étudie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

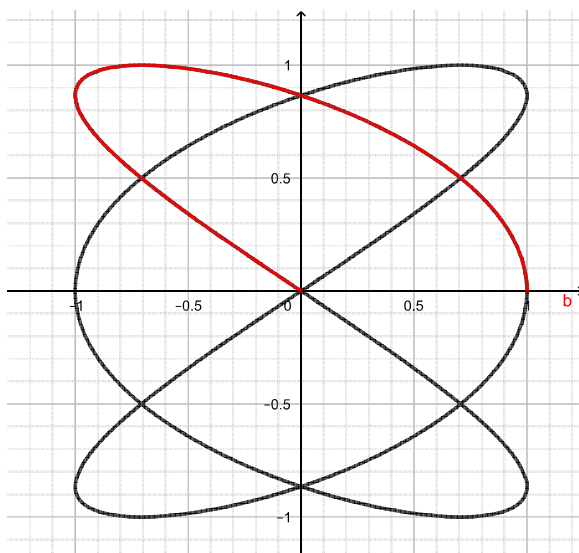
$$g': t \mapsto \begin{cases} x'(t) = -3 \sin(3t) \\ y'(t) = 2 \cos(2t) \end{cases}$$

On obtient le tableau :

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$				
$x'(t)$	0	−	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	−	0	+	3	
x	1	$\xrightarrow{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$			−1	$\rightarrow 0$		
y	0	$\xrightarrow{1}$		1	$\xrightarrow{\frac{\sqrt{3}}{2}}$			0
$y'(t)$	2	+	0	−	−1	−	−2	

On a $f(1+h) - f(1) = h^2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - h^3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + o(h^3)$, et comme $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, le point stationnaire de $\mathcal{C}_g$ est un point de rebroussement de 1^{ère} espèce ($p=2, q=3$).

On obtient la courbe (la partie en rouge est celle correspondant à $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$) :



On note $\mathcal{C}_c$ la courbe de c . Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$ et pour tout t , $x(t+2\pi) = 2\pi a + x(t)$ et $y(t+2\pi) = y(t)$, donc la courbe entière est obtenue par translation de vecteur $(2\pi a k, 0)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ de la partie obtenue quand t décrit $[-\pi, \pi]$. De plus, les fonctions x et y sont respectivement impaire et paire : la courbe est symétrique par rapport à (Oy) et on peut étudier sur $[0, \pi]$.

La fonction c est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

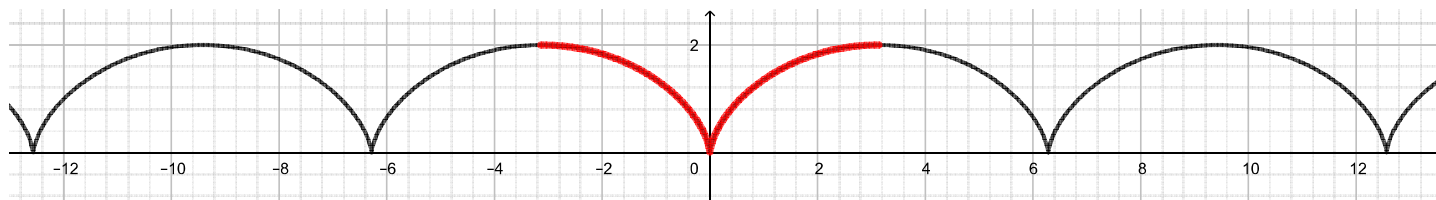
$$c': t \mapsto \begin{cases} x'(t) = a(1 - \cos t) \\ y'(t) = a \sin t \end{cases} \quad c: t \mapsto \begin{cases} x(t) = a(t - \sin t) \\ y(t) = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

On obtient le tableau :

t	0		π
$x'(t)$	0	+	$2a$
x	0	$\xrightarrow{\quad\quad\quad}$	πa
y	0	$\xrightarrow{\quad\quad\quad}$	$2a$
$y'(t)$	0	+	0

On a $c(t) - c(0) = \frac{a}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{a}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + o_{t \rightarrow 0}(t^3)$, et comme $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, le point stationnaire de $\mathcal{C}_c$ est un point de rebroussement de 1^{ère} espèce ($p = 2, q = 3$).

