

TD du chapitre 3 : Limites et continuité

Sauf mention contraire, on se place dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ (où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Exercice 1

Montrer que $f : x \mapsto \frac{1}{1+\|x\|}x$ est continue sur E , bijective de E dans la boule ouverte $B(0,1)$ et que sa réciproque est continue. On dit que f définit un *homéomorphisme* de E dans $B(0,1)$.

Exercice 2

On prend ici $E = C([0,1], \mathbb{R})$ et $\|f\| = \|f\|_1 = \int_0^1 |f|$. Montrer que $\phi : E \rightarrow \mathbb{R} ; f \mapsto \int_0^1 f(t)dt$ est continue.

Exercice 3

- 1) Soit $f : (x, y) \mapsto \frac{x^\alpha y^\beta}{x^2 + y^2}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$.
 - a. Déterminer l'ensemble de définition D de f .
 - b. Justifier que f est continue sur D .
 - c. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en $(0,0)$? sur $\mathbb{R}_+^2$? sur $\mathbb{R}^2$?
- 2) Prouver que $g : (x, y) \mapsto \begin{cases} 2x^2 + y^2 - 1 & \text{si } x^2 + y^2 > 1 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4

Ici, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et E de dimension finie $p > 0$.

Soient F est une partie fermée de E et f une application de F dans F , lipschitzienne de rapport $\lambda \in]0,1[$ pour la norme infinie dans une base $\mathcal{B}$ fixée de E (on dit que f est *contractante* pour la norme infinie).

On cherche à prouver que f possède un unique point fixe dans F (c'est un théorème de point fixe).

- 1) Montrer que si f possède un point fixe alors il est unique.
- 2) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E définie par $x_0 \in F$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.
Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in F$ et que $\|x_{n+1} - x_n\|_\infty \leq \lambda^n \|x_1 - x_0\|_\infty$.
- 3) Pour tout $i \in \llbracket 1 ; p \rrbracket$, on appelle $x_{i,n}$ la $i^{\text{ième}}$ coordonnée de x_n dans $\mathcal{B}$.
Montrer que la série $\sum (x_{i,n+1} - x_{i,n})$ est absolument convergente.
- 4) En déduire que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un vecteur a de E tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|x_n - a\|_\infty \leq \frac{\|x_1 - x_0\|_\infty}{1 - \lambda} \lambda^n.$$
- 5) Montrer que $f(a) = a$. Conclure.

Exercice 5

Soit une application $f : E \rightarrow F$ où $(F, \|\cdot\|)$ est un EVN (on note la norme comme celle de E).

- 1) Montrer que f est continue sur E si et seulement si l'image réciproque de toute partie ouverte de F est une partie ouverte de E .
- 2) Montrer que f est continue sur E si et seulement si l'image réciproque de toute partie fermée de F est une partie fermée de E .
- 3) On suppose que f est continue sur E . L'image d'une partie ouverte est-elle ouverte ? L'image d'une partie fermée est-elle fermée ?

Exercice 6

Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 7 (Centrale)

Soient $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R}) = \{A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2, a_{i,j} \in [0,1]\}$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée.

Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $M \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$, $\|A - B\| \leq \|M - B\|$ où $\|\cdot\|$ est une norme euclidienne sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**Exercice 8 (Mines)**

Soient $f, g \in C([0,1], [0,1])$ telles que $f \circ g = g \circ f$.

- 1) On suppose que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) > g(x)$.

Montrer qu'alors, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$, $f^n(x) \geq g^n(x) + n\alpha$ où f^n représente $f \circ f \circ \dots \circ f$ où f apparaît n fois. En déduire une contradiction.

- 2) Prouver alors qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice 9 (ENS)

Soit $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on pose $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$ (on a vu dans le TD du chapitre précédent que la série converge). Enfin, pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$T_n = \exp\left(\frac{1}{n} A\right) \exp\left(\frac{1}{n} B\right) \quad \text{et} \quad S_n = \exp\left(\frac{1}{n} (A+B)\right).$$

- 1) Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on pose $\|A\| = \max_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} \left(\sum_{j=1}^p |a_{i,j}| \right)$. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et que pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$. Que vaut $\|I_p\|$?
- 2) Montrer que $\|T_n - S_n\| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
- 3) Déterminer la limite de $(T_n)^n_{n \in \mathbb{N}^*}$.

