

Corrigé du DM n° 1

1) La division euclidienne de P par Q s'écrit $P = LQ + R$ avec $(L, R) \in \mathbb{C}[X]^2$ et $\deg R < \deg Q$.

Alors :

$$\frac{P}{Q} = \frac{LQ + R}{Q} = L + \frac{R}{Q}.$$

De plus, si $\frac{P}{Q} = L + \frac{R}{Q}$ avec $(L, R) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que $\deg R < \deg Q$, alors :

$$\frac{P}{Q} = \frac{LQ + R}{Q} \Leftrightarrow P = LQ + R.$$

Comme $\deg R < \deg Q$, $P = LQ + R$ est division euclidienne de P par Q , qui est unique, donc L et R sont uniques et finalement :

Il existe un unique couple $(L, R) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que $\deg R < \deg Q$ et $\frac{P}{Q} = L + \frac{R}{Q}$.

2) On fixe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq b$ et on prouve la propriété voulue par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$.

Posons $\delta = \frac{1}{a-b}$.

- *Initialisation* : Pour $p = 1$, on a :

$$\frac{1}{(X-a)(X-b)} = \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{X-a} - \frac{1}{X-b} \right) = \frac{\delta}{X-a} - \frac{\delta}{X-b}.$$

Avec $\lambda = \delta \in \mathbb{C}$ et $A = -\delta \in \mathbb{C}[X]$, on a la forme voulue.

La propriété est donc vraie au rang $p = 1$.

- *Hérédité* : On suppose la propriété vraie à un rang $p \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\frac{1}{(X-a)(X-b)^{p+1}} = \frac{1}{(X-a)(X-b)} \frac{1}{(X-b)^p} = \frac{\delta}{(X-a)(X-b)^p} - \frac{\delta}{(X-b)^{p+1}}.$$

Par hypothèse de récurrence, il existe $(\lambda, A) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}[X]$ tel que :

$$\frac{1}{(X-a)(X-b)^p} = \frac{\lambda}{X-a} + \frac{A}{(X-b)^p}.$$

Donc :

$$\frac{1}{(X-a)(X-b)^{p+1}} = \frac{\lambda\delta}{X-a} + \frac{\delta A}{(X-b)^p} - \frac{\delta}{(X-b)^{p+1}} = \frac{\lambda\delta}{X-a} + \frac{\delta(X-b)A - \delta}{(X-b)^{p+1}}.$$

Avec $\lambda\delta \in \mathbb{C}$ et $\delta(X-b)A - \delta \in \mathbb{C}[X]$, on a la forme voulue et la propriété est vraie au rang $p+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\text{Il existe } (\lambda, A) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}[X] \text{ tel que } \frac{1}{(X-a)(X-b)^p} = \frac{\lambda}{X-a} + \frac{A}{(X-b)^p} .}$$

3) Supposons qu'il existe $(P_1, \dots, P_r) \in \mathbb{C}[X]^r$ tel que $\frac{P}{Q} = L + \sum_{k=1}^r \frac{P_k}{(X-a_k)^{n_k}}$.

Comme $\frac{P}{Q} = L + \frac{R}{Q}$, on a alors $\frac{R}{Q} = \sum_{k=1}^r \frac{P_k}{(X-a_k)^{n_k}}$.

On veut donc prouver qu'il existe $(P_1, \dots, P_r) \in \mathbb{C}[X]^r$ tel que $\frac{R}{Q} = \sum_{k=1}^r \frac{P_k}{(X-a_k)^{n_k}}$. Procédons par récurrence sur $n = \deg Q \in \mathbb{N}^*$.

- *Initialisation* : Pour $n = 1$, on a $Q = X - a$ et $\frac{R}{Q} = \frac{R}{X-a}$ a la forme voulue. La propriété est donc vraie au rang $n = 1$.
- *Hérédité* : On suppose la propriété vraie à un rang $n = \deg Q \in \mathbb{N}^*$.

Soient alors $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, non nuls, sans racine complexe commune, tels que $\deg Q = n + 1$ et Q est unitaire. On peut écrire $Q = (X-a)Q_1$ avec $Q_1 = \prod_{k=1}^r (X-a_k)^{n_k}$ et $\deg Q_1 = n$.

Par hypothèse de récurrence, $\frac{R}{Q_1} = \sum_{k=1}^r \frac{S_k}{(X-a_k)^{n_k}}$, donc :

$$\frac{R}{Q} = \sum_{k=1}^r \frac{S_k}{(X-a)(X-a_k)^{n_k}} .$$

- Si $a \neq a_k$, alors d'après la question précédente, il existe $(\lambda_k, A_k) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}[X]$ tel que :

$$\frac{1}{(X-a)(X-a_k)^{n_k}} = \frac{\lambda_k}{X-a} + \frac{A_k}{(X-a_k)^{n_k}} .$$

- Si $a = a_k$, alors $\frac{1}{(X-a)(X-a_k)^{n_k}} = \frac{1}{(X-a_k)^{n_k+1}}$.

