

TD du chapitre 6 : Compléments d'algèbre linéaire

Dans tout le TD, sauf mention contraire, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 1

Soient F, G et H trois sous-espaces de E .

1) Montrer que :

$$\dim(F + G + H) \leq \dim F + \dim G + \dim H - \dim(F \cap G) - \dim(F \cap H) - \dim(G \cap H) + \dim(F \cap G \cap H).$$

2) Soient F' (resp. G') un supplémentaire de $F \cap G$ dans F (resp. G). Montrer que :

$$F + G = (F \cap G) \oplus F' \oplus G'.$$

3) On suppose que $n \geq 3$. Montrer que l'intersection de $n-1$ hyperplans de E n'est pas réduite à $\{0\}$.

Exercice 2

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f^2 = g^2 = id_E$ et $fg + gf = 0$.

Montrer que n est pair et qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont respectivement :

$$\left(\begin{array}{c|c} I_p & 0_p \\ \hline 0_p & -I_p \end{array} \right) \text{ et } \left(\begin{array}{c|c} 0_p & I_p \\ \hline I_p & 0_p \end{array} \right).$$

Exercice 3

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

1) (f non injective) $\Leftrightarrow$ ($f = 0$ ou f est un diviseur de zéro à gauche).

2) (f non surjective) $\Leftrightarrow$ ($f = 0$ ou f est un diviseur de zéro à droite).

Exercice 4

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, annulateur de f et tel que $P = P_1 P_2$ où P_1 et P_2 sont deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ sans racine commune (réelle ou complexe).

On admet (ou rappelle) le théorème de Bézout pour les polynômes : avec les hypothèses faites ci-dessus sur P_1 et P_2 , il existe $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $UP_1 + VP_2 = 1$.

On veut prouver qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ où A et B sont des matrices carrées telles que $P_1(A) = 0$ et $P_2(B) = 0$. On pose $u = P_1(f)$ et $v = P_2(f)$.

1) Justifier que $uv = vu = 0$. En déduire que $\dim(\ker u) + \dim(\ker v) \geq n$.

2) Montrer que $\ker u \cap \ker v = \{0\}$, puis que $E = \ker u \oplus \ker v$.

3) Prouver que $\ker u$ est stable par f et que P_1 est un polynôme annulateur de l'endomorphisme induit par f sur $\ker u$ et conclure.

4) Peut-on généraliser au cas où $P = P_1 P_2 \dots P_r$ avec $r \geq 2$ et où les P_i sont des polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux sans racine commune (réelle ou complexe) ?

Exercice 5

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente, on pose $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$.

- 1) Soient A et B deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent.

Montrer que alors $A + B$ est nilpotente et $\exp(A + B) = \exp(A) \times \exp(B) = \exp(B) \times \exp(A)$.

- 2) Montrer que $\exp(A)$ est inversible et donner son inverse.

Exercice 6

Soient A et B deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $a \in \mathbb{K}$.

Existe-t-il $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $aM + \text{tr}(M)A = B$?

Exercice 7

Soit G un sous-groupe fini de $GL(E)$ (partie finie non vide de $GL(E)$, stable par composition et passage à la réciproque). On appelle r le cardinal de G .

- 1) On suppose que $\sum_{g \in G} \text{tr}(g) = 0$. Montrer que $\sum_{g \in G} g = 0$.

- 2) Montrer que $F = \{x \in E \mid \forall g \in G, g(x) = x\}$ est un sous-espace de E de dimension $\frac{1}{r} \sum_{g \in G} \text{tr}(g)$.

Exercice 8

Soit f un endomorphisme de E . On pose $N = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \ker f^k$ et $I = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \text{Im } f^k$.

On dit que f est nilpotent s'il existe une puissance de f nulle. On appelle alors indice de nilpotence de f le plus petit entier naturel non nul α tel que $f^\alpha = 0$.

- 1) Dans cette question, E n'a pas besoin d'être de dimension finie.
 - a. Montrer que les suites $(\ker f^k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\text{Im } f^k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont respectivement croissante et décroissante pour l'inclusion.
 - b. Montrer que si, pour $p \in \mathbb{N}$, on a $\text{Im } f^p = \text{Im } f^{p+1}$, alors $\text{Im } f^k = \text{Im } f^p$ pour tout entier $k \geq p$.
 - c. Montrer que l'on a la même propriété pour les $\ker f^k$.
 - d. Prouver que N et I sont stables par f .

