

TD du chapitre 13 : Variables aléatoires discrètes
Exercice 1

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.

On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $p \in]0,1[$.

Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

- 1) Donner la loi de X . Justifier.
- 2) La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
 - a. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Déterminer $P(Y = k \mid X = i)$.
 - b. Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

☺ On pourra utiliser l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i} \binom{n}{i} = \binom{k}{i} \binom{n}{k}$.

Exercice 2

Deux lois de probabilités classiques (mais hors programme).

- 1) Loi hypergéométrique : Cette loi usuelle modélise le tirage simultané de n boules dans une urne contenant N boules dont une proportion p de boules blanches (i.e. il y a Np boules blanches). On désigne par Ω l'ensemble des tirages possibles (supposés équiprobables) et par X le nombre de boules blanches dans un tirage donné.

Déterminer $X(\Omega)$ et la loi de X . On vérifiera que $P(X = k) = \frac{\binom{Np}{k} \binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.

Que devient $P(X = k)$ lorsque N tend vers l'infini (avec p et n fixés) ?

- 2) Loi triangulaire : Autre loi usuelle qui modélise la somme S de deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivant une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Déterminer la loi de S . Pourquoi l'appelle-t-on "loi triangulaire" ?

Exercice 3

Un sac contient quatre boules numérotées de 1 à 4. On tire successivement deux boules avec remise, et on note X_1 et X_2 les numéros de la première et seconde boules tirées. Soit $X = X_1$ et $Y = \max(X_1, X_2)$.

- 1) Déterminer les lois de (X_1, X_2) et de (X, Y) .
- 2) En déduire les lois marginales de X et de Y .
- 3) Calculer la loi de X conditionnée par $(Y = 3)$.
- 4) Déterminer la loi de X conditionnée par Y .
- 5) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
- 6) Déterminer les lois de $X + Y$ et XY .

Exercice 4

Un parc d'attraction accueille chaque jour un nombre N variable de visiteurs qui suit une loi de Poisson de paramètre λ .

- 1) Le parc dispose de 4 entrées, numérotées de 1 à 4. Chaque visiteur en choisit une au hasard et sans tenir compte du choix des autres visiteurs. X désigne le nombre de visiteurs par jour qui entrent par l'entrée n° 1.
 - a. Quelles sont les valeurs prises par X ?
 - b. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la variable aléatoire X sachant $(N = k)$ est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
 - c. Soit n un entier naturel. Justifier que $P(X = n) = \sum_{k=n}^{+\infty} P(N = k) P_{(N=k)}(X = n)$, puis en déduire que X suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.
- 2) L'une des attractions du parc est un jeu consistant à lancer une balle dans un trou qui s'éloigne de plus en plus à chaque lancer, de telle sorte que :
 - le premier lancer est réussi de façon certaine ;
 - le second lancer est réussi une fois sur deux ;
 - lorsque les $n-1$ premiers lancers sont réussis, la probabilité de réussir le $n^{\text{ième}}$ lancer est de $1/n$;
 - le jeu s'arrête au premier échec.

Si i est un entier naturel non nul, S_i désigne l'évènement « le $i^{\text{ème}}$ lancer est réussi » et Z est la variable aléatoire qui correspond au numéro du dernier lancer réussi.

- a. Quelles sont les valeurs prises par Z ?
- b. Soit n un entier naturel non nul donné. Exprimer l'évènement $(Z = n)$ en fonction des évènements S_i ou de leurs contraires. En déduire que $P(Z = n) = \frac{n}{(n+1)!}$.
- c. Vérifier que l'on a bien $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} P(Z = n) = 1$.

Exercice 5

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux une même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

- 1) Calculer $P(X \geq m)$.
- 2) Déterminer les lois de $Z = \min(X, Y)$ et $W = X - Y$.
- 3) Les variables aléatoires W et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 6

Soient A et B deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une même loi géométrique.

Déterminer la probabilité pour que toutes les solutions de l'équation différentielle $y'' + (A-1)y' + By = 0$ tendent vers 0 en $+\infty$.

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $B = \text{diag}(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $A = \begin{pmatrix} B & B^2 \\ B^2 & -B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le spectre de B pour que A soit diagonalisable.

☺ On pourra montrer, en réordonnant la base canonique de $\mathbb{C}^{2n}$ que A est semblable à une matrice diagonale par blocs où tous les blocs sont 2×2 .

On considère des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ indépendantes et suivant toutes une loi uniforme sur $\mathbb{U}_n$

(l'ensemble des racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité) et on pose $M = \text{diag}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $L = \begin{pmatrix} M & M^2 \\ M^2 & -M \end{pmatrix}$.

2) Calculer la probabilité p_n que L soit diagonalisable. La suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle ?

3) Calculer la probabilité q_n que les valeurs propres de L soient toutes des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

La suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle ?



Exercice 8 (Mines)

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{Z}$. On suppose en outre que X n'est ni positive presque sûrement, ni négative presque sûrement. On pose :

$$X^+ = \max(X, 0) \text{ et } X^- = \min(X, 0).$$

1) Montrer que X^+ et X^- sont des variables aléatoires.

2) Expliciter la loi conjointe de (X^+, X^-) . Ces deux variables sont-elles indépendantes ?

Exercice 9 (ENS)

Soit une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes et qui suivent toutes une même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. On définit deux variables aléatoires T et T' de la façon suivante. Pour $\omega \in \Omega$:

- T donne le rang du premier 0 dans la suite : pour $\omega \in \Omega$, $T(\omega) = n$ si $X_n(\omega) = 0$ et $X_k(\omega) = 1$ pour tout $k < n$; si $X_k(\omega) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $T(\omega) = +\infty$.
- T' donne le plus petit entier $n > 0$ tel que $X_{n-1}(\omega) = X_n(\omega) = 1$ (il n'y a pas deux 1 consécutifs avant le rang $n-1$ et n) ; s'il n'y a jamais deux 1 consécutifs dans la suite, on pose $T'(\omega) = +\infty$.

- 1) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $P(T = n)$, $P(T > n)$ et $P(T = +\infty)$.
- 2) Calculer $P(T' = n)$ pour $n \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$.
- 3) Prouver que pour tout entier $n \geq 2$, on a $P(T' > n) \leq \frac{3}{4} P(T' > n-2)$.
- 4) Montrer que T' est presque sûrement finie, c'est-à-dire que $P(T' = +\infty) = 0$.
- 5) Prouver que pour tout entier $n \geq 2$, on a $P(T' = n) = \frac{1}{2} P(T' = n-1) + \frac{1}{4} P(T' = n-2)$. En déduire une expression de $P(T' = n)$, puis de $P(T' > n)$ en fonction de n .

Exercice 10 (CCP)

Trois individus A_1, A_2, A_3 (ne se connaissant pas) se présentent dans un bureau de poste comportant deux guichets. Les individus A_1 et A_2 sont pris en charge dès leur arrivée et A_3 doit attendre que A_1 ou A_2 ait fini pour passer à son tour au guichet. Le temps passé au guichet par A_i ($1 \leq i \leq 3$) est noté X_i . On suppose que X_i suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ (pour les trois). On note Y le temps d'attente de A_3 avant son passage au guichet.

- 1) Pour $k \in \mathbb{N}$, déterminer $P(Y > k)$. Donner la loi de Y .
- 2) Soit Z le temps total passé par A_3 à la poste. Donner la loi de Z .
- 3) Déterminer le temps moyen passé par A_3 à la poste.

