

**TD du chapitre 19 : Applications géométriques des fonctions vectorielles**

Dans tout ce qui suit, le plan (*resp.* l'espace) est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (*resp.*  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ).

**Exercice 1**

Etudier et représenter la courbe paramétrée par 
$$\begin{cases} x(t) = \cos^2 t + \ln(\sin t) \\ y(t) = \sin t \cos t \end{cases}.$$

**Exercice 2**

Soient  $\mathcal{C}$  un cercle de centre  $O$  et de rayon  $a > 0$  et  $A$  un point de ce cercle. Déterminer, puis étudier le lieu de l'orthocentre  $H$  du triangle  $OAM$  lorsque  $M$  décrit  $\mathcal{C}$ . La courbe obtenue est appelée une strophoïde droite.

**Exercice 3**

Déterminer un paramétrage de la courbe plane  $C$  d'équation  $(x^2 + y^2)^3 = (x^2 - y^2)^2$  et en déterminer les points singuliers (s'il y en a).

**Exercice 4**

Soit  $\mathcal{E}$  la courbe plane d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , avec  $a > 0$ ,  $b > 0$  et  $a > b$ .

Trouver les normales à  $\mathcal{E}$  les plus éloignées de  $O$ , l'origine du repère (et centre de symétrie de  $\mathcal{E}$ ).

**Exercice 5**

Soit  $f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2$ .

- 1) Tracer l'intersection de  $\Sigma = f^{-1}(\{1\})$  et du plan  $P$  d'équation  $z = 0$ . Dessiner l'allure de  $\Sigma$ .
- 2) Soit  $M_0$  un point de  $\Sigma$  de coordonnées  $(x_0, y_0, z_0)$ . Donner une équation du plan tangent à  $\Sigma$  en  $M_0$ .
- 3) Soit  $g \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  telle que la restriction de  $g$  à  $\Sigma$  admet un extremum local en  $M_0$ .

Soient  $G_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto g(\cos(t + \varphi), \sin(t + \varphi), z_0)$  et  $G_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto g(x_0, y_0, z_0 + t)$  avec  $\varphi \in \mathbb{R}$  et  $(x_0, y_0) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ .

- a. Montrer que  $G_1$  et  $G_2$  sont dérivables en 0, et calculer leurs dérivées.
- b. Montrer que  $\nabla g(M_0)$  est colinéaire à  $\nabla f(M_0)$ .

**Exercice 6**

On définit  $\Sigma$  par l'équation  $xyz = 1$ .

- 1) Montrer que  $\Sigma$  est une surface régulière.

- 2) Etudier l'intersection de  $\Sigma$  avec les plans d'équations respectives  $x = x_0$ ,  $y = y_0$  et  $z = z_0$ . En déduire l'allure de  $\Sigma$ .
- 3) Montrer que pour tout plan tangent à  $\Sigma$ , le tétraèdre formé par ce plan et les trois plans engendrés par les vecteurs de base a un volume constant (indépendant du plan tangent).

☺ Le volume d'un tétraèdre  $ABCD$  est donné par  $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \right|$ .

### Exercice 7

Soit  $S$  la surface d'équation cartésienne  $x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz = 1$ .

- 1) Quelle est l'intersection de  $S$  avec le plan  $(xOy)$  ?
- 2) Quels sont les points singuliers de  $S$  ?
- 3) Quelles sont les droites tracées sur  $S$  ?
- 4) Montrer que la partie de  $S$  limitée au cube  $[-1, 1]^3$  admet le paramétrage suivant :

$$(u, v) \mapsto (\cos u, \cos v, \cos(u + v)).$$

### Exercice 8

Fenêtre de Viviani : Soit un réel  $a > 0$  et  $C$  la courbe paramétrée par :

$$\begin{cases} x = a \sin(2t) \\ y = a(1 - \cos(2t)) \\ z = 2a \cos t \end{cases}$$

Montrer que  $C$  est tracée sur une sphère, un cylindre parabolique et un cylindre de révolution, que l'on précisera.

### Exercice 9

Soient les surfaces :  $S_1 : y^2(x^2 + z^2) - x^2 - 3z^2 = 0$  et  $S_2 : -x^2 + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1$ .

