

Résumé du chapitre 2 : Espaces vectoriels normés

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on considère E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

I – Normes

I-1. Vocabulaire

Définitions :

On appelle norme sur E toute application N de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (homogénéité) ;
- $\forall x \in E, N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (séparation) ;
- $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé (EVN), noté (E, N) .

On appelle vecteur unitaire ou normé tout vecteur de norme 1.

Si E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire, noté $(x | y)$, (espace préhilbertien réel), alors $x \mapsto \sqrt{(x | x)}$ est une norme, dite norme euclidienne.

Exemples (usuels) :

- Si $E = \mathbb{R}$, la valeur absolue est une norme.
- Si $E = C([a, b], \mathbb{R})$, $f \mapsto \sqrt{\int_a^b f^2}$ est une norme euclidienne (produit scalaire : $(f | g) = \int_a^b fg$), notée $\|\cdot\|_2$.
- Si $E = C([a, b], \mathbb{R})$, $f \mapsto \int_a^b |f|$ est une norme, notée $\|\cdot\|_1$.

Dans la suite, et sauf mention contraire, on se place dans un EVN, $(E, \|\cdot\|)$.

Définitions :

Soient $x_0 \in E$ et $R \in \mathbb{R}_+^*$.

La boule ouverte de centre x_0 et de rayon R est l'ensemble $B(x_0, R) = \{x \in E \mid \|x - x_0\| < R\}$.

La boule fermée de centre x_0 et de rayon R est l'ensemble $\bar{B}(x_0, R) = \{x \in E \mid \|x - x_0\| \leq R\}$.

La sphère de centre x_0 et de rayon R est l'ensemble $S(x_0, R) = \{x \in E \mid \|x - x_0\| = R\}$.

En dimension 2, une boule est un disque et une sphère est un cercle.

Définitions :

Une partie A de E est partie bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in A$, $\|x\| \leq M$.

Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E est une suite bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| \leq M$.

Une application $f : X \rightarrow E$ (où X est un ensemble quelconque) est application bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in X$, $\|f(x)\| \leq M$.

I-2. Normes usuelles

a. Norme infinie :

Lemme :

Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{R}_+$, l'ensemble $kA = \{kx, x \in A\}$ est majorée et :

$$\sup(kA) = k \sup A$$

Propriété et définition :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et E est l'espace vectoriel des fonctions bornées de I dans $\mathbb{K}$.

$N : f \mapsto \sup_I |f|$ est une norme, appelée norme infinie, notée $\|\cdot\|_\infty$.

b. Normes usuelles sur $\mathbb{K}^p$:

Propriétés :

Soient $p \in \mathbb{N}^*$. Les applications suivantes sont des normes sur $\mathbb{K}^p$:

- $N_\infty : (x_1, x_2, \dots, x_p) \mapsto \max_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket} |x_k|$;

- $N_1 : (x_1, x_2, \dots, x_p) \mapsto \sum_{k=1}^p |x_k|$;

- $N_2 : (x_1, x_2, \dots, x_p) \mapsto \sqrt{\sum_{k=1}^p |x_k|^2}$.

I-3. Distance associée à une norme

Définitions : (hors programme)

Une distance sur E est une application $d : E^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes :

- $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie).
- $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (séparation).
- $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

Un espace vectoriel muni d'une distance est appelé espace métrique.

Propriété et définition :

L'application $(x, y) \mapsto \|x - y\|$ de E^2 dans $\mathbb{R}_+$ est une distance sur E .

Cette distance est appelée distance associée à la norme $\|\cdot\|$.

I-4. Convexité

Définitions :

Soient x et y deux vecteurs de E .

Le segment $[x, y]$ est l'ensemble des vecteurs de E de la forme $tx + (1-t)y$ avec $t \in [0, 1]$.

Une partie A de E est convexe si pour tout $(x, y) \in A^2, [x, y] \subset A$.

Propriété :

Les boules ouvertes ou fermées sont convexes.