On obtient la courbe pour $a = 1$ (la partie en rouge est celle correspondant à $t \in [-\pi, \pi]$) :



La longueur L d'une arche de $\mathcal{C}_c$ est donnée par :

$$\begin{aligned} L &= \int_{-\pi}^{\pi} \|c'(t)\| dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = a \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = a \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)} dt \\ &= 2a \int_0^{\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = 4a \int_0^{\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 8a \end{aligned}$$

Donc :

La longueur d'une arche de $\mathcal{C}_c$ est $8a$.

2) La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ comme différence d'un quotient de telles fonctions et d'une constante. Si on pose $g(t) = \frac{\arctan t}{1+t^2}$, on a $f(x, y, z) = g(xyz) - \frac{\pi}{8}$ et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = yz g'(xyz) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = xz g'(xyz) \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = xy g'(xyz).$$

De plus, $g(1) = \frac{\arctan 1}{2} = \frac{\pi}{8}$, donc $f(1,1,1) = 0$ et le point $(1,1,1)$ appartient bien à la surface d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$. Une équation du plan tangent à cette surface en $(1,1,1)$ est donnée par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1)(y-1) + \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)(z-1) = 0.$$

Et $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) = \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) = g'(1) = \frac{1 - 2 \arctan 1}{4} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) \neq 0$, donc l'équation ci-dessus équivaut à :

$$x - 1 + y - 1 + z - 1 = 0.$$

Ainsi, une équation du plan tangent en $(1,1,1)$ à la surface d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$ est :

$$x + y + z = 3$$

3) Notons $\vec{f}$ le projecteur vectoriel de $\mathbb{R}^3$ associé à f . Alors, $\vec{f}$ est le projecteur sur $\vec{P} = \text{Vect}(\vec{i}, \vec{j})$, parallèlement $\vec{D} = \text{Vect}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$ et on a :

$$\begin{cases} \vec{f}(\vec{i}) = \vec{i} \\ \vec{f}(\vec{j}) = \vec{j} \\ \vec{f}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = \vec{f}(\vec{i}) - \vec{f}(\vec{j}) + \vec{f}(\vec{k}) = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{f}(\vec{i}) = \vec{i} \\ \vec{f}(\vec{j}) = \vec{j} \\ \vec{f}(\vec{k}) = -\vec{i} + \vec{j} \end{cases}$$

Donc :

$$M_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}(\vec{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace et $M'(x', y', z') = f(M)$.

Comme O appartient à P , on a $\overrightarrow{OM'} = \vec{f}(\overrightarrow{OM})$, donc :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - z \\ y + z \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - z \\ y' = y + z \\ z' = 0 \end{cases}$$

Soit $M'(x', y', z')$. On a :

$$M' \in \mathcal{E} = f(\mathcal{C}) \Leftrightarrow \exists M(x, y, z) \in \mathcal{C}, M' = f(M)$$

$$\Leftrightarrow \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + z^2 = 1, y = 0, \begin{cases} x' = x - z \\ y' = y + z \\ z' = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists (x, z) \in \mathbb{R}^2, x^2 + z^2 = 1, \begin{cases} x' = x - z \\ y' = z \\ z' = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists (x, z) \in \mathbb{R}^2, x^2 + z^2 = 1, \begin{cases} x = x' + y' \\ z = y' \\ z' = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x' + y')^2 + y'^2 = 1 \\ z' = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x' + y')^2 + y'^2 = 1 \\ z' = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'^2 + 2x'y' + 2y'^2 = 1 \\ M' \in P \end{cases}$$

Finalement :

$\mathcal{E}$ a bien pour équation $x^2 + 2y^2 + 2xy = 1$ dans le plan P rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$f(x, y) = f(-x, y) = f(x, -y) = f(y, x) = f(-y, -x).$$

Donc, si $M(x, y, z) \in S$, alors :

$$M_1(-x, y, z) \in S$$

$$M_2(x, -y, z) \in S$$

$$M_3(y, x, z) \in S$$

$$M_4(-y, -x, z) \in S$$

Or, M_1, M_2, M_3, M_4 sont les images respectives de M par les réflexions par rapport aux plans $P_1 = (yOz)$, $P_2 = (xOz)$, P_3 d'équation $y = x$ et P_4 d'équation $y = -x$. Donc :

La surface S est invariante par les réflexions par rapport aux plans $P_1 = (yOz)$, $P_2 = (xOz)$, P_3 d'équation $y = x$ et P_4 d'équation $y = -x$.

