

TD du chapitre 15 : Série génératrice
Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$. Déterminer la série génératrice, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X , suivant une loi triangulaire (définie dans l'exercice 2 du TD du chapitre 13). Pour tout $k \in X(\Omega) = \llbracket 2, 2n \rrbracket$:

$$P(X = k) = \begin{cases} \frac{k-1}{n^2} & \text{quand } 2 \leq k \leq n+1 \\ \frac{2n+1-k}{n^2} & \text{quand } n+1 \leq k \leq 2n \end{cases}.$$

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$.

Quelle est la fonction génératrice d'une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $\llbracket 2, 2n \rrbracket$?

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ et suivant une même loi.

En étudiant les racines de $G_{X_1} G_{X_2}$, montrer que $X_1 + X_2$ ne peut pas suivre une loi uniforme sur $\llbracket 2, 2n \rrbracket$.

Exercice 3

On suppose qu'une variable aléatoire X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda > 0$.

- 1) Montrer que pour tout entier naturel n , $P(X \leq n) = \frac{1}{n!} u_n$ avec $u_n = \int_{\lambda}^{+\infty} x^n e^{-x} dx$.
- 2) En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
- 3) Soit G_X la fonction génératrice de X . Calculer $G_X(1)$ et $G_X(-1)$.
- 4) En déduire la probabilité que X prenne une valeur paire.
- 5) En s'inspirant des questions précédentes, déterminer la probabilité que la valeur de X soit divisible par 4.
- 6) Soit Y une variable aléatoire indépendante de X et suivant une loi uniforme sur $\{1; 2\}$. Quelle est la probabilité pour que XY soit un entier pair ?

Exercice 4

On répète une infinité de fois et de manière indépendante, une même épreuve de Bernoulli, dont la probabilité de succès est $p \in]0, 1[$. Quand elle existe, on appelle T_n la variable aléatoire donnant le rang du $n^{\text{ième}}$ succès.

On note $(T_n = \infty)$ l'évènement : « On n'obtient que des échecs ».

- 1) Donner la loi de T_1 et son espérance.
- 2) Déterminer la loi conjointe du couple (T_1, T_2) .
- 3) En déduire la loi de T_2 . Déterminer sa fonction génératrice, son espérance et sa variance (si elles existent).
- 4) Les variables T_1 et T_2 sont-elles indépendantes ?
- 5) Déterminer la loi de T_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$. Donner $P(T_n = \infty)$.
- 6) Déterminer la fonction génératrice de T_n et en déduire son espérance et sa variance si elles existent.

Exercice 5

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et de même loi.

On pose que $Z = X + Y$ et on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(Z = n) = a \frac{\theta^n}{(1+\theta)^n}$ avec $\theta \in \mathbb{R}_+^*$.

- 1) Déterminer a et G_Z .
- 2) X admet-elle une espérance ? Si oui, la donner.
- 3) X admet-elle une variance ? Si oui, la donner.
- 4) Déterminer la loi de X . Vérifier les résultats des deux questions précédentes.

Exercice 6

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

- 1) Justifier que la série entière $\sum P(X > n)t^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1.
- 2) Pour $t \in]-1, 1[$, exprimer sa somme $H(t)$ en fonction de $G_X(t)$.
- 3) Donner une condition nécessaire et suffisante sur H pour que X soit d'espérance finie et, si c'est le cas, exprimer $E(X)$ à l'aide de H .

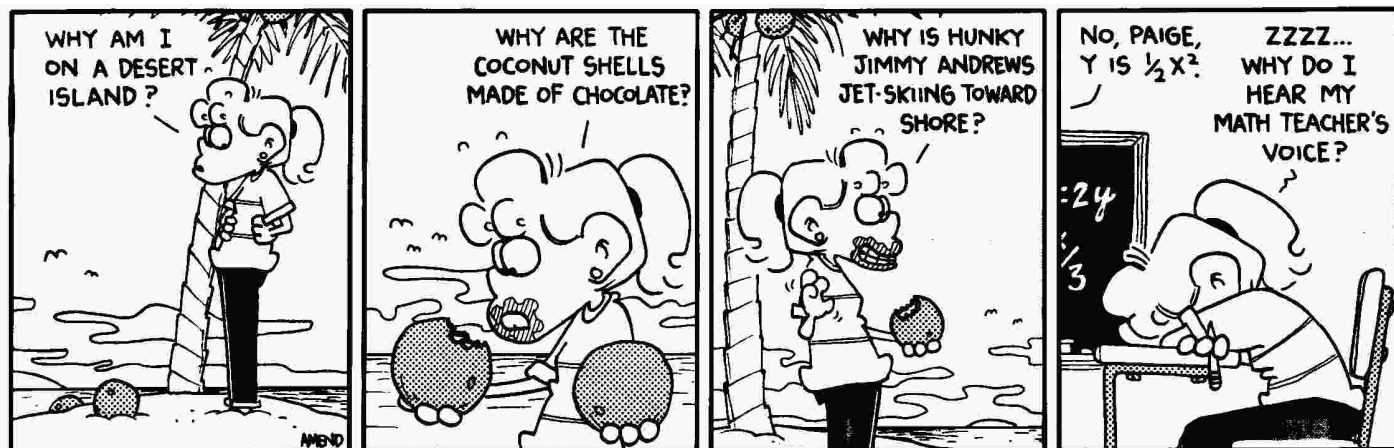
Exercice 7

Soit $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ décroissante.

- 1) Montrer qu'il existe une variable aléatoire X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = \int_n^{n+1} f(t) dt$ si et seulement si la fonction f est positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ avec $\int_0^{+\infty} f(t) dt = 1$.

Les conditions de la question 1 sont remplies.

- 2) Montrer que X admet une espérance finie si et seulement si $t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Comparer alors cette espérance avec $\int_0^{+\infty} tf(t) dt$.
- 3) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que X admette une variance finie.



Exercice 8 (Mines)

Soit $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série $\sum \lambda_n$ converge.

On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable X_n suit une loi de Poisson de paramètre λ_n .

- 1) Montrer que la série de terme général $P(X_n \neq 0)$ converge.
- 2) Montrer que $P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{k \geq n} (X_k \neq 0)\right) = 0$.
- 3) Prouver que la série $\sum X_n$ est presque sûrement convergente.
- 4) Soient Y et Z deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$:

$$|G_Y(t) - G_X(t)| \leq P(Y \neq Z).$$

- 5) Montrer que $X = \sum_{n=1}^{+\infty} X_n$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n$.

Exercice 9 (ENS)

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dira dans la suite que X est une VAD. On appelle G_X sa fonction génératrice.

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on dit que X est de type m si X est une VAD et s'il existe un entier $r \in [0, m-1]$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k - r$ ne soit pas un multiple de m , on a $P(X = k) = 0$.

- 1) Montrer que X est de type 2 équivaut à $|G_X(-1)| = 1$.
- 2) Pour $m \in \mathbb{N}^*$ quelconque, montrer que X est de type m équivaut à $|G_X(e^{i2\pi/m})| = 1$.
- 3) Prouver que si r existe, alors il est unique. On note alors cet entier $r(X)$.
- 4) Soit X et Y deux VAD indépendantes. Montrer que $X + Y$ est de type m si et seulement si X et Y le sont.
- 5) Prouver que si X et Y sont deux VAD indépendantes de type m , alors $r(X + Y) \equiv r(X) + r(Y) \pmod{m}$.

