

Corrigé du DS n° 1
Problème n° 1
I Résultats préliminaires

I.A –

Q1. Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : Soit $x_1 \in \mathbb{R}$. On a :

$$\left| \left(\prod_{k=1}^1 (1 + x_k) \right) - 1 \right| = |1 + x_1 - 1| = |x_1| = 1 + |x_1| - 1 = \left(\prod_{k=1}^1 (1 + |x_k|) \right) - 1.$$

L'inégalité est donc vraie au rang $n = 1$ (c'est même une égalité).

Hérédité : Supposons la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. On a :

$$\begin{aligned} \left| \left(\prod_{k=1}^{n+1} (1 + x_k) \right) - 1 \right| &= \left| \left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \right) (1 + x_{n+1}) - 1 \right| \\ &= \left| \left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \right) (1 + x_{n+1}) - (1 + x_{n+1}) + (1 + x_{n+1}) - 1 \right| \\ &= \left| \left[\left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \right) - 1 \right] (1 + x_{n+1}) + x_{n+1} \right| \\ &\leq \left| \left[\left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \right) - 1 \right] (1 + x_{n+1}) \right| + |x_{n+1}| \\ &\leq \left| \left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \right) - 1 \right| (1 + |x_{n+1}|) + |x_{n+1}| \end{aligned}$$

Avec l'hypothèse de récurrence et l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$\begin{aligned} \left| \left(\prod_{k=1}^{n+1} (1 + x_k) \right) - 1 \right| &\leq \left| \left[\left(\prod_{k=1}^n (1 + |x_k|) \right) - 1 \right] (1 + |x_{n+1}|) + |x_{n+1}| \right| \\ &\leq \left(\prod_{k=1}^n (1 + |x_k|) \right) (1 + |x_{n+1}|) - 1 - |x_{n+1}| + |x_{n+1}| = \left(\prod_{k=1}^{n+1} (1 + |x_k|) \right) - 1 \end{aligned}$$

L'inégalité est donc vraie au rang $n + 1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit :

Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\left| \left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \right) - 1 \right| \leq \left(\prod_{k=1}^n (1 + |x_k|) \right) - 1.$

Q2. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in [-1; +\infty[^n$.

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $x_k \in [-1; +\infty[$, donc $1 + x_k \geq 0$ et par convexité de la fonction exponentielle, on peut écrire $0 \leq 1 + x_k \leq \exp(x_k)$. En multipliant membre à membre pour k allant de 1 à n , on obtient :

$$0 \leq \prod_{k=1}^n (1 + x_k) \leq \prod_{k=1}^n \exp(x_k).$$

Soit :

$$\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \leq \exp\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)$$

I.B –

Q3. Pour tout $t \in \mathbb{C}$, les séries $\sum \frac{t^k}{k!}$ et $\sum \frac{|t|^k}{k!}$ convergent et

$$\left| (1+t) - e^t \right| = \left| (1+t) - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \right| = \left| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|t|^k}{k!}.$$

Or, avec une réindexation et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|t|^k}{k!} = e^{|t|}$, on peut écrire :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|t|^k}{k!} = |t|^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|t|^{k-2}}{k!} = |t|^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|t|^k}{(k+2)!} = |t|^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+2)(k+1)} \frac{|t|^k}{k!} \leq |t|^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|t|^k}{k!} = |t|^2 e^{|t|}.$$

Ainsi, on a bien :

$$\left| (1+t) - e^t \right| \leq |t|^2 e^{|t|}$$

Q4. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\left| a^n - b^n \right| = \left| (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \right| = |a-b| \left| \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \right| \leq |a-b| \left(\sum_{k=0}^{n-1} |a|^k |b|^{n-1-k} \right).$$

Et, avec $M = \max(|a|, |b|)$, on a $|a| \leq M$ et $|b| \leq M$, d'où :

$$\sum_{k=0}^{n-1} |a|^k |b|^{n-1-k} \leq \sum_{k=0}^{n-1} M^k M^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} M^{n-1} = n M^{n-1}.$$