Ainsi :

- Si pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $a \neq a_k$, alors :

$$\frac{R}{Q} = \sum_{k=1}^r \frac{\lambda_k S_k}{X-a} + \sum_{k=1}^r \frac{A_k S_k}{(X-a_k)^{n_k}} = \frac{S}{(X-a)^1} + \sum_{k=1}^r \frac{A_k S_k}{(X-a_k)^{n_k}}$$

où $S = \sum_{k=1}^r \lambda_k S_k \in \mathbb{C}[X]$ et $A_k S_k \in \mathbb{C}[X]$ pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$.

○ S'il existe $k_0 \in \llbracket 1, r \rrbracket$ tel que $a = a_{k_0}$, alors :

$$\frac{R}{Q} = \frac{1}{X-a} \sum_{k=1, k \neq k_0}^r \lambda_k S_k + \frac{S_{k_0}}{(X-a_{k_0})^{n_{k_0}+1}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^r \frac{A_k S_k}{(X-a_k)^{n_k}} = \frac{S}{(X-a_{k_0})^{n_{k_0}+1}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^r \frac{A_k S_k}{(X-a_k)^{n_k}}.$$

où $S = (X-a_{k_0})^{n_{k_0}} \sum_{k=1, k \neq k_0}^r \lambda_k S_k + S_{k_0} \in \mathbb{C}[X]$ et $A_k S_k \in \mathbb{C}[X]$ pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket \setminus \{k_0\}$.

Dans les deux cas, $\frac{R}{Q}$ a la forme voulue et la propriété est vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi, il existe $(P_1, \dots, P_r) \in \mathbb{C}[X]^r$ tel que $\frac{P}{Q} = L + \sum_{k=1}^r \frac{P_k}{(X-a_k)^{n_k}}$.

Pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, notons $P_k = (X-a_k)^{n_k} L_k + R_k$ avec $\deg R_k < n_k$ la division euclidienne de P_k par $(X-a_k)^{n_k}$. On a alors :

$$\frac{R}{Q} = \sum_{k=1}^r \frac{(X-a_k)^{n_k} L_k + R_k}{(X-a_k)^{n_k}} = \sum_{k=1}^r L_k + \sum_{k=1}^r \frac{R_k}{(X-a_k)^{n_k}}$$

Soit :

$$R = \left(\sum_{k=1}^r L_k \right) Q + \sum_{k=1}^r R_k Q_k$$

Comme $\deg R_k < n_k$ et $\deg Q_k = \deg Q - n_k$, on a $\deg R_k Q_k < \deg Q$, donc $\sum_{k=1}^r \deg R_k Q_k < \deg Q$.

Ainsi :

$$\deg \left(\sum_{k=1}^r L_k \right) + \deg Q = \deg \left(\left(\sum_{k=1}^r L_k \right) Q \right) = \deg \left(R - \sum_{k=1}^r R_k Q_k \right) < \deg Q.$$

Soit $\deg \left(\sum_{k=1}^r L_k \right) < 0$, donc $\sum_{k=1}^r L_k = 0$ et $\frac{R}{Q} = \sum_{k=1}^r \frac{R_k}{(X-a_k)^{n_k}}$.

Ainsi, quitte à remplacer les P_k par les R_k , on peut supposer que $\deg P_k < n_k$ pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$ et finalement :

Il existe $(P_1, \dots, P_r) \in \mathbb{C}[X]^r$ tel que pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $\deg P_k < n_k$ et $\frac{P}{Q} = L + \sum_{k=1}^r \frac{P_k}{(X-a_k)^{n_k}}$.

4) Pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, la formule de Taylor pour P_k donne avec $\deg P_k < n_k$:

$$P_k = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{P_k^{(\ell)}(a_k)}{\ell!} (X-a_k)^\ell = \sum_{\ell=0}^{n_k-1} \frac{P_k^{(\ell)}(a_k)}{\ell!} (X-a_k)^\ell.$$

Donc :

$$\frac{P}{Q} = L + \sum_{k=1}^r \frac{P_k}{(X - a_k)^{n_k}} = L + \sum_{k=1}^r \sum_{\ell=0}^{n_k-1} \frac{P_k^{(\ell)}(a_k)}{\ell!} \frac{(X - a_k)^\ell}{(X - a_k)^{n_k}} = L + \sum_{k=1}^r \sum_{\ell=0}^{n_k-1} \frac{P_k^{(\ell)}(a_k)}{\ell!} \frac{1}{(X - a_k)^{n_k-\ell}}.$$

