

TD du chapitre 14 : Espérance et variance
Exercice 1

Soient $a \in \mathbb{R}$, et X et Y deux variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, de même loi uniforme sur l'ensemble $E = \llbracket 0, n \rrbracket$. On pose $Z = |X - Y|$ et $T = \inf(X, Y)$.

Sous réserve d'existence, on note $E(A)$ l'espérance d'une variable aléatoire A .

- 1) a. Justifier l'existence des moments de tous ordres de Z et T .
 b. Montrer que $E(Z) = \frac{n(n+2)}{3(n+1)}$.
 c. En déduire $E(T)$ et en donner un équivalent lorsque n tend vers l'infini.
- 2) Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle qu'il existe $K \in \mathbb{N}^*$ vérifiant : $0 \leq U \leq K$.
 a. Exprimer $\sum_{k=1}^K P(U \geq k)$ en fonction de l'espérance de U .
 b. Calculer de même $\sum_{k=1}^K k^2 P(U \geq k)$ en fonction de $E(U)$, $E(U^2)$ et $E(U^3)$.
- 3) a. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}$, la probabilité $P(T \geq k)$.
 b. En utilisant la question 2.a, retrouver la valeur de $E(T)$.
- 4) Calculer $E(Z^2)$ en fonction de la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X .

Exercice 2

On considère une suite infinie de lancers d'une pièce amenant pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$. On appelle L la longueur de la première série de lancers ayant tous donné le même résultat.

- 1) Déterminer la loi de L .
- 2) Calculer l'espérance de L .
- 3) Montrer que $E(L) \geq 2$. Etudier le cas d'égalité.
- 4) Calculer la variance de L et en déduire ℓ tel que $L \leq \ell$ avec une probabilité au moins égale à 0,99.

Exercice 3

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose d'un sac contenant N jetons numérotés de 1 à N dans lequel on peut effectuer une succession de tirages avec remise d'un jeton, en notant, à chaque fois, le numéro obtenu. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note T_n le nombre aléatoire de numéros distincts obtenus au cours des n premiers tirages.

- 1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, quelles sont les valeurs prises par T_n ? Calculer $P(T_n = 1)$, $P(T_n = 2)$ et $P(T_n = n)$.
- 2) Soient $k, n \in \mathbb{N}^*$ avec $1 \leq k \leq N$. Déterminer une relation liant $P(T_{n+1} = k)$, $P(T_n = k)$ et $P(T_n = k - 1)$.

3) Pour tout entier naturel n non nul, on considère le polynôme : $G_n(X) = \sum_{k=1}^n P(T_n = k) X^k$.

a. Prouver l'égalité : $NG_{n+1} = (X - X^2)G_n' + NXG_n$.

b. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, en reliant l'espérance $E(T_n)$ à G_n , exprimer $E(T_{n+1})$ à l'aide de $E(T_n)$ et N , puis déterminer $E(T_n)$ en fonction de N et n .

c. Déterminer $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{E(T_n)}{N}$.

Exercice 4

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On note pour tout n dans $\mathbb{N}^*$:

$$S_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}, \quad Y_n = \frac{X_{n+1} + X_n}{2} \quad \text{et} \quad T_n = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n}.$$

1) Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|S_n - p| \geq \varepsilon) = 0$.

2) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi et l'espérance de Y_n .

3) Pour $m < n$, Y_m et Y_n sont-elles indépendantes ?

4) Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|T_n - p| \geq \varepsilon) = 0$.

Exercice 5

On considère une urne contenant n boules ($n \geq 2$) : p boules blanches et $n-p$ boules rouges avec $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On place les boules dans n cases successives.

On note N la variable aléatoire donnant le nombre de changements de couleur d'une case à l'autre et pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 s'il y a changement de couleur entre la case i et la case $i+1$, et 0 sinon.

1) Déterminer la loi de X_i pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et celle de $X_i X_j$ pour tous $i, j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

2) Déterminer l'espérance et la variance de N en fonction de n et p .

Exercice 6

La variable aléatoire N donnant le nombre d'électrons produits dans une réaction suit une loi de Poisson de paramètre λ . Les électrons sont efficaces dans une proportion $p \in]0,1[$. On note X et Y les variables aléatoires donnant le nombre d'électrons efficaces et inefficaces respectivement.

1) Donner la loi de X sous la condition $(N = j)$.