Ainsi, on a bien :

$$\left| a^n - b^n \right| \leq n M^{n-1} |a - b|$$

Q5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

En posant $a = 1 + \frac{z}{n}$ et $b = e^{z/n}$, on a :

$$|a| = \left| 1 + \frac{z}{n} \right| \leq 1 + \frac{|z|}{n} \leq e^{|z|/n}$$

$$|b| = |e^{z/n}| = e^{\operatorname{Re}(z)/n} \leq e^{|z|/n} \quad (\text{car } \operatorname{Re}(z) \leq |z|)$$

Donc, $M = \max(|a|, |b|) \leq e^{|z|/n}$ et avec la question précédente, on obtient :

$$\left| \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n - e^z \right| = \left| \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n - (e^{z/n})^n \right| \leq n M^{n-1} \left| 1 + \frac{z}{n} - e^{z/n} \right| \leq n e^{\frac{(n-1)|z|}{n}} \left| 1 + \frac{z}{n} - e^{z/n} \right|.$$

D'après la question **Q3**, on a $\left| 1 + \frac{z}{n} - e^{z/n} \right| \leq \left| \frac{z}{n} \right|^2 e^{\frac{|z|}{n}}$, donc

$$\left| \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n - e^z \right| \leq n e^{\frac{(n-1)|z|}{n}} \left| \frac{z}{n} \right|^2 e^{\frac{|z|}{n}} = n \frac{|z|^2}{n^2} e^{\frac{(n-1)|z|}{n}} e^{\frac{|z|}{n}}.$$

Soit :

$$\boxed{\left| \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n - e^z \right| \leq \frac{|z|^2}{n} e^{|z|}}$$

Q6. Pour $z \in \mathbb{C}$ fixé, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|z|^2}{n} e^{|z|} = 0$, donc avec le théorème des gendarmes et $u_n = \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n$, la question précédente permet de conclure que :

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers e^z .

II Exemples de calcul de produit infini

II.A –

Q7. Soit un entier $N \geq 2$. Posons $P_N = \prod_{n=2}^N \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$ et $Q_N = \prod_{n=2}^N \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right)$.

On a :

$$P_N = \prod_{n=2}^N \frac{n^2 - 1}{n^2} = \prod_{n=2}^N \frac{(n+1)(n-1)}{n^2} = \left(\prod_{n=2}^N \frac{n+1}{n} \right) \left(\prod_{n=2}^N \frac{n-1}{n} \right) = \frac{N+1}{2} \frac{1}{N} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{N} \right).$$

Alors, $P_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$, donc le produit converge et vaut :

$$\boxed{\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{2}}$$

Par ailleurs :

$$Q_{2N} = \prod_{n=2}^{2N} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right) = \prod_{\substack{n=2 \\ n \text{ pair}}}^{2N} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right) \times \prod_{\substack{n=2 \\ n \text{ impair}}}^{2N} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right).$$

En réindexant chacun des deux produits, on obtient :

$$\begin{aligned} \prod_{n=2}^{2N} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right) &= \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{1}{2n} \right) \times \prod_{n=1}^{N-1} \left(1 + \frac{1}{2n+1} \right) = \prod_{n=1}^N \frac{2n-1}{2n} \times \prod_{n=1}^{N-1} \frac{2n+2}{2n+1} \\ &= \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2N-1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2N)} \times \frac{4 \times \dots \times (2N)}{3 \times \dots \times (2N-1)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Alors :

$$Q_{2N+1} = \prod_{n=2}^{2N+1} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right) = \prod_{n=2}^{2N} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right) \times \left(1 + \frac{(-1)^{2N+2}}{2N+1} \right) = \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{2N+1} \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$$

Ainsi, les suites $(Q_{2N})_{N \geq 2}$ et $(Q_{2N+1})_{N \geq 2}$ convergent vers $\frac{1}{2}$, donc $Q_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$ et :

$$\boxed{\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right) = \frac{1}{2}}$$

II.B – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u \mapsto \cos^n u$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc W_n est bien défini.

Q8. Soit $n \in \mathbb{N}$.

