

Résumé du chapitre 19 : Applications géométriques des fonctions vectorielles

I - Arcs paramétrés

I-1. Définition

Définitions :

Soit $t \mapsto \vec{f}(t)$ une application définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

L'arc paramétré ou courbe paramétrée associé(e) à $\vec{f}$ est l'ensemble des points $M(t)$ du $\mathbb{R}^n$ tels que pour tout $t \in D$, on a $\overrightarrow{OM}(t) = \vec{f}(t)$ où O est une origine de $\mathbb{R}^n$ (considéré ici comme un espace affine).

Si $\vec{f}$ est de classe C^k , avec $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, on dit que l'arc paramétré est de classe C^k .

Dans la suite, le plan affine usuel est muni de son repère orthonormé direct canonique $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$) et, pour tout $t \in D$, on note $x(t)$ et $y(t)$ les coordonnées de $\vec{f}(t)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. On a donc $\vec{f} : t \mapsto (x(t), y(t))$ et $\overrightarrow{OM}(t) = \vec{f}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$.

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée associée à $\vec{f}$

Tout ceci se généralise à $\vec{f} : t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ dans $\mathbb{R}^3$, $\vec{f} : t \mapsto (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ dans $\mathbb{R}^n$.

I-2. Construction d'arcs paramétrés du plan

a. Réduction de l'ensemble d'étude :

Comme pour les fonctions numériques, certaines propriétés de $\vec{f}$ induisent des symétries de la courbe $\mathcal{C}$ et permettent de réduire l'ensemble d'étude.

Périodicité :

Si x et y sont T -périodiques avec $T > 0$ (i.e. $t \in D \Leftrightarrow t+T \in D$ et pour tout $t \in D$, $\vec{f}(t+T) = \vec{f}(t)$), alors la courbe est parcourue entièrement quand t décrit l'intersection de D et d'un intervalle de longueur T , par exemple $D \cap [0; T]$ ou $D \cap \left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$ (ce dernier cas est souvent préféré pour faire des études de parité).

Symétries :

On peut éventuellement établir des symétries de la courbe si D est symétrique par rapport à 0 et si les fonctions x et y sont paires ou impaires. Si pour tout $t \in D$, $-t \in D$ et :

- $\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$, alors la courbe est parcourue deux fois ;
- $\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$, alors la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ;
- $\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$, la courbe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses ;
- $\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$, alors la courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère ;

- $\begin{cases} x(-t) = y(t) \\ y(-t) = x(t) \end{cases}$, alors la courbe est symétrique par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.

b. Variations et limites :

Comme pour une fonction numérique usuelle, on étudie les variations (dérivées) et les limites des deux fonctions x et y sur leur ensemble de définition commun (éventuellement réduit). On dresse alors un tableau de variations synthétique.

c. Tangentes :

Définitions :

On suppose que $t \mapsto \vec{f}(t)$ est dérivable en t_0 .

Si $\vec{f}'(t_0) \neq \vec{0}$ (i.e. $x'(t_0) \neq 0$ ou $y'(t_0) \neq 0$) alors on dit que $M(t_0)$ est un point régulier.

Si $\vec{f}'(t_0) = \vec{0}$ (i.e. $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) = 0$) alors on dit que $M(t_0)$ est un point stationnaire ou singulier.

Si tous les points de la courbe sont réguliers, on dit qu'elle est régulière.

On suppose que $t \mapsto \vec{f}(t)$ est deux fois dérivable en t_0 .

Si la famille $(\vec{f}'(t_0), \vec{f}''(t_0))$ est libre, on dit que $M(t_0)$ est un point birégulier.

Si tous les points de la courbe sont biréguliers, on dit qu'elle est birégulière.

Définitions :

On suppose que $t \mapsto \vec{f}(t)$ est définie au voisinage de t_0 .

La courbe associée à $\vec{f}$ admet une tangente en $M(t_0)$ si l'on peut trouver une fonction vectorielle $\vec{u}(t)$ telle que $\vec{u}(t)$ soit un vecteur directeur de la corde $(M(t_0)M(t))$ et $t \mapsto \vec{u}(t)$ admet une limite finie non nulle quand t tend vers t_0 . Cette limite est un vecteur tangent à la courbe au point considéré.

Quand la courbe admet une tangente, la normale à la courbe est la droite perpendiculaire à la tangente au point considéré. Un vecteur normal est un vecteur directeur de la normale à la courbe.

