

**TD du chapitre 4 : Suites et séries de fonctions**
**Exercice 1**

Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \int_0^1 (t^2 + 1) \frac{ne^t + te^{-t}}{n+t} dt \right]$ .

**Exercice 2**

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}_+$ , on considère l'équation  $(E_{x,n}) : t^3 + xt - 1 - \frac{1}{n} = 0$  (d'inconnue  $t$ ).

- 1) Montrer que  $(E_{x,n})$  admet une unique solution réelle, que l'on notera  $u_n(x)$ .
- 2) Prouver que la suite de fonctions  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement vers une fonction  $u$ , strictement décroissante et continue sur  $\mathbb{R}_+$ .
- 3) Prouver que la convergence est uniforme sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Exercice 3**

Soient  $\varphi$  une fonction continue sur  $[0,1]$  et la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $f_0 = \varphi$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_{n+1} = 1 + F_n$  où  $F_n$  est la primitive de  $f_n$  qui s'annule en 0.

- 1) Montrer que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie.
- 2) En admettant que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers une fonction  $f$ , donner cette fonction.
- 3) Montrer que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $f$ . La convergence est-elle uniforme ?

**Exercice 4**

Pour  $x \in ]1; +\infty[$ , on pose  $\zeta(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$  et  $\tau(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ .

- 1) Montrer que la fonction  $\zeta$  est bien définie et continue sur  $]1; +\infty[$ .
- 2) Montrer que la fonction  $\zeta$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]1; +\infty[$  et exprimer ses dérivées successives sous la forme d'une somme de série.
- 3) Dresser le tableau de variations de  $\zeta$ .
- 4) Après avoir justifié que  $\tau$  est bien définie sur  $]1; +\infty[$ , établir une relation entre  $\zeta$  et  $\tau$ .
- 5) En déduire que  $\tau$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]1; +\infty[$ .
- 6) Donner un équivalent de  $\zeta(x)$  au voisinage de 1, puis au voisinage de  $+\infty$ .

### Exercice 5

Montrer que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{x^2 + n^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x}$ .

☺ Penser à une certaine technique du chapitre sur les séries numériques...

### Exercice 6

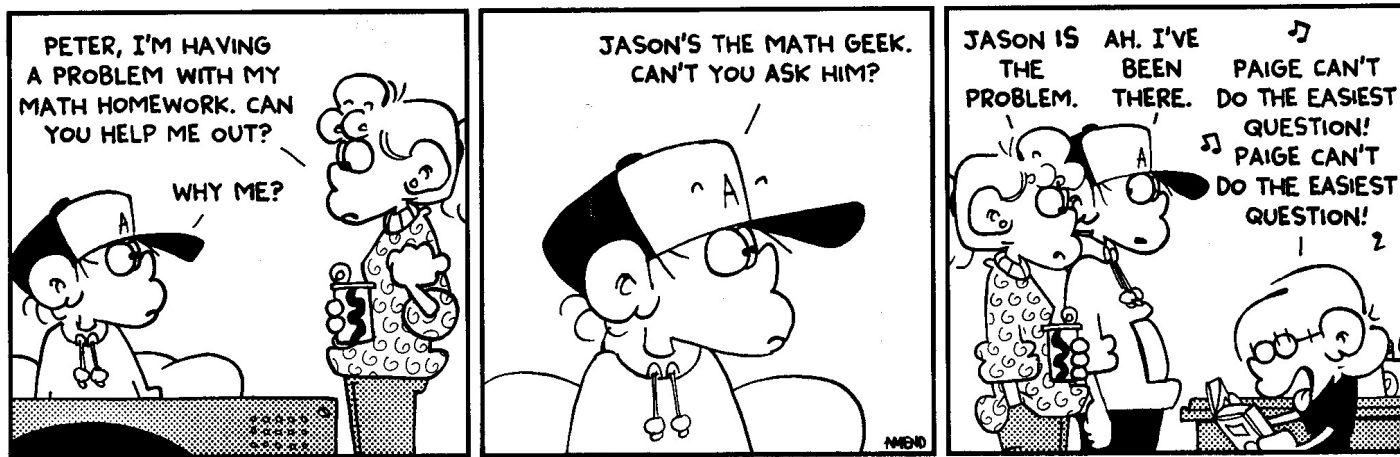
Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in [0, 1]$ , on pose  $f_n(x) = x^n(1-x)^n$  et  $I_n = \int_0^1 f_n(t) dt$  (on prendra  $f_0(0) = f_0(1) = 1$ ).

- 1) Montrer que  $\sum f_n$  converge normalement sur  $[0, 1]$ .
- 2) Calculer  $I_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- 3) Justifier que la série  $\sum \frac{1}{(2n+1) \binom{2n}{n}}$  converge et calculer sa somme.

### Exercice 7

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , on pose  $f_n(x) = \frac{x}{n(1+n^2x)}$ .

- 1) Etudier la convergence de  $\sum f_n$  sur  $\mathbb{R}_+$ .
- 2) Etudier la régularité (continuité, dérivabilité, classe  $C^k$ ) de la somme  $S = \sum_{n \geq 1} f_n$ .
- 3) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$ .



### Exercice 8 (Centrale)

Soit  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , la suite de fonctions polynômes définie par  $P_0 = 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n(x))^2.$$

Etudier la convergence simple et uniforme sur  $[0, 1]$  de la suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , puis de la série  $\sum (id - P_n)$ .

☺ On admettra la propriété de Césaro qui dit que si une suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une limite finie  $\ell$ , alors la

suite des moyennes de Césaro  $\left( \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} v_k \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge aussi vers  $\ell$ .

**Exercice 9 (Centrale)**

Soit  $f : x \mapsto -\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x-n)^2}$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

- 1) Montrer que  $f$  est bien définie, 1-périodique et continue sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .
- 2) Montrer que  $f$  se prolonge par continuité sur  $\mathbb{R}$  et que l'on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$4f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

- 3) Prouver que  $f$  est nulle et en déduire que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