En intégrant par parties, on a :

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2} u \, du = \int_0^{\pi/2} (\cos u) (\cos^{n+1} u) \, du \\ &= \left[(\sin u) (\cos^{n+1} u) \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (\sin u) ((n+1)(-\sin u) \cos^n u) \, du \\ &= (n+1) \int_0^{\pi/2} (\sin^2 u) (\cos^n u) \, du = (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 u) (\cos^n u) \, du \\ &= (n+1) \int_0^{\pi/2} (\cos^n u - \cos^{n+2} u) \, du = (n+1) W_n - (n+1) W_{n+2} \end{aligned}$$

Ainsi, $W_{n+2} = (n+1) W_n - (n+1) W_{n+2}$, d'où :

$$\boxed{(n+2) W_{n+2} = (n+1) W_n}$$

Aux rangs impairs, la relation ci-dessus devient : $(2n+3) W_{2n+3} = (2n+2) W_{2n+1}$.

Posons alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = W_{2n+1} \frac{(2n+1)!}{2^{2n} (n!)^2}$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$V_{n+1} = W_{2n+3} \frac{(2n+3)!}{2^{2n+2} ((n+1)!)^2} = \frac{2n+2}{2n+3} W_{2n+1} \frac{(2n+3)(2n+2)}{4(n+1)^2} \frac{(2n+1)!}{2^{2n} (n!)^2} = V_n.$$

Ainsi, la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. Enfin, on a $V_0 = W_1 = \int_0^{\pi/2} \cos u \, du = [\sin u]_0^{\pi/2} = 1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = V_0 = 1$, soit :

$$W_{2n+1} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}$$

Q9. A l'aide de la formule de Stirling, on obtient :

$$W_{2n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^{2n} \left(\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \right)^2}{\sqrt{2\pi} (2n+1) \left(\frac{2n+1}{e} \right)^{2n+1}} = \frac{2\pi n \frac{2^{2n} n^{2n}}{e^{2n}}}{\sqrt{2\pi} (2n+1)^{3/2} \frac{(2n+1)^{2n}}{e^{2n+1}}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{-2n}.$$

Or, $\left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{-2n} = e^{-2n \ln \left(1 + \frac{1}{2n} \right)} = e^{-2n \left(\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n} \right) \right)} = e^{(-1+o(1))} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1}$ et ainsi :

$$W_{2n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{4n^2 - 1} \right) &= \prod_{n=1}^N \frac{4n^2}{4n^2 - 1} = \prod_{n=1}^N \frac{2^2 n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2^{2N} \left(\prod_{n=1}^N n \right)^2}{\left(\prod_{n=1}^N (2n-1) \right) \left(\prod_{n=1}^N (2n+1) \right)} \\ &= \frac{2^{2N} (N!)^2}{(1 \times 3 \times \dots \times (2N-1)) (3 \times \dots \times (2N+1))} = \frac{2^{2N} (N!)^2 (2 \times 4 \times \dots \times (2N))^2}{(2N)! (2N+1)!} \\ &= (2N+1) \left(\frac{2^{2N} (N!)^2}{(2N+1)!} \right)^2 = (2N+1) (W_{2N+1})^2 \end{aligned}$$

Alors :

$$\prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{4n^2 - 1} \right) \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} (2N+1) \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{N}} \right)^2 = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{2N} \right).$$

Ainsi, le produit $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{4n^2 - 1} \right)$ converge et vaut :

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{4n^2 - 1} \right) = \frac{\pi}{2}$$

Problème n° 2

PRELIMINAIRES

Q10. Les fonctions $|f|$ et h sont réelles positives sur $[1, +\infty[$, donc $x \mapsto \int_1^x |f(t)| dt$ et $x \mapsto \int_1^x h(t) dt$ sont croissantes sur $[1, +\infty[$. Comme $x \mapsto \int_1^x h(t) dt$ admet une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$ que l'on notera L , on a $\int_1^x h(t) dt \leq L$ pour tout $x \in [1, +\infty[$. Comme $|f(x)| \leq h(x)$, on a pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$\int_1^x |f(t)| dt \leq \int_1^x h(t) dt \leq L.$$

Ainsi, $x \mapsto \int_1^x |f(t)| dt$ est croissante et majorée par L sur $[1, +\infty[$, donc d'après le théorème de la limite monotone :

$$x \mapsto \int_1^x |f(t)| dt \text{ admet une limite finie quand } x \rightarrow +\infty.$$

Q11. On suppose dans un premier temps f réelle et on pose :

$$f_+ : x \mapsto \begin{cases} f(x) = |f(x)| & \text{quand } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{quand } f(x) < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad f_- : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{quand } f(x) \geq 0 \\ -f(x) = |f(x)| & \text{quand } f(x) < 0 \end{cases}$$

On a pour tout $x \in [1, +\infty[$, $0 \leq f_+(x) \leq |f(x)|$ et $0 \leq f_-(x) \leq |f(x)|$. Comme $x \mapsto \int_1^x |f(t)| dt$ admet une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$, les fonctions $x \mapsto \int_1^x |f_+(t)| dt = \int_1^x f_+(t) dt$ et $x \mapsto \int_1^x |f_-(t)| dt = \int_1^x f_-(t) dt$ admettent une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$.