Propriété :

Si $t \mapsto \vec{f}(t)$ est définie au voisinage de t_0 et $M(t_0)$ est un point régulier, alors la courbe admet une tangente dirigée par $\vec{f}'(t_0)$.

Que faire dans le cas d'un point stationnaire ?

- 1) Quelques fois (voire souvent), $x'(t)$ et $y'(t)$ ont un facteur commun $h(t)$ qui crée l'annulation simultanée des deux dérivées en t_0 et tel que $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{h(t)} \vec{f}'(t) = \vec{u} \neq \vec{0}$. Ce vecteur $\vec{u}$ dirige alors la tangente.
- 2) Il y a une propriété qui dit que si $\vec{f}$ est plusieurs fois dérivable en t_0 , alors la tangente est dirigée par le premier vecteur $\vec{f}^{(k)}(t_0)$ non nul.

d. Branches infinies :Définition :

La courbe associée à une fonction $t \mapsto \vec{f}(t)$ admet une branche infinie s'il existe t_0 (éventuellement infini) tel que $\lim_{t \rightarrow t_0} \|\vec{f}(t)\| = +\infty$.

Plusieurs cas de figure se présentent :

$$1) \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm \infty \\ \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases} : \text{la courbe admet une asymptote horizontale d'équation } y = y_0.$$

$$2) \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x_0 \in \mathbb{R} \\ \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm \infty \end{cases} : \text{la courbe admet une asymptote verticale d'équation } x = x_0.$$

$$3) \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm \infty \\ \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm \infty \end{cases} : \text{on étudie alors } \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)}.$$

- Si cette limite est infinie, on dit qu'il y a une branche parabolique (de direction verticale).
- Si cette limite vaut $a \in \mathbb{R}$ alors on dit qu'il y a une direction asymptotique $y = ax$ (ou branche parabolique de direction $y = ax$, horizontale si $a = 0$).
- Si $\lim_{t \rightarrow t_0} [y(t) - ax(t)] = b \in \mathbb{R}$, alors la courbe admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$.

II - Courbes planes

Dans cette partie, on se place dans $\mathbb{R}^2$, appelé le plan, muni de son produit scalaire canonique et de la norme euclidienne associée, et orienté par sa base canonique $\mathcal{B}_c = (\vec{i}, \vec{j})$. On notera $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé correspondant.

II-1. Définition d'une courbe du plan

Une courbe de $\mathbb{R}^2$ peut être définie comme l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $f(x, y) = 0$ avec $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ et $U \subset \mathbb{R}^2$.

Définition :

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ et $f: U \rightarrow \mathbb{R}$. On appelle ligne de niveau de f l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $f(x, y) = k$ avec k constante réelle.

Théorème : des fonctions implicites (dans le plan)

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U , $\mathcal{C}$ la courbe d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$ et $M(x_0, y_0)$ un point de $\mathcal{C}$ tel que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Alors, il existe deux intervalles ouverts I et J de $\mathbb{R}$ tels que :

$$I \times J \subset U, (x_0, y_0) \in I \times J \text{ et, pour tout } (x, y) \in I \times J, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0,$$

et une application $h: I \rightarrow J$ de classe C^1 sur I , telle que pour tout $(x, y) \in I \times J$:

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = h(x).$$

Définitions :

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, $f:U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U , $\mathcal{C}$ la courbe d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$ et $M(x_0, y_0)$ un point de $\mathcal{C}$.

On dit que M est un point régulier de $\mathcal{C}$ si $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0) \neq \vec{0}$.

Dans le cas contraire ($\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0) = \vec{0}$), on dit que M est un point singulier de $\mathcal{C}$.

On dit que la courbe $\mathcal{C}$ est régulière si tous ses points sont réguliers.

Propriété : Paramétrage local de classe C^1

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, $f:U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U , $\mathcal{C}$ la courbe d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$ et $M(x_0, y_0)$ un point régulier de $\mathcal{C}$.

Il existe un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction $\vec{\varphi}: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, de classe C^1 sur I et telle qu'au voisinage de $M(x_0, y_0)$, la courbe $\mathcal{C}$ est paramétrée par $\vec{\varphi}$, soit
$$\begin{cases} x(t) = \vec{\varphi}(t) \cdot \vec{i} \\ y(t) = \vec{\varphi}(t) \cdot \vec{j} \end{cases}$$

II-2. Tangente en un point régulierPropriété :

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, $f:U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U , $\mathcal{C}$ la courbe d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$ et $M(x_0, y_0)$ un point régulier de $\mathcal{C}$.