Après ré-indexation, on obtient :

$$\frac{P}{Q} = L + \sum_{k=1}^r \sum_{\ell=1}^{n_k} \frac{P_k^{(n_k-\ell)}(a_k)}{(n_k-\ell)!} \frac{1}{(X - a_k)^\ell}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\frac{P}{Q} = L + \sum_{k=1}^r \sum_{\ell=1}^{n_k} \frac{\alpha_{k,\ell}}{(X - a_k)^\ell} \text{ avec pour tout } k \in \llbracket 1, r \rrbracket \text{ et tout } \ell \in \llbracket 1, n_k \rrbracket, \alpha_{k,\ell} = \frac{P_k^{(n_k-\ell)}(a_k)}{(n_k-\ell)!}.$$

5) Si toutes les racines de Q sont simples, le résultat de la question 3 s'écrit :

$$\frac{P}{Q} = L + \sum_{k=1}^r \frac{\alpha_k}{X - a_k}$$

où pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, α_k est un polynôme de degré strictement inférieur à 1, donc constant. Autrement, les α_k sont des constantes complexes.

Soit $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$. On a :

$$\frac{P}{Q}(X - a_k) = (X - a_k)L + \alpha_k + (X - a_k) \sum_{\ell=1, \ell \neq k}^r \frac{\alpha_\ell}{X - a_\ell}.$$

Donc :

$$\lim_{z \rightarrow a_k} \frac{P(z)}{Q(z)}(z - a_k) = \lim_{z \rightarrow a_k} \left((z - a_k)L(z) + \alpha_k + (z - a_k) \sum_{\ell=1, \ell \neq k}^r \frac{\alpha_\ell}{z - a_\ell} \right) = \alpha_k.$$

Or, a_k est une racine simple de Q , donc $\lim_{z \rightarrow a_k} \frac{Q(z)}{z - a_k} = \lim_{z \rightarrow a_k} \frac{Q(z) - Q(a_k)}{z - a_k} = Q'(a_k) \neq 0$, d'où :

$$\alpha_k = \lim_{z \rightarrow a_k} \frac{P(z)}{Q(z)}(z - a_k) = \lim_{z \rightarrow a_k} \frac{P(z)}{\frac{Q(z)}{z - a_k}} = \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\frac{P}{Q} = L + \sum_{k=1}^r \frac{\alpha_k}{X - a_k} \text{ avec pour tout } k \in \llbracket 1, r \rrbracket, \alpha_k = \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)}.$$

6) Soit $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$. On a :

$$\frac{P}{Q}(X - a_k)^{n_k} = \frac{P}{Q_k} = (X - a_k)^{n_k} \left(L + \sum_{j=1, j \neq k}^r \frac{P_j}{(X - a_j)^{n_j}} \right) + P_k.$$

Donc, pour tout $j \in \llbracket 1, n_k \rrbracket$, on a avec la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned} \left(\frac{P}{Q_k} \right)^{(j)} &= \left[(X - a_k)^{n_k} \left(L + \sum_{j=1, j \neq k}^r \frac{P_j}{(X - a_j)^{n_j}} \right) \right]^{(j)} + P_k^{(j)} \\ &= \sum_{s=0}^j \binom{j}{s} \left[(X - a_k)^{n_k} \right]^{(s)} \left[L + \sum_{j=1, j \neq k}^r \frac{P_j}{(X - a_j)^{n_j}} \right]^{(j-s)} + P_k^{(j)} \\ &= \sum_{s=0}^j \binom{j}{s} n_k (n_k - 1) \dots (n_k - s + 1) (X - a_k)^{n_k - s} \left[L + \sum_{j=1, j \neq k}^r \frac{P_j}{(X - a_j)^{n_j}} \right]^{(j-s)} + P_k^{(j)} \end{aligned}$$

Et pour $j \in \llbracket 1, n_k \rrbracket$ et $s \in \llbracket 0, j \rrbracket$, on a $n_k - s \geq 1$, donc :

$$\left(\frac{P}{Q_k} \right)^{(j)} (a_k) = P_k^{(j)}(a_k).$$

Ainsi, avec la formule Taylor, $P_k = \sum_{j=0}^{n_k-1} \frac{P_k^{(j)}(a_k)}{j!} (X - a_k)^j$, vue dabs la question 4, on a bien :

$$P_k = \sum_{j=0}^{n_k-1} \frac{1}{j!} \left(\frac{P}{Q_k} \right)^{(j)} (a_k) (X - a_k)^j$$

On avait pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$ et tout $\ell \in \llbracket 1, n_k \rrbracket$, $\alpha_{k,\ell} = \frac{P_k^{(n_k-\ell)}(a_k)}{(n_k - \ell)!}$.