La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, car polynomiale, et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 4xy^2 = 2x(1 - 2y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 4x^2y = 2y(1 - 2x^2)$$

Alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(1 - 2y^2) = 0 \\ 2y(1 - 2x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Donc :

Les points critiques de f sont $(0, 0), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

On a $f(0, 0) = 0$ et, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on a :

$$f(at, bt) = (a^2 + b^2)t^2 - 2a^2b^2t^4 \underset{t \rightarrow 0}{\sim} (a^2 + b^2)t^2$$

Comme $(a^2 + b^2)t^2 \geq 0$ pour tout réel t , ceci prouve que :

0 est un minimum local en $(0, 0, 0)$.

Remarquons que $f(0, 1) = -1 < 0$, donc 0 n'est pas un minimum global.

On a $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$, et les points $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ sont les images respectives du point $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ par les réflexions par

rapport aux plans P_1 , P_2 et P_4 . Donc, f est extrémale en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, si et seulement si elle l'est aussi en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$f(x, y) - \frac{1}{2} = x^2 + y^2 - 2x^2y^2 - \frac{1}{2} = -2\left(x^2y^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}\right) = -2\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\left(y^2 - \frac{1}{2}\right).$$

Donc, si $|x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, on a $-2\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) \geq 0$ et $f(x, y) - \frac{1}{2}$ change de signe que $y^2 - \frac{1}{2}$ change de signe. Ainsi, f n'est pas extrémale en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, et donc pas en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Finalement :

La fonction f admet 0 pour unique extremum local (et non global).

5) S est la surface de l'espace d'équation cartésienne $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 1 = 0$.

La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$, car polynomiale, et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 4y \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2z.$$

Alors, si $M(a, b, c)$ est un point de S , on a $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ (car $a^2 + 2b^2 + c^2 = 1$), donc le vecteur $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c), \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c)\right)$ est non nul et une équation cartésienne du plan tangent T_M à S en M est :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c)(y - b) + \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c)(z - c) = 2a(x - a) + 4b(y - b) + 2c(z - c) = 0.$$

Soit :

$$ax + 2by + cz = a^2 + 2b^2 + c^2 = 1.$$

Alors :

$$A(1, 1, 0) \in T_M \Leftrightarrow a + 2b = 1 \Leftrightarrow a = 1 - 2b.$$

Et avec $a^2 + 2b^2 + c^2 = 1$, on a $c^2 = 1 - (1 - 2b)^2 - 2b^2 = 4b - 6b^2 = 2b(2 - 3b)$. Ceci n'est possible que si $b(2 - 3b) \geq 0$, soit $0 \leq b \leq \frac{2}{3}$.

Ainsi :

Les plans tangents à S passant par le point A de coordonnées $(1, 1, 0)$ sont les plans d'équation $ax + 2by + cz = 1$ avec

$$\begin{cases} a = 1 - 2b \\ b \in \left[0, \frac{2}{3}\right] \\ c = \pm \sqrt{2b(2 - 3b)} \end{cases}.$$

Soit T_M un éventuel plan tangent à S en $M(a,b,c)$ contenant D . Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, le point $N(x,x,0)$ appartient à T_M , donc ses coordonnées vérifient l'équation $ax + 2by + cz = 1$ de T_M , soit :

$$ax + 2bx = (a + 2b)x = 1.$$

Ceci doit être vrai pour tout réel x , ce qui est impossible, donc :

Il n'existe pas de plan tangent à S contenant la droite D .

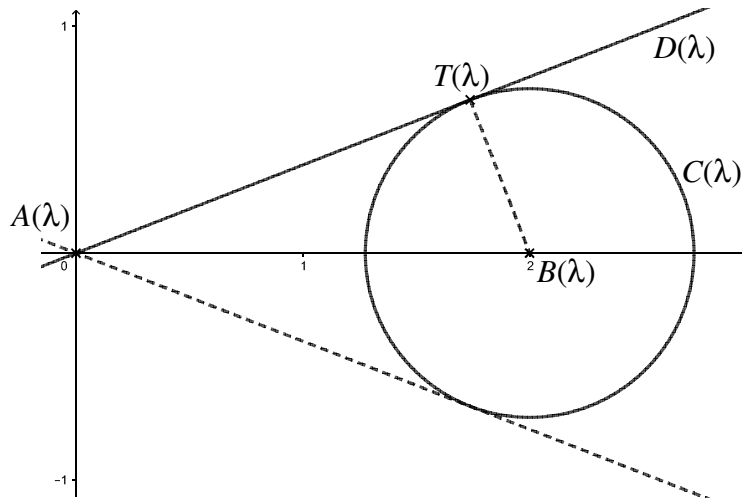
6) La surface S de l'espace d'équation cartésienne $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 1$ est la sphère de centre $\Omega(2,0,0)$ et de rayon 1.

