

TD du chapitre 16 : Espaces préhilbertiens réels
Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $(P|Q) = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$.

- 1) Donner une condition nécessaire et suffisante simple pour qu'on ait ainsi défini un produit scalaire.

Dans la suite, on suppose cette condition vérifiée.

- 2) On pose pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $L_k = \frac{\prod_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket, i \neq k} (X - a_i)}{\prod_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket, i \neq k} (a_k - a_i)}$ (polynômes de Lagrange).

Montrer que $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ (muni du produit scalaire défini ci-dessus).

- 3) Calculer $\inf_{P \in F} \left(\sum_{k=0}^n P(a_k)^2 \right)$ avec $F = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \sum_{k=0}^n P(a_k) = 1 \right\}$.

Exercice 2

Soit $\varphi \in C([-1; 1], \mathbb{R}_+^*)$. On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1) Montrer que $(P, Q) \mapsto (P|Q) = \int_{-1}^1 PQ\varphi$ est un produit scalaire sur E .

Dans la suite, on munit E de ce produit scalaire.

- 2) Prouver qu'il existe une unique base orthonormée de E , échelonnée en degrés et constituée de polynômes de coefficients dominants strictement positifs.
- 3) Dans cette question, on prend φ constante égale à 1 et on pose pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$Q_k = \frac{d^k}{dX^k} \left[(X^2 - 1)^k \right] \text{ (polynôme de Legendre).}$$

- Déterminer pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, le degré et le coefficient dominant de Q_k .
- En déduire que la famille $(Q_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base de E .
- Montrer que la famille $(Q_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base orthogonale de E .

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'une norme, notée $\|\cdot\|$, vérifiant l'identité du parallélogramme. Montrer que cette norme est hilbertienne.

Exercice 4

Soit E un espace euclidien de dimension $n > 1$, $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$. Montrer que :

$$\left| \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n) \right| \leq \|x_1\| \cdot \|x_2\| \cdots \|x_n\| \quad (\text{Inégalité de Hadamard}).$$

Etudier le cas d'égalité.

Exercice 5

Soit E un espace préhilbertien réel et f un endomorphisme de E qui conserve l'orthogonalité, c'est-à-dire tel que pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$(x | y) = 0 \Rightarrow (f(x) | f(y)) = 0.$$

Montrer qu'il existe un réel positif k tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = k\|x\|$.

Etudier la réciproque.

Exercice 6

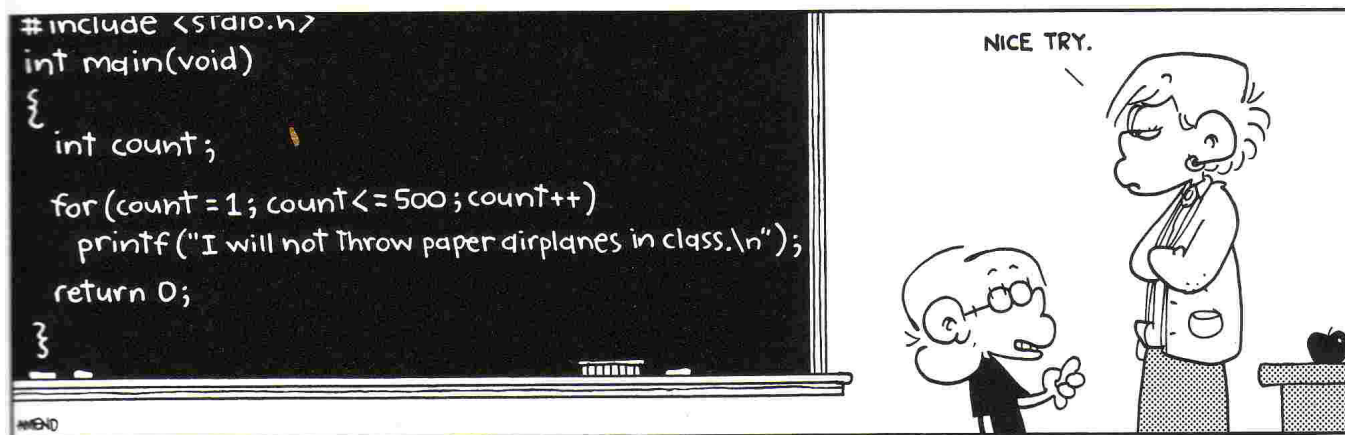
Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose pour toutes matrices A et B de E , $\langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^tAB)$.

- 1) Montrer que $(A, B) \mapsto \langle A, B \rangle$ définit un produit scalaire sur E . On note $\|\cdot\|$ la norme associée.
- 2) Déterminer les matrices P de $GL_n(\mathbb{R})$ telles que, pour toute matrice A de E , $\|A\| = \|P^{-1}AP\|$.

Exercice 7

Soit $f \in C([0;1], \mathbb{R}_+)$. Montrer que :

$$4\left(\int_0^1 x^2 f(x) dx\right)\left(\int_0^1 x f(x)^2 dx\right) \leq \int_0^1 f(x)^3 dx.$$

**Exercice 8 (Mines)**

Montrer que $f : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} (1 + x_1 t + \dots + x_n t^n)^2 dt$ admet un minimum sur $\mathbb{R}^n$.

☺ On pourra commencer par prouver que l'application $(P, Q) \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t)Q(t) dt$ est définie et est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 9 (Centrale – deux planches fusionnées)

On considère p vecteurs $(e_1, \dots, e_p)$ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ tels que pour tous i, j de $\llbracket 1, p \rrbracket$ tels que $i \neq j$, on a $\langle e_i | e_j \rangle < 0$.

- 1) Trouver une telle famille lorsque $n = 2$ et $p = 3$.

- 2) Pour $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, on pose $x = \sum_{k=1}^p x_k e_k$ et $y = \sum_{k=1}^p |x_k| e_k$. Montrer que $\|y\| \leq \|x\|$.
- 3) Montrer que si $x = 0$, alors soit tous les x_k sont nuls, soit aucun ne l'est.
- 4) Montrer que $p \leq n+1$.

Dans la suite, on suppose que $p = n+1$ et que pour tous i, j de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ tels que $i \neq j$, $\langle e_i | e_j \rangle = -1$.

- 5) La famille $(e_1, \dots, e_{n+1})$ est-elle libre ? Donner un exemple d'une telle famille pour $n = 2$.
- 6) On pose pour tout $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, $\mu_i = \frac{1}{\|e_i\|^2 + 1}$. Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i e_i = 0.$$

- 7) Montrer que toute sous-famille stricte de $(e_1, \dots, e_{n+1})$ est libre.