La courbe $\mathcal{C}$ admet une normale en M dirigée par $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0)$ et une tangente d'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Propriété :

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, $f:U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $f(x, y) = 0$.

En un point régulier $M(x_0, y_0)$, le gradient de f est orienté dans le sens des valeurs croissantes de f , c'est-

à-dire qu'au voisinage de $t = 0$, $f\left(x_0 + t \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), y_0 + t \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) - f(x_0, y_0)$ est du signe de t .

III – Surfaces et courbes de l'espace

Dans cette partie, on se place dans $\mathbb{R}^3$, appelé l'espace, muni de son produit scalaire canonique et de la norme euclidienne associée, et orienté par sa base canonique $\mathcal{B}_e = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On notera $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé correspondant.

III-1. Définition d'une surface de l'espace

Une surface de $\mathbb{R}^3$ peut être définie comme l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $f(x, y, z) = 0$ avec $f:U \rightarrow \mathbb{R}$ et $U \subset \mathbb{R}^3$.

Définition :

Une surface de révolution d'axe D est une surface $\mathcal{S}$ dont l'image par toute rotation d'axe D est elle-même.

Théorème : des fonctions implicites (dans l'espace)

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^3$, $f:U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U , $\mathcal{S}$ la surface d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$ et $M(x_0, y_0, z_0)$ un point de $\mathcal{S}$ tel que $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Alors, il existe un ouvert V de $\mathbb{R}^2$ et un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$ tels que :

$$V \times J \subset U, (x_0, y_0, z_0) \in V \times J \text{ et, pour tout } ((x, y), z) \in V \times J, \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \neq 0,$$

et une application $h:V \rightarrow J$ de classe C^1 sur V , telle que pour tout $((x, y), z) \in V \times J$:

$$f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = h(x, y).$$

Définitions :

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^3$, $f:U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U , $\mathcal{S}$ la surface d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$ et $M(x_0, y_0, z_0)$ un point de $\mathcal{S}$.

On dit que M est un point régulier de $\mathcal{S}$ si $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$.

Dans le cas contraire ($\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0, z_0) = \vec{0}$), on dit que M est un point singulier de $\mathcal{S}$.

On dit que la surface $\mathcal{S}$ est régulière si tous ses points sont réguliers.

Définitions :

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^3$, $f:U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U , $\mathcal{S}$ la surface d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$ et $M(x_0, y_0, z_0)$ un point régulier de $\mathcal{S}$.

Le plan passant par $M(x_0, y_0, z_0)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0, z_0)$ est appelé plan tangent à la surface $\mathcal{S}$ au point M .

On dit que tout vecteur normal à ce plan est dit normal à la surface en $M(x_0, y_0, z_0)$.

III-2. Courbes tracées sur une surface

Si on a une surface $\mathcal{S}$ définie par l'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$, alors toute courbe vérifiant cette équation et une autre est incluse dans $\mathcal{S}$: on dit que la courbe est tracée sur la surface $\mathcal{S}$.

D'une manière générale, une courbe $\mathcal{C}$ est tracée sur une surface $\mathcal{S}$ quand $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$.

Propriété :

Soient $\mathcal{S}$ une surface d'équation $f(x, y, z) = 0$, avec $f:U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U , ouvert non vide de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ une courbe paramétrée par $\vec{\varphi}:I \rightarrow U; t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$, avec I intervalle de $\mathbb{R}$, tracée sur $\mathcal{S}$, de classe C^1 et régulière. Enfin, soit $M(x_0, y_0, z_0)$ un point régulier de $\mathcal{S}$ tel que $M \in \mathcal{C}$ (donc il existe $t_0 \in I$ tel que $\vec{\varphi}(t_0) = \overrightarrow{OM}$).

Alors, la tangente à $\mathcal{C}$ en M est incluse dans le plan tangent à $\mathcal{S}$ en M .

IV - Retour sur la recherche d'extremums

Dans cette partie, U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ et f est une application de classe C^2 sur U et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Propriété :

Soient f une application de classe C^2 sur U , un ouvert de $\mathbb{R}^p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ et a un point critique de f .

- Si $H_f(a) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ (resp. $-H_f(a) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$), alors f admet un minimum (resp. maximum) local strict en a .
- Si $H_f(a) \notin S_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $-H_f(a) \notin S_n^+(\mathbb{R})$), alors f n'admet pas de minimum (resp. maximum) local en a .