La droite $D(\lambda)$ est horizontale et passe par $A(\lambda)$, de coordonnées $(0,0,\lambda)$, si et seulement si elle est incluse dans le plan horizontal $P(\lambda)$ d'équation $z = \lambda$.

Notons $B(\lambda)$ le point de coordonnées $(2,0,\lambda)$.

L'intersection de $P(\lambda)$ et S est soit vide, quand $|\lambda| > 1$, soit le point $B(\lambda)$ quand $|\lambda| = 1$, soit un cercle $C(\lambda)$ de centre $B(\lambda)$ et de rayon $\sqrt{1-\lambda^2}$ quand $|\lambda| < 1$.

Alors, si $|\lambda| > 1$, $D(\lambda)$ n'existe pas, si $|\lambda| = 1$, $D(\lambda) = (A(\lambda)B(\lambda))$ et si $|\lambda| < 1$, $D(\lambda)$ est tangente à $C(\lambda)$ en un point $T(\lambda)$ tel que sur la figure ci-dessous (en coupe dans le plan $P(\lambda)$ et il existe deux telles droites symétriques par rapport au plan (xOz)).



Si $T(\lambda)$ a pour coordonnées (x, y, λ) , on a :

$$\begin{cases} D(\lambda) = (A(\lambda)T(\lambda)) \perp (B(\lambda)T(\lambda)) \\ T(\lambda) \in C(\lambda) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{A(\lambda)T(\lambda)} \cdot \overrightarrow{B(\lambda)T(\lambda)} = 0 \\ B(\lambda)T(\lambda) = \sqrt{1-\lambda^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) + y^2 = 0 \\ (x-2)^2 + y^2 = 1-\lambda^2 \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$(x, y, \lambda) = \left(\frac{3+\lambda^2}{2}, \pm \sqrt{1 - \left(\frac{1+\lambda^2}{2} \right)^2}, \lambda \right)$$

Alors, $D(\lambda)$ est la droite dirigée par $\vec{u}(\lambda) = \overrightarrow{A(\lambda)T(\lambda)}$, de coordonnées $\left(\frac{3+\lambda^2}{2}, \pm\sqrt{1-\left(\frac{1+\lambda^2}{2}\right)^2}, 0\right)$ et passant par $A(\lambda)$. Remarquons que quand $|\lambda|=1$, on a $\lambda^2=1$, donc $\frac{3+\lambda^2}{2}=2$ et $\sqrt{1-\left(\frac{1+\lambda^2}{2}\right)^2}=0$, et on retrouve le cas vu plus haut.

Ainsi :

- si $|\lambda| > 1$, $D(\lambda)$ n'existe pas ;
- si $|\lambda| \leq 1$, $D(\lambda)$ est la droite dirigée par $\vec{u}(\lambda) \left(\frac{3+\lambda^2}{2}, \pm\sqrt{1-\left(\frac{1+\lambda^2}{2}\right)^2}, 0\right)$ et passant par $A(\lambda)$.

D'après ce qui précède, $\Delta = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} D(\lambda) = \bigcup_{\lambda \in [-1,1]} D(\lambda)$ et, pour un point $M(x, y, z)$ de l'espace, on a :

$$\begin{aligned} M \in \Delta &\Leftrightarrow \exists \lambda \in [-1,1], M \in D(\lambda) \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in [-1,1], \overrightarrow{A(\lambda)M} \text{ et } \vec{u}(\lambda) \text{ sont colinéaires} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \exists \lambda \in [-1,1], \begin{vmatrix} x & \frac{3+\lambda^2}{2} \\ y & \pm\sqrt{1-\left(\frac{1+\lambda^2}{2}\right)^2} \end{vmatrix} = 0 \text{ et } z = \lambda \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in [-1,1], y \frac{3+\lambda^2}{2} = \pm x \sqrt{1-\left(\frac{1+\lambda^2}{2}\right)^2} \text{ et } z = \lambda \\ &\Leftrightarrow z \in [-1,1], y^2 \left(\frac{3+z^2}{2}\right)^2 = x^2 \left(1-\left(\frac{1+z^2}{2}\right)^2\right) \end{aligned}$$