2) Donner la loi conjointe de (X, N) .

3) Donner la loi de X , son espérance et sa variance.

4) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

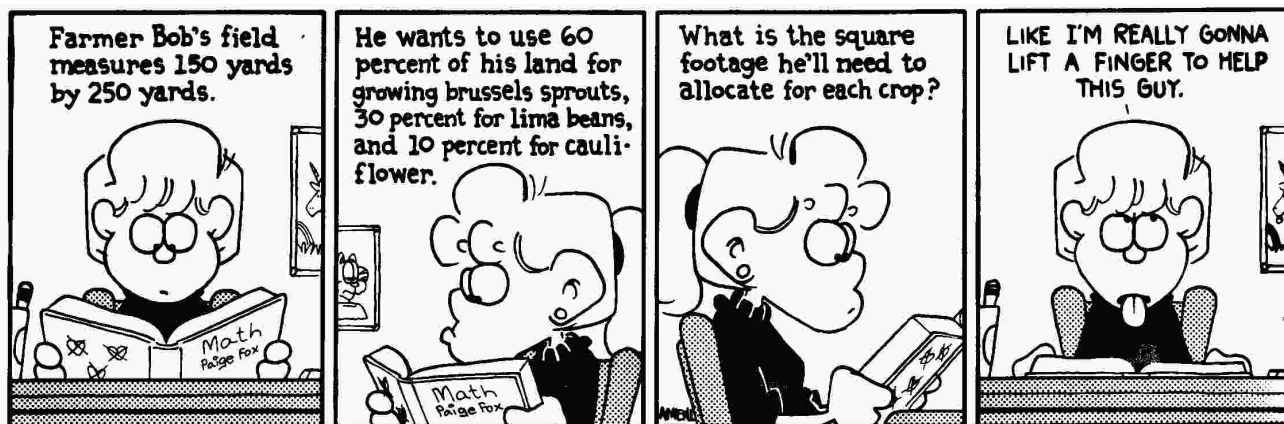
5) Quel est le signe de la covariance de X et N .

Exercice 7

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables de Bernoulli, de même paramètre $p \in]0,1[$ et mutuellement indépendantes.

On pose $U = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ et $M = UU^T$.

- 1) Déterminer la loi de $rg(M)$ et de $tr(M)$.
- 2) Quelle est la probabilité que M soit une matrice de projection ?
- 3) On suppose $n = 2$, on note $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $S = V^T M V$. Déterminer l'espérance et la variance de S .

**Exercice 8 (Centrale)**

Soit X une variable aléatoire vérifiant $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et d'espérance finie.

- 1) Montrer que $\frac{1}{X}$ est d'espérance finie.
- 2) On suppose dans cette question que X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

Montrer que $\frac{1}{E(X)} \leq E\left(\frac{1}{X}\right)$.

- 3) Montrer cette inégalité dans le cas général.

Exercice 9 (Mines)

Soit X une variable aléatoire discrète, réelle positive qui admet un moment d'ordre 2 non nul.

Montrer que, pour tout $\lambda \in]0,1[$, $P(X \geq \lambda E(X)) \geq (1-\lambda)^2 \frac{E(X)^2}{E(X^2)}$.

☺ On pourra utiliser la variable aléatoire $Y = 1_{(X \geq \lambda E(X))}$ (indicatrice de l'évènement $(X \geq \lambda E(X))$) et penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 10 (Mines)

Pour une variable aléatoire discrète réelle X , on note pour tout $k \in \mathbb{N}$ et sous réserve d'existence :

$$\mu_k(X) = E\left((X - E(X))^k\right).$$

- 1) Que valent $\mu_0(X)$, $\mu_1(X)$ et $\mu_2(X)$ (sous réserve d'existence) ?
- 2) Calculer les $\mu_k(X)$ quand X suit une loi de Bernoulli.

On considère deux variables aléatoires réelles X et Y .

- 3) Montrer que si X et Y sont indépendantes, alors $\mu_2(X + Y) = \mu_2(X) + \mu_2(Y)$. La réciproque est-elle vraie ?
- 4) Montrer que si X et Y sont indépendantes, alors $\mu_3(X + Y) = \mu_3(X) + \mu_3(Y)$. La réciproque est-elle vraie ?
- 5) Montrer que la propriété devient fausse pour μ_k avec $k \geq 4$.

