

Résumé du chapitre 10 : Intégration sur un intervalle

Dans tout le chapitre, et sauf mention contraire, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f est une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I - Fonctions continues par morceaux

I-1. Définitions

Rappels :

- Une subdivision d'un segment $[a, b]$ est une famille $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ telle que $a_0 = a$, $a_n = b$ et pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $a_k < a_{k+1}$.
- Une subdivision $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ d'un segment $[a, b]$ est régulière si pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $a_{k+1} - a_k$ ne dépend pas de k et vaut alors $\frac{b-a}{n}$. Dans ce cas, on a pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$:

$$a_k = a + k \frac{b-a}{n}.$$

Définitions :

Une fonction f définie sur un segment $[a, b]$ est dite continue par morceaux (cpm) sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, f est continue sur $]a_k, a_{k+1}[$ et admet une limite finie en a_k^+ et en a_{k+1}^- . La subdivision σ est dite adaptée à f .

Une fonction f est continue par morceaux sur un intervalle I si elle l'est sur tout segment inclus dans I .

Notation : On note $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Propriété :

- $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{K})$ (fonctions bornées sur $[a, b]$), stable par produit.
- $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$, stable par produit.

I-2. Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Définition :

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ et $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f .

L'intégrale de f sur $[a, b]$, notée $\int_{[a, b]} f$ ou $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(t)dt$, est $\sum_{k=0}^{n-1} \int_{[a_k, a_{k+1}]} \tilde{f}_k$ avec :

$$\tilde{f}_k : x \mapsto \begin{cases} \lim_{a_k^+} f & \text{en } a_k \\ f(x) & \text{sur }]a_k, a_{k+1}[\\ \lim_{a_{k+1}^-} f & \text{en } a_{k+1} \end{cases}.$$

Propriétés :

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

- *Linéarité de l'intégrale* : Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a $\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g$.
- *Positivité* : Si f est réelle et positive sur $[a, b]$, alors $\int_{[a,b]} f \geq 0$.
- *Croissance de l'intégrale* : Si $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors $\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$.
- *Inégalité de la valeur absolue ou du module* : $\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$.
- *Inégalités de la moyenne* : $\left| \int_{[a,b]} f g \right| \leq \sup_{[a,b]} |f| \int_{[a,b]} |g|$.

Si m est un minorant et M est un majorant de f sur $[a, b]$ (f à valeurs réelles), alors :

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f \leq M.$$

- *Relation de Chasles* : Pour tout $c \in [a, b]$, $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$.
- *Inégalité de Cauchy-Schwarz* : $\left(\int_{[a,b]} f \times g \right)^2 \leq \left(\int_{[a,b]} f^2 \right) \times \left(\int_{[a,b]} g^2 \right)$.
- *Changement de variable* : Si φ est une bijection de classe C^1 de I dans J avec $[a, b] \subset J$, alors :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} \varphi'(u) f(\varphi(u)) du.$$

II - Intégrales généralisées ou impropres

II-1. Intégrales généralisées sur $[a, +\infty[$

Dans cette partie, a est un réel fixé.

Définitions :

Si f est une application continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et à valeurs complexes.

L'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge ou est convergente si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Si tel est le cas, on note $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ ou $\int_a^{+\infty} f$ cette limite.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale diverge ou est divergente.

Propriété :

Si f est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et à valeurs positives, alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée.

Corollaire :

Si f et g sont continues par morceaux sur $[a, +\infty[$ et $0 \leq f \leq g$, alors :

- si $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ aussi ;
- si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge, $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ aussi.

II-2. Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

Soient $I =]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $] =]$ ou $[$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $a \leq b$, et f une fonction à valeurs réelles ou complexes, continue par morceaux sur I .

Définitions :

L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est dite impropre en a (resp. en b) si $a \notin I$ (resp. $b \notin I$).

On dit qu'elle converge ou est convergente si, pour tout $c \in I$, les fonctions $x \mapsto \int_x^c f(t)dt$ et $y \mapsto \int_c^y f(t)dt$ admettent une limite finie lorsque x tend vers a et y tend vers b .

Dans ce cas, on note $\int_a^b f(t)dt$, ou $\int_a^b f$, ou encore $\int_I f$, la limite de $\int_x^y f(t)dt$ quand $x \rightarrow a$ et $y \rightarrow b$.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale diverge ou est divergente.