Dans la suite, on suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

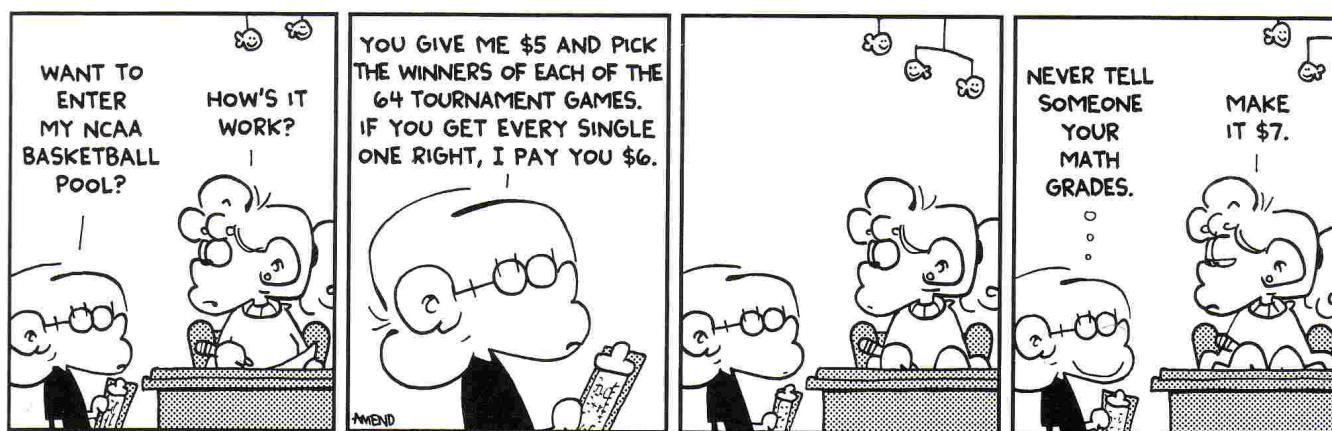
- 2) a. Prouver qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Im } f^p \neq \text{Im } f^{p-1}$ si $p \neq 0$ et $\text{Im } f^k = \text{Im } f^p$ pour tout entier $k \geq p$.
- b. Montrer qu'alors $\ker f^p \neq \ker f^{p-1}$ si $p \neq 0$ et $\ker f^k = \ker f^p$ pour tout entier $k \geq p$.
- c. Montrer que $p \leq n$.
- d. Justifier que $N = \ker f^p$ et $I = \text{Im } f^p$, et prouver que $E = \ker f^p \oplus \text{Im } f^p$.
- e. Montrer que la suite $(\text{rg}(f^k) - \text{rg}(f^{k+1}))_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante, et minorée par 1 jusqu'au rang $p-1$.
En déduire que pour tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ (quand $p \geq 2$) : $k \leq \text{rg}(f) - \text{rg}(f^{k+1}) \leq k[n - \text{rg}(f)]$.

- 3) On suppose ici que f est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe une puissance de f nulle. On appelle indice de nilpotence de f le plus petit entier naturel non nul α tel que $f^\alpha = 0$.
- Montrer que l'indice de nilpotence de f est p (défini dans la question précédente).
 - Justifier que $f^n = 0$.
 - On suppose que $f \neq 0$. Justifier qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$ et montrer que la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre.
 - On suppose ici que $p = n$. Prouver alors qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On revient au cas où f est quelconque.

- Montrer que l'endomorphisme induit par f sur N est nilpotent et que l'endomorphisme induit par f sur I appartient à $GL(I)$.
- Existe-t-il une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telle que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?



Exercice 9 (Inspiré de X-ESPCI)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- On suppose que $\text{Tr}(A) = 0$.
Prouver que A est semblable à une matrice dont le premier coefficient diagonal est nul.
- Montrer que si $\text{Tr}(A) = 0$, A peut se décomposer en une somme de deux matrices nilpotentes.
☺ On pourra prouver que A est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.
- Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, montrer que A et $-A$ sont semblables si et seulement si $\text{Tr}(A) = 0$.

Exercice 10 (Mines-Ponts)

- 1) Montrer que pour toute forme linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$, il existe une unique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = \text{Tr}(AM)$.
- 2) Déterminer les formes linéaires $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ telles que pour toutes matrices $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(MN) = \varphi(NM)$.

Exercice 11 (inspiré de Mines-Ponts) Pour les 5/2. Les 3/2 peuvent revenir à cet exercice après le chapitre 8.

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = \text{id}_E$.

- 1) Prouver que $\text{Im}(u - \text{id}_E) = \ker(u^2 + u + \text{id}_E)$, $\ker(u - \text{id}_E) = \text{Im}(u^2 + u + \text{id}_E)$ et que $\ker(u - \text{id}_E)$ et $\text{Im}(u - \text{id}_E)$ sont supplémentaires dans E .
- 2) Déterminer les sous-espaces stables par u quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- 3) Même question quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