Or, $f = f_+ + f_-$, donc pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\int_1^x f(t) dt = \int_1^x f_+(t) dt + \int_1^x f_-(t) dt$ et $x \mapsto \int_1^x f(t) dt$ admet une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$.

On suppose maintenant que f est à valeurs complexes. Pour tout $x \in [1, +\infty[$, $|\operatorname{Re}(f(x))| \leq |f(x)|$, donc, d'après la question 1, $x \mapsto \int_1^x |\operatorname{Re}(f(t))| dt$ admet une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$ et d'après ce qui précède, $x \mapsto \int_1^x \operatorname{Re}(f(t)) dt = \operatorname{Re} \left[\int_1^x f(t) dt \right]$ admet une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$.

On prouve de même que $x \mapsto \int_1^x \operatorname{Im}(f(t)) dt = \operatorname{Im} \left[\int_1^x f(t) dt \right]$ admet une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$ et finalement, $x \mapsto \int_1^x f(t) dt$ admet une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$.

Ainsi, dans tous les cas :

$$\text{Si } x \mapsto \int_1^x |f(t)| dt \text{ admet une limite finie quand } x \rightarrow +\infty, \text{ alors } x \mapsto \int_1^x f(t) dt \text{ aussi.}$$

Q12. a. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a, en intégrant par parties (on peut car f est de classe C^1) :

$$\begin{aligned} w_n &= \int_{n-1}^n f(t)dt - f(n) = [tf(t)]_{n-1}^n - \int_{n-1}^n t f'(t)dt - f(n) \\ &= nf(n) - (n-1)f(n-1) - \int_{n-1}^n t f'(t)dt - f(n) = (n-1)[f(n) - f(n-1)] - \int_{n-1}^n t f'(t)dt \\ &= (n-1) \int_{n-1}^n f'(t)dt - \int_{n-1}^n t f'(t)dt \end{aligned}$$

Soit finalement :

$$w_n = \int_{n-1}^n (n-1-t) f'(t)dt$$

On a alors :

$$|w_n| = \left| \int_{n-1}^n (n-1-t) f'(t)dt \right| \leq \int_{n-1}^n |(n-1-t) f'(t)|dt = \int_{n-1}^n |n-1-t| |f'(t)|dt.$$

Or, pour tout $t \in [n-1, n]$, $|n-1-t| = t - (n-1) \leq 1$, donc :

$$|w_n| \leq \int_{n-1}^n |f'(t)|dt$$

b. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a $\sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k |f'(t)|dt = \int_1^n |f'(t)|dt$. Or, $\int_1^x |f'(t)|dt$ admet une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$, donc la série $\sum \int_{n-1}^n |f'(t)|dt$ converge et par comparaison, $\sum |w_n|$ converge, donc :

La série $\sum w_n$ est absolument convergente.

c. D'après ce qui précède, $\sum w_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Or, pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a $f(n) = \int_{n-1}^n f(t)dt - w_n$, ce qui permet de conclure immédiatement que $\sum f(n)$ converge si et seulement si $\sum \int_{n-1}^n f(t)dt$ converge. Enfin, $\sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k f(t)dt = \int_1^n f(t)dt$ et ainsi :

La série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_1^n f(t)dt \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Q13. a. La fonction f est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$ et pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \left(x \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} - \sin \sqrt{x} \right) = \frac{\cos \sqrt{x}}{2x\sqrt{x}} - \frac{\sin \sqrt{x}}{x^2}.$$

Alors, pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a $|f'(x)| \leq \frac{|\cos \sqrt{x}|}{2x\sqrt{x}} + \frac{|\sin \sqrt{x}|}{x^2} \leq \frac{1}{2x^{3/2}} + \frac{1}{x^2}$ et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \left(\frac{1}{2t^{3/2}} + \frac{1}{t^2} \right) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \right) = 2.$$