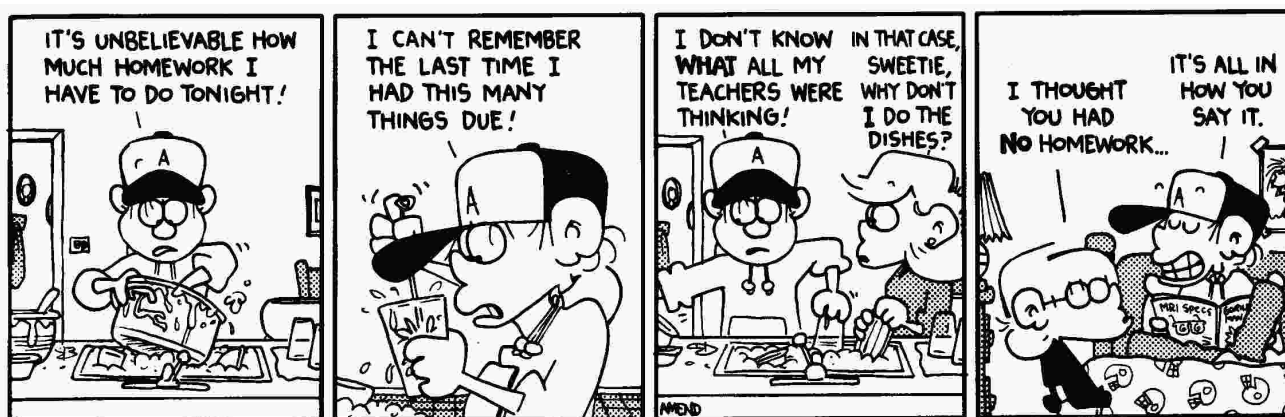
Montrer, qu'en chacun de leurs points communs, les plans tangents à  $S_1$  et  $S_2$  sont perpendiculaires.

### Exercice 10

- 1) Soit  $f : (x, y, z) \mapsto (x + y + z + 1) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 1 \right)$ . Après avoir justifié qu'elle est de classe  $C^2$  sur  $(\mathbb{R}_+^*)^3$ , calculer la matrice hessienne de  $f$  en  $(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ , puis rechercher les extrema de  $f$  sur  $(\mathbb{R}_+^*)^3$ .
- 2) Mêmes questions pour  $f : (x, y) \mapsto (x + y) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$  sur  $(\mathbb{R}_+^*)^2$ .

### Exercice 11

Soit  $f : (x, y) \mapsto (x^2 - y)(3x^2 - y)$ . Montrer que la restriction de  $f$  à toutes les droites passant par  $(0, 0)$  admet un extremum local strict en  $(0, 0)$  mais que  $f$  n'a pas d'extremum local en  $(0, 0)$ .



### Exercice 12 (Centrale adapté)

On considère l'arc paramétré  $\mathcal{C}$  défini par 
$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{\cos^2 t + 4 \cos t + 3} \\ y(t) = \sin t \end{cases}.$$

- 1) Déterminer le domaine de définition de  $t \mapsto (x(t), y(t))$  et réduire au mieux le domaine d'étude.
- 2) Etudier et construire  $\mathcal{C}$  dans un repère orthonormé. On précisera les éventuels points singuliers.
- 3) Donner les équations des tangentes à l'origine du repère.
- 4) Déterminer une équation cartésienne de  $\mathcal{C}$ .

### Exercice 13 (Navale)

Soient la surface  $S$  d'équation  $x^2 - y^2 - z = 1$  et  $P$  le plan d'équation  $x - 2y - z = 0$ .

Donner l'ensemble des points  $M$  de  $S$  tels que le plan tangent à  $S$  en  $M$  soit parallèle à  $P$ .

### Exercice 14

On considère la surface  $S$  d'équation  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ .

- 1) Montrer que  $S$  ne contient aucune droite parallèle au plan  $(xOy)$ .
- 2) Soit  $D$  la droite définie par 
$$\begin{cases} x = az + b \\ y = cz + d \end{cases}.$$

Montrer que  $D$  est incluse dans  $S$  si et seulement si la matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est orthogonale.

- 3) Montrer que par tout point de  $S$ , passent deux droites  $D_1$  et  $D_2$  incluses dans  $S$  et déterminer les points de  $S$  pour lesquels ces deux droites, que l'on précisera, sont perpendiculaires.

