

TD du chapitre 2 : Espaces vectoriels normés

Sauf mention contraire, on se place dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ ($\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Exercice 1

Soient x et y de vecteurs non nuls de E et $a \in [0, 1[$.

1) Montrer que si $\frac{\|y-x\|}{\|x\|} \leq a$, alors $\frac{\|y-x\|}{\|y\|} \leq \frac{a}{1-a}$.

2) Prouver que $\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq 2 \frac{\|x-y\|}{\max(\|x\|, \|y\|)}$.

Exercice 2

Ici, $E = \mathbb{R}[X]$. Pour tout $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$, on pose :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|, \quad N_\infty(P) = \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \quad \text{et} \quad N(P) = \max_{t \in [0,1]} |P(t)|.$$

Montrer que N_1 , N_∞ et N sont des normes sur E . Sont-elles équivalentes ?

Exercice 3

Soient F un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(F, E)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur u pour que l'application $N : x \mapsto \|u(x)\|$ soit une norme sur F .

Exercice 4

On appelle E l'espace des fonctions bornées de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$. On pose :

$$A = \left\{ f \in E, \forall x \in [0, 1], 2 + f(x) \leq e^{f(x)} \right\}.$$

Montrer que A est une partie fermée et non bornée de E .

Exercice 5

Soient A et B deux parties de E .

1) Prouver que $E \setminus \bar{A} = \overset{\circ}{E \setminus A}$ et $E \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{E \setminus A}$.

2) Prouver que si $A \subset B$, alors $\bar{A} \subset \bar{B}$ et $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

3) Montrer que $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{A \cap B}$.

4) Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$, mais que l'inclusion réciproque n'est pas forcément vraie.

Exercice 6

Soit C une partie convexe de E . Montrer que $\overline{C}$ et $\overset{\circ}{C}$ sont aussi convexes.

Exercice 7

On prend ici $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1) Montrer qu'il existe une norme $\|\cdot\|$ de E telle que pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

☺ Vous avez l'embarras du choix ! Une telle norme est appelée norme matricielle.

- 2) Soit $A \in E$. Montrer que si $\|A\| < 1$, alors la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ des puissances de A converge vers 0_n (la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) et justifier que l'on ne peut pas conclure quand $\|A\| \geq 1$.

- 3) Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des parties fermées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, la seule limite possible de la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est 0_n .

☺ On rappelle que $S_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont respectivement les ensembles des matrices symétriques et antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- 4) Soit $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont strictement positifs. Montrer que $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de E .

- 5) L'ensemble des matrices de trace nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-il fermé ? ouvert ?

S'il est fermé, donner son intérieur ; s'il est ouvert, donner son adhérence.

- 6) (Centrale) Soit $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R}) = \left\{ A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} \in [0,1] \right\}$.

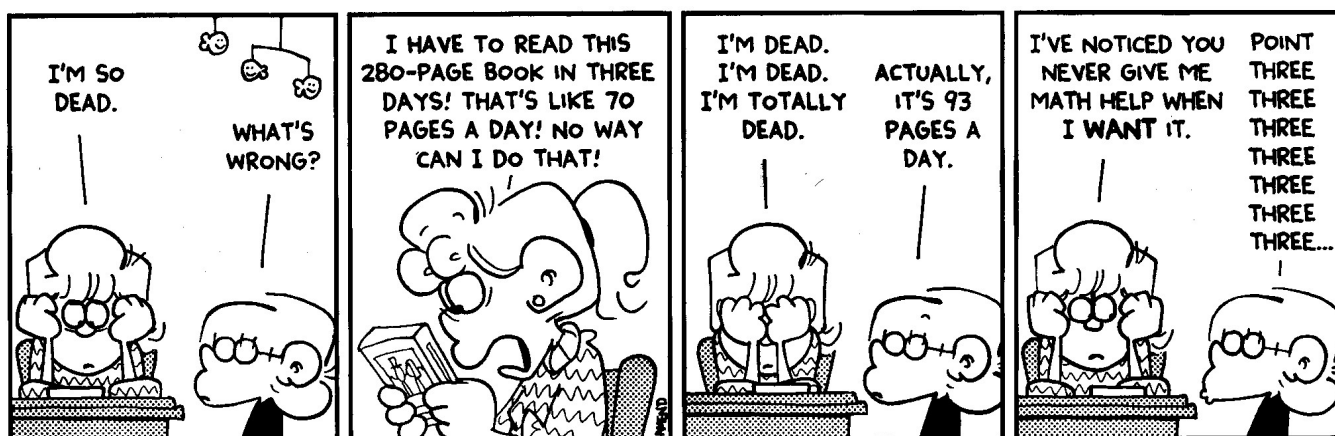
Montrer que la partie $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ est convexe, fermée et bornée.

- 7) Soit $A \in E$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $A_p = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} A^k$.

- a. Montrer que pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|AB\|_\infty \leq n \cdot \|A\|_\infty \cdot \|B\|_\infty$.

- b. Montrer que la suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge. Sa limite est notée $\exp(A)$.

- c. Calculer $\exp(A)$ pour $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$.



Exercice 8 (Mines)

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $N(P) = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|$. On admet que c'est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

On appelle E_n l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbb{R}_n[X]$ et on pose $a_n = \inf_{P \in E_n} N(P)$.

- 1) Calculer a_0 et a_1 , et justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$.
- 2) Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.

Exercice 9 (X)

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On munit $E = \mathbb{R}^d$ de sa structure euclidienne canonique.

- 1) Soient B_1 et B_2 deux boules fermées de E , de centres respectifs x_1 et x_2 , et de même rayon $r > 0$.
Trouver $r_{\min}$ le rayon minimal d'une boule qui contient $B_1 \cap B_2$.
- 2) Soit K une partie compacte de E . On appelle r la borne inférieure de tous les rayons des boules fermées de E qui contiennent K . Montrer que r existe bien.
- 3) Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de boules fermées contenant K . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la boule B_n est de centre x_n et de rayon r_n . On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = r$. Déterminer la limite de la suite de terme général $z_n = \sup_{k > n} \|x_k - x_n\|$.