Et :

$$y^2 \left(\frac{3+z^2}{2}\right)^2 = x^2 \left(1-\left(\frac{1+z^2}{2}\right)^2\right) \Leftrightarrow y^2 \left(\frac{3+z^2}{2}\right)^2 - x^2 \left(\frac{3+z^2}{2}\right) \left(\frac{1-z^2}{2}\right) = 0.$$

Et comme pour tout $z \in [-1,1]$, $\frac{3+z^2}{2} \neq 0$, ceci équivaut à :

$$y^2 \left(1+\frac{1+z^2}{2}\right) - x^2 \left(1-\frac{1+z^2}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + y^2)z^2 = x^2 - 3y^2.$$

Donc, une équation cartésienne de la réunion des droites $D(\lambda)$ quand λ décrit $\mathbb{R}$ est :

$$(x^2 + y^2)z^2 = x^2 - 3y^2 \text{ avec } z \in [-1,1].$$

7) a. $f : (x, y) \mapsto x^2 + x^{19} - y^2$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynomiale et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 19x^{18} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y \end{cases} \quad \text{et} \quad H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + (19 \times 18)x^{17} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2 + 19x^{18})x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = -\sqrt[18]{\frac{2}{19}} \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc, f admet deux points critiques : $(0, 0)$ et $\left(-\sqrt[18]{\frac{2}{19}}, 0\right)$. Et on a :

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H_f\left(-\sqrt[18]{\frac{2}{19}}, 0\right) = \begin{pmatrix} 2 - 18 \times 19^{\frac{1}{18}} 2^{\frac{17}{18}} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad 2 - 18 \times 19^{\frac{1}{18}} 2^{\frac{17}{18}} \approx -38,8.$$

Ainsi :

- $H_f(0, 0) \notin S_2^+(\mathbb{R})$ et $-H_f(0, 0) \notin S_2^+(\mathbb{R})$, donc f n'admet pas d'extremum en $(0, 0)$;
- $-H_f\left(-\sqrt[18]{\frac{2}{19}}, 0\right) \in S_2^{++}(\mathbb{R})$, donc f admet un maximum local strict en $\left(-\sqrt[18]{\frac{2}{19}}, 0\right)$.

Enfin :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{19} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{19} = -\infty.$$

Donc, f n'admet pas d'extremum global.

Finalement :

$$f \text{ admet un maximum local, non global, strict en } \left(-\sqrt[18]{\frac{2}{19}}, 0\right), \text{ qui vaut } f\left(-\sqrt[18]{\frac{2}{19}}, 0\right) = \left(\frac{2}{19}\right)^{\frac{1}{9}} - \left(\frac{2}{19}\right)^{\frac{19}{18}}.$$

b. $f : (x, y) \mapsto \sin(x^2 + y^2)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme composée d'une fonction polynomiale de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ par la fonction sinus de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \cos(x^2 + y^2) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \cos(x^2 + y^2) \end{cases}$$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 \cos(x^2 + y^2) - 4x^2 \sin(x^2 + y^2) & -4xy \sin(x^2 + y^2) \\ -4xy \sin(x^2 + y^2) & 2 \cos(x^2 + y^2) - 4y^2 \sin(x^2 + y^2) \end{pmatrix}.$$

Remarquons que quand $\cos(x^2 + y^2) = 0$, (x, y) est un point critique et :

- $f(x, y)$ est maximal, et vaut 1, quand $x^2 + y^2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}$;
- $f(x, y)$ est minimal, et vaut -1 , quand $x^2 + y^2 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

Enfin, $(0, 0)$ est le dernier point critique et $H_f(0, 0) = 2I_2 \in S_2^{++}(\mathbb{R})$, donc f admet 0 pour minimum local (mais non global) strict en $(0, 0)$.

Finalement :

f admet :

- 1 pour maximum global atteint en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^2 + y^2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}$;
- -1 pour minimum global atteint en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^2 + y^2 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}^*$;
- 0 pour minimum local strict en $(0, 0)$.