Avec $\left(\frac{P}{Q_k} \right)^{(n_k-\ell)} (a_k) = P_k^{(n_k-\ell)}(a_k)$, on obtient pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$ et tout $\ell \in \llbracket 1, n_k \rrbracket$:

$$\alpha_{k,\ell} = \frac{1}{(n_k - \ell)!} \left(\frac{P}{Q_k} \right)^{(n_k-\ell)} (a_k)$$

7) Avec $\frac{P}{Q} = L + \sum_{k=1}^r \frac{P_k}{(X - a_k)^{n_k}}$, on a :

$$P = QL + \sum_{k=1}^r P_k Q_k.$$

Et pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $\deg P_k < n_k$ et :

$$\deg P_k Q_k = \deg P_k + \deg Q_k = \deg P_k + \deg Q - n_k < \deg Q.$$

Donc $\deg \sum_{k=1}^r P_k Q_k < \deg Q$, ce qui veut dire que $P = QL + \sum_{k=1}^r P_k Q_k$ est la division euclidienne de P par Q (qui est unique), donc que L est le quotient dans cette division, donc unique.

Or, d'après la question précédente, $P_k = \sum_{j=0}^{n_k-1} \frac{1}{j!} \left(\frac{P}{Q_k} \right)^{(j)} (a_k)(X-a_k)^j$ pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, donc les P_k sont définis de manière unique à l'aide de P et Q .

Ainsi, si L et les P_k sont uniques :

La décomposition en éléments simples de $\frac{P}{Q} = L + \sum_{k=1}^r \frac{P_k}{(X-a_k)^{n_k}}$ est unique.

8) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

On pose $P = X^n$, $Q = X^n - 1$ et $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. On a :

$$\frac{P}{Q} = \frac{X^n}{X^n - 1} = 1 + \frac{1}{X^n - 1} = 1 + \frac{1}{\prod_{1 \leq k \leq n} (X - \omega^k)}.$$

Les racines de Q sont toutes simples, donc on peut utiliser la question 5, soit $\frac{P}{Q} = 1 + \sum_{k=1}^r \frac{\alpha_k}{X - \omega^k}$ avec pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$:

$$\alpha_k = \frac{P(\omega^k)}{Q'(\omega^k)} = \frac{\omega^{kn}}{n \omega^{k(n-1)}} = \frac{\omega^k}{n}.$$

Ainsi :

la décomposition en éléments simples de $\frac{X^n}{X^n - 1}$ est $\frac{X^n}{X^n - 1} = 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^r \frac{\omega^k}{X - \omega^k}$.

On pose maintenant $P = 1$ et $Q = (X^2 - 1)^n = (X - 1)^n (X + 1)^n$. D'après la question 6, on a :

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{(X^2 - 1)^n} = \frac{1}{(X - 1)^n (X + 1)^n} = \sum_{\ell=1}^n \frac{\frac{1}{(n-\ell)!} \left(\frac{1}{(X+1)^n} \right)^{(n-\ell)}}{(X-1)^\ell} \quad (1) + \sum_{\ell=1}^n \frac{\frac{1}{(n-\ell)!} \left(\frac{1}{(X-1)^n} \right)^{(n-\ell)}}{(X+1)^\ell} \quad (-1).$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\left(\frac{1}{(X+1)^n} \right)^{(k)} = \left((X+1)^{-n} \right)^{(k)} = (-1)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!} \frac{1}{(X+1)^{n+k}}.$$

Donc :

$$\left(\frac{1}{(X+1)^n} \right)^{(n-\ell)} \quad (1) = (-1)^{n-\ell} \frac{(2n-\ell-1)!}{(n-1)!} \frac{1}{2^{2n-\ell}}.$$

Et de même :

$$\left(\frac{1}{(X-1)^n} \right)^{(n-\ell)} \quad (-1) = (-1)^n \frac{(2n-\ell-1)!}{(n-1)!} \frac{1}{2^{2n-\ell}}.$$

Finalement :

$$\frac{1}{(X^2 - 1)^n} = \sum_{\ell=1}^n \frac{\frac{1}{(n-\ell)!} (-1)^{n-\ell} \frac{(2n-\ell-1)!}{(n-1)!} \frac{1}{2^{2n-\ell}}}{(X-1)^\ell} + \sum_{\ell=1}^n \frac{\frac{1}{(n-\ell)!} (-1)^n \frac{(2n-\ell-1)!}{(n-1)!} \frac{1}{2^{2n-\ell}}}{(X+1)^\ell}.$$

Soit :

$$\boxed{\frac{1}{(X^2 - 1)^n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{\ell=1}^n (-1)^\ell 2^\ell \binom{2n-\ell-1}{n-1} \frac{1}{(X-1)^\ell} + \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{\ell=1}^n 2^\ell \binom{2n-\ell-1}{n-1} \frac{1}{(X+1)^\ell}}$$