

Résumé du chapitre 18 : Espaces euclidiens de dimension 2 ou 3

Dans ce chapitre, E est un espace euclidien orienté.

Les vecteurs seront notés avec des flèches : $\vec{u}$, $\vec{v}$, ...

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E sera noté $(\vec{u} | \vec{v})$ ou $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et la norme d'un vecteur $\vec{u}$ sera notée $\|\vec{u}\|$.

I – Produit vectoriel, produit mixte

I-1. Produit vectoriel

Dans cette partie, E est de dimension 3 et est muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Définition :

Soient $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$.

Le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, est le vecteur :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - y'z)\vec{i} + (x'z - xz')\vec{j} + (xy' - x'y)\vec{k}.$$

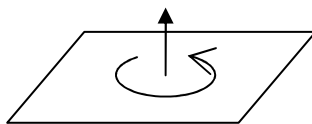
Propriétés : (non mentionnées dans le programme)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de E .

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est normal au plan $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe de E .
- $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2$.
- Le produit vectoriel est bilinéaire et antisymétrique.

Orientation d'un plan ou d'une droite :

Un plan de E est orienté par la donnée d'un vecteur normal :



Une droite D de l'espace est orientée par la donnée d'un vecteur directeur (ou d'un plan orienté orthogonal à D).

I-2. Produit mixte

a. Produit mixte dans le plan :

Dans cette partie, E est de dimension 2 et est muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$.

Propriété et définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de E . Le réel $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v})$ ne dépend pas de la base orthonormée directe choisie. On appelle ce nombre produit mixte de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $[\vec{u}, \vec{v}]$.

Propriété et définition : (non mentionnées dans le programme)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de E .

Il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que :

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{[\vec{u}, \vec{v}]}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}.$$

Le réel θ , noté $(\vec{u}, \vec{v})$, est la mesure de l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Interprétation géométrique

$[\vec{u}, \vec{v}]$ est le « aire algébrique » du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Une application : Equation d'une droite dans une base orthonormée directe

Une équation cartésienne de la droite $\text{Vect}(\vec{u})$ est donnée $[\vec{u}, \vec{v}] = 0$ avec $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

b. Produit mixte dans l'espace :

Dans cette partie, E est à nouveau de dimension 3 et muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Définition :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

Le produit mixte de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, noté $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, est le réel :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}.$$

Interprétation géométrique

$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ est le « volume algébrique » de P .

Propriété :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. On a dans la base orthonormée directe $\mathcal{B}$:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}).$$

Corollaires : (non mentionnées dans le programme)

- Le produit mixte est trilineaire et antisymétrique.
- Trois vecteurs de l'espace $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$.

Une application : Equation d'un plan dans une base orthonormée directe

Une équation cartésienne du plan $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ est donnée $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ avec $\vec{w} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

II – Isométries vectorielles d'un plan euclidien

Dans cette partie, E est de dimension 2 et est muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$.

II-1. Caractérisation des isométries du plan

Propriété :

Dans un plan euclidien, tout automorphisme orthogonal est soit une rotation, soit une réflexion et, dans une base orthonormée directe, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, unique modulo 2π , tel que la matrice :

- d'une rotation r est de la forme $R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$;
- d'une réflexion est de la forme $S(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$.

Dans ce cas, c'est une réflexion par rapport à la droite $\mathbb{R}\vec{a}$, appelée axe de la réflexion, où $(\vec{i}, \vec{a}) = \frac{\alpha}{2}$.

Corollaire :

$$SO(2) = \{R(\theta), \theta \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad O^-(2) = \{S(\theta), \theta \in \mathbb{R}\}.$$

II-2. Rotations du plan

Propriété :

Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$:

$$R(\theta)R(\theta') = R(\theta')R(\theta) = R(\theta + \theta').$$

Propriété et définition :

Soit une rotation r de matrice $R(\alpha)$ dans une base orthonormée directe du plan.

La matrice de r est $R(\alpha)$ dans toute base orthonormée directe du plan et $R(-\alpha)$ dans toute base orthonormée indirecte du plan.

Le réel α est appelé mesure de l'angle orienté de la rotation r .

Propriétés :

- $(SO(2), \times)$ est un sous-groupe commutatif de $(O(2), \times)$.
- La composée de deux rotations du plan est une rotation du plan dont l'angle est la somme des angles des deux rotations.
- La réciproque d'une rotation de plan est la rotation du plan d'angle opposé.

Propriété : Écriture complexe d'une rotation

Soit r une rotation d'angle α du plan vectoriel complexe (qui est orienté).

Pour tout vecteur $\vec{u}$ d'affixe z , l'affixe de $r(\vec{u})$ est $z' = e^{i\alpha} z$.

Réciproquement, si f est une application du plan vectoriel complexe dans lui-même, d'écriture complexe $z' = e^{i\alpha} z$, alors f est la rotation d'angle α .

Propriété :

Soit r une rotation d'angle α du plan (orienté) E . Pour tout $\vec{u} \in E \setminus \{\vec{0}\}$, on a :

$$(\vec{u}, r(\vec{u})) = \alpha [2\pi].$$

III – Isométries d'un espace euclidien de dimension 3

Dans cette partie, E est de dimension 3 et est muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

III-1. Caractérisation des isométries de l'espacePropriété :

Les isométries d'un espace euclidien de dimension 3 sont soit des rotations, soit des réflexions, soit des composées d'une rotation et d'une réflexion.

III-2. Rotations de l'espaceDéfinitions :

Soit r une rotation de E .

La droite vectorielle orientée $F = \ker(r - id_E)$ est l'axe de la rotation r et l'endomorphisme induit par r sur $F^\perp$ est une rotation dont l'angle orienté est appelé (mesure de l') angle de la rotation r .

Une rotation d'angle π s'appelle un retournement de l'espace (*non mentionné dans le programme*).

Propriété : (non mentionnées dans le programme)

Soit r une rotation de E , d'angle θ . On a :

$$tr(r) = 1 + 2 \cos \theta.$$