I-5. Normes équivalentesDéfinition :

On dit que deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ de E sont équivalentes s'il existe $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que pour tout $x \in E$:

$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1.$$
Propriété :

La relation « est équivalente à » pour les normes d'un EVN est une relation d'équivalence : réflexive, symétrique et transitive.

Théorème :

Toutes les normes d'un espace de dimension finie sont équivalentes.

II – Convergence de suites dans un espace vectoriel normé**II-1. Généralités**Définitions :

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E .

On dit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente s'il existe un vecteur a de E tel que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \|x_n - a\| \leq \varepsilon.$$

Dans ce cas, on dit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet pour limite a ou converge vers a . On note $x_n \rightarrow a$.

Une suite qui n'est pas convergente est divergente.

Propriétés :

- Si une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E converge alors sa limite est unique. On la note $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ ou $\lim x_n$.
- Toute suite convergente de E est bornée.
- Toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite.
- L'ensemble des suites convergentes de E est un espace vectoriel et l'application qui à une suite convergente de E associe sa limite est linéaire.

Propriété :

Soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes équivalentes de E .

La convergence d'une suite pour $\|\cdot\|_1$ équivaut à sa convergence vers la même limite pour $\|\cdot\|_2$.

II-2. Convergence dans un espace vectoriel normé de dimension finie

Dans cette partie, on suppose que E est de dimension finie.

Théorème :

La convergence d'une suite et la valeur de sa limite ne dépendent pas du choix de la norme.

Propriété :

Soient une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ fixée de E (qui est alors de dimension p) et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{p,n}$ les coordonnées de x_n dans la base $\mathcal{B}$.

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si les p suites scalaires $(x_{k,n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent et dans ce cas :

$$\lim x_n = (\lim x_{1,n}) e_1 + (\lim x_{2,n}) e_2 + \dots + (\lim x_{p,n}) e_p.$$

III – Topologie d'un espace vectoriel normé

III-1. Ouverts

Définitions :

Soit A une partie de E .

Un élément a de A est intérieur à A s'il existe un réel $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(a, r)$ soit incluse dans A .

L'intérieur de A , noté $\mathring{A}$, est l'ensemble des points intérieurs à A .

On dit que A est une partie ouverte de E si tous ses points sont intérieurs.

Propriétés :

Soit A une partie de E .

- $\mathring{A}$ est un ouvert de E .
- A est ouvert si et seulement si $\mathring{A} = A$.
- L'intérieur de A est le plus grand ouvert inclus dans A (au sens de l'inclusion).

Propriété :

Une boule ouverte est un ouvert.

Propriétés :

- L'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert.
- Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.

III-2. Fermés

Définitions :

Soit A une partie de E .

Un élément a de E est adhérent à A s'il existe une suite d'éléments de A convergeant vers a .

L'adhérence de A , notée $\bar{A}$, est l'ensemble des points adhérents à A .

La frontière de A , notée $Fr(A)$, est l'ensemble $\bar{A} \setminus \mathring{A}$.

On dit que A est une partie fermée de E si tous les points adhérents de A appartiennent à A .

On dit que A est dense dans E si $\bar{A} = E$.

Propriétés :

Soit A une partie de E .

- $\bar{A}$ est fermée.
- A est fermée si et seulement si $\bar{A} = A$.
- L'adhérence de A est le plus petit fermé contenant A (au sens de l'inclusion).

Propriété : Caractérisation séquentielle.

Une partie A est fermée dans E si et seulement si toute suite convergente de A converge dans A .

Propriétés :

- Une boule fermée est un fermé.
- Une sphère est un fermé.

Propriétés :

- La réunion d'un nombre fini de fermés est un fermé.
- Une intersection quelconque de fermés est un fermé.

III-3. Topologie et normes équivalentes

Propriétés :

Les ouverts et les fermés de E pour une norme sont les mêmes pour toutes les normes équivalentes.

III-4. Cas de la dimension finie

Propriété :

Les ouverts et fermés d'un espace normé de dimension finie sont les mêmes pour toutes les normes.