

Résumé du chapitre 15 : Série génératrice

Dans tout le chapitre, on se place dans espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Sauf mention contraire, les variables aléatoires considérées à valeurs dans $\mathbb{N}$.

I - Série génératrice

I-1. Fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$

Définition :

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

La fonction ou série génératrice de X est la série entière :

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) t^n.$$

Une fonction f peut être considérée comme la fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ si et seulement si :

- $f(1) = 1$;
- f soit développable en série entière sur $[-1, 1]$;
- tous les coefficients du développement en série entière sont positifs.

Propriété :

Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Quand les séries convergent, on a :

$$G_{X_1+X_2} = G_{X_1} G_{X_2}.$$

I-2. Série génératrice des lois usuelles

Propriété :

Soit X une variable aléatoire à valeurs entières.

- Si $X(\Omega)$ est fini de cardinal N et X suit une loi uniforme, alors $G_X(t) = \frac{1}{N} \sum_{n \in X(\Omega)} t^n$ sur $\mathbb{R}$.
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, $G_X(t) = pt + 1 - p$ sur $\mathbb{R}$.
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, $G_X(t) = (pt + 1 - p)^n$.
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, $G_X(t) = \frac{pt}{1 - (1 - p)t}$ sur $\left] -\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p} \right[$.
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ sur $\mathbb{R}$.

II - Espérance, variance et fonction génératrice

II-1. Espérance et fonction génératrice

Propriété :

La variable aléatoire X admet une espérance finie $E(X)$ si et seulement si G_X est dérivable en 1.

Si tel est le cas, on a alors :

$$E(X) = G_X'(1).$$

II-2. Variance et fonction génératrice

Propriété :

La variable aléatoire X admet une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1.

Si tel est le cas, on a alors :

$$V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2.$$