

Lois de probabilité usuelles

Loi uniforme

Une variable aléatoire X définie sur Ω , avec $\text{Card}(X(\Omega)) = N$, suit une loi uniforme si pour tout $x \in X(\Omega)$:

$$P(X = x) = \frac{1}{N}.$$

- Série génératrice : Pour tout $t \in \mathbb{R}$: $G_X(t) = \frac{1}{N} \sum_{n \in X(\Omega)} t^n$.
- Espérance : Si X suit une loi uniforme avec $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, alors : $E(X) = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$.

Loi de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire n'ayant que deux issues possibles (notées en général succès et échec).

Une variable aléatoire de Bernoulli est une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \{0, 1\}$.

Une loi de Bernoulli est la loi de probabilité associée à une épreuve de Bernoulli ou à variable aléatoire de Bernoulli.

La probabilité $p \in [0; 1]$ est de « succès », soit $(X = 1)$, est appelée paramètre de la loi, qui est notée $\mathcal{B}(p)$.

$$\text{Si } X \hookrightarrow \mathcal{B}(p) : \begin{cases} P(X = 1) = p \\ P(X = 0) = 1 - p \end{cases}.$$

- Série génératrice : Pour tout $t \in \mathbb{R}$: $G_X(t) = pt + 1 - p$.
- Espérance : $E(X) = p$.
- Variance : $V(X) = p(1 - p)$.

Loi binomiale

Un schéma de Bernoulli est une expérience aléatoire consistant à répéter une épreuve de Bernoulli plusieurs fois de suite et de manière indépendante.

Une loi binomiale est la loi suivie par la variable aléatoire donnant le nombre de succès à l'issue d'un schéma de Bernoulli. Si l'épreuve de Bernoulli est répétée n fois et p est le paramètre associé à l'épreuve, la loi binomiale est notée $\mathcal{B}(n, p)$ et n et p sont les paramètres de cette loi.

- Si $X_1, \dots, X_n$ sont n variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes et toutes de même paramètre p , alors $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

$$\text{Si } X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p), \text{ pour tout } k \in X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket : P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

- Série génératrice : Pour tout $t \in \mathbb{R}$: $G_X(t) = (pt + 1 - p)^n$.
- Espérance : $E(X) = np$.
- Variance : $V(X) = np(1 - p)$.

Loi géométrique

Si on répète indéfiniment et de manière indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre p , alors le rang d'apparition du premier succès suit une loi géométrique de paramètre p avec $p \in]0,1[$.

Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, pour tout $k \in X(\Omega) = \mathbb{N}^*$:

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1} p.$$

- Une loi géométrique est une loi *sans mémoire* : si une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p , alors pour tous $k, n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$P_{(X>n)}(X > n+k) = P(X > k).$$

Réciproquement, toute loi vérifiant la propriété ci-dessus est une loi géométrique.

Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$:

- Série génératrice : Pour tout $x \in \left] -\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p} \right[$: $G_X(t) = \frac{pt}{1-(1-p)t}$.
- Espérance : $E(X) = \frac{1}{p}$.
- Variance : $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

Loi de Poisson

Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

- Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2 . La variable $X_1 + X_2$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.
- *Approximation de la loi binomiale par une loi de Poisson* : Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires sur Ω telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$:

- Série génératrice : Pour tout $t \in \mathbb{R}$: $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.
- Espérance : $E(X) = \lambda$.
- Variance : $V(X) = \lambda$.