Notation : Par convention, $[f]_a^b = \lim_b f - \lim_a f$ et on utilise cette notation quand les deux limites existent et sont finies.

II-3. Intégrales de référencea. Intégrales de Riemann :Définition :

Les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ et $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ sont appelées intégrales de Riemann.

Propriété :

L'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$, impropre en 0, converge si et seulement si $\alpha < 1$ et vaut $\frac{1}{1-\alpha}$ dans ce cas.

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$, impropre en $+\infty$, converge si et seulement si $\alpha > 1$ et vaut $\frac{1}{\alpha-1}$ dans ce cas.

b. Autres intégrales de référence :Propriété :

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$ et dans ce cas, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}$.

Propriété :

Pour tout réel $a > 0$, l'intégrale $\int_0^a \ln t \, dt$ converge et vaut $\int_0^a \ln t \, dt = a \ln a - a$.

II-4. Propriétés des intégrales généraliséesa. Propriétés usuelles :Propriétés :

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $I =]a, b[$ (comme défini plus haut) telles que les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent.

- *Linéarité de l'intégrale* : Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\int_a^b (\lambda f + \mu g)$ converge et $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.
- *Positivité* : Si f est réelle et positive sur I , alors $\int_a^b f \geq 0$.

De plus, si f est continue sur I , alors $\int_I f = 0$ si et seulement si f est nulle sur I .

- *Croissance de l'intégrale* : Si $f \leq g$ sur I , alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
- *Relation de Chasles* : Pour tout $c \in I$, $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

b. Changement de variable :Propriété :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$, continue par morceaux sur I et φ une bijection strictement monotone de classe C^1 d'un intervalle $J =]\alpha, \beta[$ dans I .

L'intégrale $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du$ converge si et seulement si $\int_a^b f(t)dt$ est convergente et, dans ce cas, les deux intégrales sont égales.

c. Intégration par parties :

Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur I .

Si $[f(t)g(t)]_a^b$ converge, alors les intégrales $\int_a^b f(t)g'(t)dt$ et $\int_a^b f'(t)g(t)dt$ sont de même nature et en cas de convergence, on a :

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt.$$

III - Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

III-1. Généralités

Définitions :

Soit f une fonction continue par morceaux sur $I =]a, b[$.

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente si l'intégrale $\int_a^b |f(t)|dt$ converge.

Dans ce cas, on dit que la fonction f est intégrable sur I .

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est semi-convergente si elle converge sans que $\int_a^b |f(t)|dt$ converge.

III-2. Propriétés de comparaison

Lemme :

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux et positives sur $I =]a, b[$ telles que $f \leq g$.

Si $\int_a^b g(t)dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)dt$ aussi et $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

Théorème :

Soit f une fonction continue par morceaux sur $I =]a, b[$.

Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente, alors elle est convergente et dans ce cas, on a :

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

Propriétés :

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$ avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$.

- Si $|f| \leq |g|$, alors si g est intégrable sur $[a, b[$, f l'est aussi avec $\int_a^b |f| \leq \int_a^b |g|$ et si f n'est pas intégrable sur $[a, b[$, g ne l'est pas non plus.
- Si $f = O_b(g)$ ou $f = o_b(g)$, on a les mêmes résultats que ci-dessus.
- Si $f \sim_b g$, alors f est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si g l'est.

Corollaire :

Si a et b sont finis et f est continue par morceaux sur $I = [a, b[$ (resp. $I =]a, b]$, resp. $I =]a, b[$) et admet une limite finie en b (resp. en a , resp. en a et b), alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.

Propriété : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $I =]a, b[$ (comme défini plus haut) telles que les intégrales $\int_a^b f^2$ et $\int_a^b g^2$ convergent. Alors $\int_a^b fg$ converge et :

$$\left(\int_a^b fg \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2 \right) \times \left(\int_a^b g^2 \right).$$

III-3. Espace $L^1(I, \mathbb{K})$ des fonctions intégrables

Notation : On note $L^1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions définies sur I , à valeurs dans $\mathbb{K}$, continues par morceaux et intégrables sur I .

Propriétés :

Muni des lois usuelles, $L^1(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

L'application $f \mapsto \int_a^b |f|$ est une norme sur $L^1(I, \mathbb{K}) \cap C^0(I, \mathbb{K})$.