

Résumé du chapitre 11 : Intégrales à paramètre

Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire, I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Suites et séries de fonctions intégrables

Théorème : (de convergence dominée)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions définies sur I .

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I .
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I .
- Il existe une fonction φ , continue par morceaux et intégrable sur I , telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in I$, on a $|f_n(t)| \leq \varphi(t)$.

Alors :

$$f_n \text{ et } f \text{ sont intégrables sur } I \text{ et } \int_I f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f(t) dt.$$

Théorème : (d'intégration terme à terme)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions définies sur I .

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux et intégrable sur I .
- La série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f , continue par morceaux sur I .
- La série $\sum \int_I |f_n|$ converge.

Alors :

$$f \text{ est intégrable sur } I \text{ et } \int_I f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt.$$

Intégrales à paramètre

Théorème : (de convergence dominée à paramètre continu)

Soit $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ une fonction définie sur $I \times J$, où I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $a \in I$ ou a est une extrémité, éventuellement infinie, de I .

- pour tout $t \in J$, $f(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell(t)$;
- pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x, t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur J ;
- il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur J , telle que pour tout $(x, t) \in I \times J$, on ait $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$.

Alors, pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x, t)$ et ℓ sont intégrables sur J et $\int_J f(x, t) dt \xrightarrow{x \rightarrow a} \int_J \ell(t) dt$.

Théorème : (continuité)

Soit $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ une fonction définie sur $I \times J$.

- Pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur J .
- Pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur I .
- Il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur J , telle que pour tout $(x, t) \in I \times J$, on ait $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$.

Alors :

Pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur J et $x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est continue sur I .

Théorème : (de dérivation sous le signe somme)

Soit $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ une fonction définie sur $I \times J$.

- Pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J .
- Pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur I .
- Pour tout $x \in I$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur J .
- Il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur J , telle que pour tout $(x, t) \in I \times J$, on ait $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$.

Alors :

- Pour tout $x \in I$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur J .
- La fonction $x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est de classe C^1 sur I , de dérivée $x \mapsto \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.

Théorème : (extension aux fonctions de classe C^k)

Soient $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ une fonction définie sur $I \times J$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

- Pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^k sur I .
- Pour tout $x \in I$ et tout $i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, $t \mapsto \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J .
- Pour tout $x \in I$, $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est continue par morceaux sur J .
- Il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur J , telle que pour tout $(x, t) \in I \times J$, on ait $\left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$.

Alors :

- Pour tout $x \in I$, $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est intégrable sur J .
- La fonction $x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est de classe C^k sur I , de dérivées successives $x \mapsto \int_J \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t) dt$.

Corollaire : (classe C^∞)

Soit $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ une fonction définie sur $I \times J$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

- pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^k sur I ;
- pour tout $x \in I$, $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est continue par morceaux sur J ;
- il existe une fonction φ_k positive, continue par morceaux et intégrable sur J , telle que pour tout $(x, t) \in I \times J$, on ait $\left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi_k(t)$.

Alors :

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$, $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est intégrable sur J .
- La fonction $x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est de classe C^∞ sur I , de dérivées successives $x \mapsto \int_J \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) dt$.