

## **Résumé du chapitre 4 : Suites et séries de fonctions**

Dans ce qui suit,  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de fonctions définies sur  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , et  $\sum f_n$  est la série de fonctions associée et on pose  $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$ .

### **Suites de fonctions**

#### **Définitions fondamentales**

- Convergence simple (CVS) sur  $I$  :  $\forall x \in I$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$  existe (la limite dépend de  $x$ ) ;
- Convergence uniforme (CVU) sur  $I$  :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\|f_n - f\|_\infty$  existe et tend vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Et on a :

$$\text{CVU sur } I \Rightarrow \text{CVS sur } I.$$

#### **Limite** (hors programme)

Si  $a$  est une extrémité de  $I$  (éventuellement infinie) et :

- $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$  existe et est finie ;
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $I$ .

Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x).$$

#### **Continuité**

Si :

- $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue sur  $I$  ;
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $I$  (ou sur tout segment inclus dans  $I$  ou sur toute partie d'une famille de parties de  $I$  dont la réunion est  $I$ ).

Alors :

$$f \text{ est continue sur } I.$$

#### **Classe $C^k$**

Si  $k \in \mathbb{N}^*$  et :

- $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est de classe  $C^k$  sur  $I$  ;
- $\forall j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ ,  $(f_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement sur  $I$  ;
- $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $I$  (ou sur tout segment inclus dans  $I$  ou sur toute partie d'une famille de parties de  $I$  dont la réunion est  $I$ ).

Alors :

$$f = \lim f_n \text{ est de classe } C^k \text{ sur } I \text{ et } \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \lim f_n^{(i)} = f^{(i)}.$$

**REMARQUE** : Si on veut  $C^\infty$  sur  $I$ , il faut que ce que l'on vient d'écrire soit vrai pour tout entier  $k$ , donc que les convergences des suites des dérivées  $k^{\text{ièmes}}$  soient toutes uniforme sur  $I$  (ou sur tout segment inclus dans  $I$  ou sur toute partie d'une famille de parties de  $I$  dont la réunion est  $I$ ).

## Intégration

Si :

- $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue sur  $[a, b]$  ;
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$ .

Alors :

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t)dt .$$

## Séries de fonctions

### Définitions fondamentales

- Convergence simple (CVS) sur  $I$  : la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement sur  $I$  ;
- Convergence uniforme (CVU) sur  $I$  : la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $I$  ;
- Convergence normale (CVN) sur  $I$  : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\|f_n\|_\infty$  existe et  $\sum \|f_n\|_\infty$  converge ;
- Hypothèse de domination (HD) :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\forall x \in I$ ,  $|f_n(x)| \leq \alpha_n$  et  $\sum \alpha_n$  converge.

Et on a :

$$\text{HD sur } I \Rightarrow \text{CVN sur } I \Rightarrow \text{CVU sur } I \Rightarrow \text{CVS sur } I.$$

Dans toutes les propriétés suivantes :

- on peut remplacer la convergence uniforme, par la convergence normale ou l'hypothèse de domination ;
- pour les propriétés globales de régularité (continué, classe  $C^k$ , classe  $C^\infty$ ), on peut remplacer la convergence uniforme sur  $I$  par la convergence uniforme sur tout segment de  $I$  ou sur toute partie d'une famille de parties de  $I$  dont la réunion est  $I$ .

### Limite

Si  $a$  est une extrémité de  $I$  (éventuellement infinie) et :

- $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$  existe et est finie ;
- $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$ .

Alors :

$$\text{la série } \sum \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \text{ converge et } \lim_{x \rightarrow a} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right).$$

### Continuité

Si :

- $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue sur  $I$  ;
- $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$ .

Alors :

$S$  est continue sur  $I$ .

### Classe $C^k$

Si, pour  $k \in \mathbb{N}^*$  :

- $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est de classe  $C^k$  sur  $I$  ;
- $\forall j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ ,  $\sum f_n^{(j)}$  converge simplement sur  $I$  ;
- $\sum f_n^{(k)}$  converge uniformément sur  $I$ .

Alors :

$$S \text{ est de classe } C^k \text{ sur } I \text{ et } \forall i \in \llbracket 0; k \rrbracket, S^{(i)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(i)}.$$

REMARQUE : Si on veut  $C^\infty$  sur  $I$ , il faut que les convergences des séries  $\sum f_n^{(k)}$  soient toutes (pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ) uniformes sur  $I$ .

### Intégration

Si  $I = [a, b]$  et :

- $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue sur  $[a, b]$  ;
- $\sum f_n$  converge uniformément sur  $[a, b]$  ;

Alors :

$$\sum \left( \int_a^b f_n(t) dt \right) \text{ converge et } \int_a^b S(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_a^b f_n(t) dt \right).$$