

**Résumé du chapitre 3 : Limites et continuité**

Dans tout le chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  ; on considère deux  $\mathbb{K}$ -EVN :  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$ ,  $A$  une partie de  $E$  et  $f$  une application de  $A$  dans  $F$ .

## I – Limites

### I-1. Généralités

#### Définition :

Soit  $a$  un point adhérent à  $A$  et  $b \in F$ . On dit que  $f$  admet  $b$  pour limite en  $a$  si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in A \setminus \{a\}, \|x - a\|_E \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - b\|_F \leq \varepsilon.$$

#### Propriétés :

- Si une  $f$  admet une limite en un point adhérent à  $A$  alors cette limite est unique.
- Toute fonction admettant une limite en  $a \in \overline{A}$  est bornée au voisinage de  $a$ .

#### Propriété :

Soient  $a \in \overline{A}$  et  $b \in F$ . Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq 0_F$ , alors  $f(x) \neq 0_F$  au voisinage de  $a$ .

#### Propriété :

Soient  $a \in \overline{A}$  et  $b \in F$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  pour  $\|\cdot\|_E$  de  $E$  (resp.  $\|\cdot\|_F$  de  $F$ ), alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  pour toute norme de  $E$  (resp. de  $F$ ) équivalente à  $\|\cdot\|_E$  (resp.  $\|\cdot\|_F$ ).

#### Propriété :

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ , alors pour tout vecteur  $u$  non nul de  $E$ , on a  $\lim_{t \rightarrow 0} f(a + tu) = b$ .

### I-2. Caractérisation séquentielle de la limite

#### Propriété :

Soient  $a \in \overline{A}$  et  $b \in F$ .

On a  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  si et seulement si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = b$  pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $A$  telle que  $x_n \rightarrow a$ .

### I-3. Cas de la dimension finie

#### Propriété :

On suppose que  $F$  est de dimension finie  $p > 0$ .

Soient  $a \in \overline{A}$ ,  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$  une base  $F$  et  $b \in F$  de coordonnées  $(b_1, b_2, \dots, b_p)$  dans  $\mathcal{B}$ .

Si  $f_k(x)$  est la  $k^{\text{ième}}$  coordonnée de  $f(x)$  dans  $\mathcal{B}$ , on a  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow a} f_k(x) = b_k$  pour tout entier  $k$  compris entre 1 et  $p$ .

### I-4. Opérations

#### Propriété :

Soient  $a \in \overline{A}$ , et  $f_1$  et  $f_2$  deux applications de  $A$  dans  $F$  telles que  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = b_1$  et  $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = b_2$  avec  $(b_1, b_2) \in F^2$ .

- Pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} (\lambda f_1(x) + \mu f_2(x)) = \lambda b_1 + \mu b_2$ .
- Soit  $g : A \rightarrow \mathbb{K}$  telle que  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lambda \in \mathbb{K}$ . On a  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) f_1(x) = \lambda b_1$ .

#### Propriété :

Soient  $(G, \|\cdot\|_G)$  un troisième EVN,  $g$  une application de  $B \subset F$  dans  $G$  et  $a \in \overline{A}$ .

Si  $f(A) \subset B \subset F$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \overline{B}$  et  $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c \in G$  avec  $g(b) = c$  si  $b \in B$ , alors  $g \circ f$  est définie sur  $A$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = c$ .

## II – Continuité sur une partie

### II-1. Définitions

#### Définitions :

Soit  $a \in A$ . On dit que  $f$  est continue en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Soit  $B \subset A$ . On dit que  $f$  est continue sur  $B$  si  $f$  est continue en tout point de  $B$ .

### II-2. Continuité et topologie

#### Propriétés :

Soit  $f$  une application continue de  $E$  dans  $F$ .

L'image réciproque d'un fermé de  $F$  est un fermé de  $E$ .

L'image réciproque d'un ouvert de  $F$  est un ouvert de  $E$ .

#### Corollaires :

Soit  $f$  une application continue de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ .

- L'ensemble des vecteurs  $x$  de  $E$  tels que  $f(x) \geq 0$  (*resp.*  $f(x) = 0$  ou  $f(x) \leq 0$ ) est un fermé de  $E$ .
- l'ensemble des vecteurs  $x$  de  $E$  tels que  $f(x) > 0$  (*resp.*  $f(x) \neq 0$  ou  $f(x) < 0$ ) est un ouvert de  $E$ .

### II-3. Opérations

#### Propriétés :

Soient  $f_1$  et  $f_2$  deux applications de  $A$  dans  $F$  continues en  $a \in A$  (resp. sur  $B \subset A$ ).

- Pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ ,  $\lambda f_1 + \mu f_2$  est continue en  $a \in A$  (resp. sur  $B$ ).
- Si  $g : A \rightarrow \mathbb{K}$  est continue en  $a \in A$  (resp. sur  $B$ ), alors  $g f_1$  est continue en  $a$  (resp. sur  $B$ ).
- Soient  $(G, \|\cdot\|_G)$  un EVN et  $g$  une application d'une partie  $C$  de  $F$  dans  $G$ .

Si  $g$  est continue en  $f(a) \in C$  (resp. sur  $f(B) \subset C$ ), alors  $g \circ f$  est continue en  $a$  (resp. sur  $B$ ).

### II-4. Fonctions lipschitziennes

#### Définition :

Une application  $f : A \rightarrow F$  est lipschitzienne sur  $A$  s'il existe  $k \in \mathbb{R}_+^*$  tel que pour tout  $(x, y) \in A^2$  :

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq k \|x - y\|_E.$$

Dans ce cas, on dit que  $f$  est  $k$ -lipschitzienne sur  $A$ .

#### Propriété :

Toute application lipschitzienne est continue.

### II-5. Cas de la dimension finie

#### Propriété :

On suppose que  $F$  est de dimension finie  $p > 0$  et on considère une base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$  de  $F$ .

Pour tout  $x \in A$  et tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on note  $f_k(x)$  la  $k^{\text{ième}}$  coordonnée de  $f(x)$  dans  $\mathcal{B}$ .

L'application  $f$  est continue en  $a \in A$  (resp. sur  $B \subset A$ ) si et seulement si  $f_k$  l'est pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ .

#### Définition :

On suppose que  $E$  est de dimension finie  $n > 0$ . Soit une base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  de  $E$ .

Une application polynomiale sur  $E$  est une application de  $E$  dans  $\mathbb{K}$  de la forme :

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \mapsto \sum_{i=0}^N a_i \left( \prod_{1 \leq k \leq n} x_k^{\alpha_{i,k}} \right)$$

où les  $a_i$  sont des scalaires, et  $N$  et les  $\alpha_{i,k}$  sont des entiers naturels.

#### Propriété :

Les applications polynomiales de  $E$ , de dimension finie, dans  $\mathbb{K}$  sont continues sur  $E$ .

#### Propriété :

Toute application linéaire sur un espace de dimension finie est continue.

Propriété :

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(E_1, \|\cdot\|_1), \dots, (E_n, \|\cdot\|_n)$  des espaces vectoriels normés de dimension finie.  
 Toute application  $n$ -linéaire de  $E_1 \times \dots \times E_n$  dans  $F$  est continue.

Propriétés :

- L'application déterminant est continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
- L'application  $(A, B) \mapsto AB$  est continue sur  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ .

Théorème : des bornes atteintes

On suppose que  $E$  est de dimension finie.  
 Toute application continue sur une partie non vide fermé et bornée de  $E$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , est bornée et atteint ses bornes.

Théorème :

Toute application linéaire sur un espace de dimension finie est lipschitzienne.