

Résumé du chapitre 17 : Endomorphismes particuliers d'un espace euclidien

Dans ce chapitre, E est un espace vectoriel préhilbertien réel. On note $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire de E et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

I – Projections orthogonales

I-1. Projection orthogonale

Théorème et définition :

Soit F un sous-espace vectoriel de E , F de dimension finie.

$$\forall x \in E, \exists ! x_F \in F \text{ s.t. } x - x_F \in F^\perp.$$

Le vecteur x_F est appelé projeté orthogonal de x sur F et l'application p_F de E dans E , qui à x associe x_F est linéaire et est appelée projection orthogonale sur F .

Propriété :

Soient F un sous-espace de dimension finie de E et p_F la projection orthogonale sur F .

Si $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une base orthonormale de F , alors pour tout $x \in E$:

$$p_F(x) = (e_1 | x)e_1 + (e_2 | x)e_2 + \dots + (e_p | x)e_p.$$

Propriétés :

Soit F un sous-espace de dimension finie de E .

- $F \oplus F^\perp = E$.
- La projection orthogonale sur F est le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$.

I-2. Distance à un sous-espace vectoriel

Propriété et définition :

Soient A une partie non vide de E et $x_0 \in E$.

L'ensemble $\{\|a - x_0\| \mid a \in A\}$ admet une borne inférieure appelée distance de x_0 à A , notée $d(x_0, A)$.

Propriété :

Si F est un sous-espace de dimension finie de E , et p_F est la projection orthogonale sur F , alors pour tout $x \in E$, on a :

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\|.$$

I-3. Projection orthogonale sur un hyperplan

Propriété et définition :

Soient $u \in E \setminus \{0\}$ et p est la projection orthogonale sur $\text{Vect}(u)$. L'application $id_E - p$ est le projecteur sur $(\text{Vect}(u))^\perp$ parallèlement à $\text{Vect}(u)$, appelé projection orthogonale sur l'hyperplan $(\text{Vect}(u))^\perp$.

Propriété :

Soit $u \in E$ unitaire. La distance entre un vecteur x de E et $H = (\text{Vect}(u))^\perp$ est :

$$d(x, H) = |(u | x)|.$$

II – Isométries vectorielles

Dans cette partie, E est euclidien.

II-1. Définition

Définition :

Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie (vectorielle) de E s'il conserve la norme, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|.$$

Définitions :

Soit F un sous-espace de E .

La symétrie orthogonale par rapport à F est la symétrie par rapport à F et parallèlement à $F^\perp$.

Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E est appelée réflexion.

Propriété :

Les symétries orthogonales sont des isométries.

II-2. Caractérisation des isométries

Propriété : caractérisation par la conservation du produit scalaire

Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie si et seulement s'il conserve le produit scalaire, c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in E^2, (f(x) | f(y)) = (x | y).$$

Propriété :

Les isométries sont des automorphismes.

Propriété :

Soit f une isométrie de E . Si F est un sous-espace de E stable par f , alors $f(F) = F$ et $f(F^\perp) = F^\perp$.

Propriété : caractérisation par l'image d'une base orthonormée

Un endomorphisme de E est une isométrie de E si et seulement s'il transforme une base orthonormée quelconque en une base orthonormée.

II-3. Le groupe orthogonal de E

Définition :

L'ensemble des isométries de E est appelé groupe orthogonal de E , noté $O(E)$.

Propriété :

La composée de deux isométries est une isométrie et la réciproque d'une isométrie est une isométrie.

II-4. Matrices orthogonales

Dans cette partie $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique.

Définition :

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale $M^T M = I_n$.

On note $O(n)$ ou $O_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Propriété : Caractérisation des matrices orthogonales

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M est une isométrie.

Propriété :

$M \in O(n)$ si et seulement si ses colonnes (assimilés à des vecteurs de $\mathbb{R}^n$) forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Propriété :

Un endomorphisme u de E appartient à $O(E)$ si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée de E est orthogonale.

Propriété :

$O(n)$, muni du produit matriciel, est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

II-5. Groupe spécial orthogonal

Propriété :

Pour tout $M \in O(n)$, $\det M = \pm 1$.

Définitions :

L'ensemble des matrices de $O(n)$ dont le déterminant vaut 1 est appelé groupe spécial orthogonal, noté $SO(n)$ ou $SO_n(\mathbb{R})$.

Une matrice de $SO(n)$ est dite matrice orthogonale positive et une matrice de $O(n) \setminus SO(n)$ est dite matrice orthogonale négative.

L'ensemble des automorphismes orthogonaux de E de déterminant égal à 1 est appelé groupe spécial orthogonal de E , noté $SO(E)$. Les éléments de $SO(E)$ sont appelés des rotations.

Propriété :

$(SO(n), \times)$ (resp. $(SO(E), \circ)$) est un sous-groupe de $(O(n), \times)$ (resp. $(O(E), \circ)$).

II-6. Changement de base orthonormale

Propriété :

Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E , $\mathcal{B}'$ une autre base de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

La base $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée si et seulement si $P \in O(n)$.

De plus, si E est orienté et $\mathcal{B}$ est directe, alors $\mathcal{B}'$ est orthonormée directe si et seulement si $P \in SO(n)$.

III – Endomorphismes autoadjoints

Dans cette partie à nouveau, E est euclidien.

III-1. Endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien

Définition :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est autoadjoint ou symétrique si pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$(u(x) | y) = (x | u(y)).$$

Notation : On note $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E .

Propriété :

$S(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Propriété :

Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors u est autoadjoint si et seulement si $M_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique.

III-2. Réduction des endomorphismes autoadjoints : théorème spectral

Théorème : *Théorème spectral*

Tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien admet une base orthonormale de vecteurs propres. Autrement dit, tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien est diagonalisable dans une base orthonormée.

Corollaire : *Interprétation matricielle du théorème spectral*

Pour toute matrice symétrique réelle A , il existe une matrice diagonale réelle D et une matrice orthogonale P telles que $A = PDP^{-1} = PDP^T$.

III-3. Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs

Définition :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint.

On dit que u est positif si pour tout $x \in E$, $(x | u(x)) \geq 0$.

On dit que u est défini positif si pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $(x | u(x)) > 0$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique.

On dit que A est positive si, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $X^T A X \geq 0$.

On dit que A est définie positive si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, on a $X^T A X > 0$.

Notations :

- On note $S^+(E)$ et $S^{++}(E)$ les ensembles des endomorphismes de E autoadjoint respectivement positifs et définis positifs.
- On note $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ les ensembles des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ respectivement positives et définies positives.

Propriété :

Un endomorphisme autoadjoint u de E est positif (resp. défini positif) si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).

Une matrice symétrique A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est positive (resp. définie positive) si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).