Donc, d'après la question 1 :

$$x \mapsto \int_1^x |f'(t)| dt \text{ admet une limite finie quand } x \rightarrow +\infty.$$

b. Pour tout $x \in [1, +\infty[$, en posant le changement de variable $u = \sqrt{t}$ (soit $t = u^2$ et $dt = 2u du$), on a :

$$\int_1^x f(t) dt = \int_1^x \frac{\sin \sqrt{t}}{t} dt = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin u}{u^2} 2u du = 2 \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin u}{u} du.$$

En intégrant par parties, on obtient alors :

$$\int_1^x f(t) dt = 2 \left(\left[\frac{-\cos u}{u} \right]_1^{\sqrt{x}} - \int_1^{\sqrt{x}} -\frac{\cos u}{u^2} du \right) = 2 \left(\cos 1 - \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos u}{u^2} du \right).$$

Ainsi, on a bien, pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$\int_1^x f(t) dt = 2 \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin u}{u} du = 2 \left(\cos 1 - \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos u}{u^2} du \right)$$

c. On a pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\int_1^{\sqrt{x}} \left| \frac{\cos u}{u^2} \right| du \leq \int_1^{\sqrt{x}} \frac{du}{u^2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$, donc, comme plus haut, on peut conclure que la fonction $x \mapsto \int_1^{\sqrt{x}} \left| \frac{\cos u}{u^2} \right| du$ admet une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$.

D'après la question 2, il en va de même pour $x \mapsto \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos u}{u^2} du$ et, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$, la fonction $x \mapsto \int_1^x f(t) dt$ admet, elle aussi, une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$.

Ceci prouve que la suite $\left(\int_1^n f(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Or, d'après la question a, la fonction f vérifie les hypothèses de la question 3, ce qui permet de conclure que la série $\sum f(n)$ converge, autrement dit :

$$\text{La série } \sum \frac{\sin \sqrt{n}}{n} \text{ converge.}$$

PARTIE I

Q14. On a ici $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S \neq 0$. Comme $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k = \frac{S_n}{n}$, on a :

$$v_n \sim \frac{S}{n}.$$

Or, la série harmonique diverge, donc :

$$\text{La série } \sum v_n \text{ diverge.}$$

Q15. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{(-1)^n}{2E\left(\frac{n+1}{2}\right)}$, soit, plus simplement :

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{quand } n \text{ est pair} \\ -\frac{1}{n+1} & \text{quand } n \text{ est impair} \end{cases}$$

On a alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$S_{2p} = \sum_{k=1}^{2p} u_k = \sum_{k=1}^p u_{2k} + \sum_{k=1}^p u_{2k-1} = \sum_{k=1}^p \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^p \frac{1}{2k} = 0.$$

Et :

$$S_{2p+1} = S_{2p} + u_{2p+1} = 0 - \frac{1}{2p+1+1} = -\frac{1}{2(p+1)}.$$

Donc, $\lim_{p \rightarrow +\infty} S_{2p} = \lim_{p \rightarrow +\infty} S_{2p+1} = 0$, et ainsi :

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge et } S = 0.}$$

D'après ce qui précède :

$$v_n = \frac{S_n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{quand } n \text{ est pair} \\ -\frac{1}{n(n+1)} & \text{quand } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Comme $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$ et la série de Riemann converge, la série $\sum \left(-\frac{1}{n(n+1)}\right)$ converge et donc :

$$\boxed{\sum v_n \text{ converge.}}$$

Q16. On procède comme ci-dessus. On a pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} u_{2p} = \frac{1}{\ln(p+1)} \\ u_{2p-1} = -\frac{1}{\ln(p+1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_{2p} = 0 \\ S_{2p-1} = -\frac{1}{\ln(p+1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{2p} = 0 \\ v_{2p-1} = -\frac{1}{(2p-1)\ln(p+1)} \end{cases}$$

Alors, $\lim_{p \rightarrow +\infty} S_{2p} = \lim_{p \rightarrow +\infty} S_{2p-1} = 0$, d'où :

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge et } S = 0.}$$

Comme $v_{2p-1} \sim -\frac{1}{2p \ln p}$ et la série $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge (par comparaison série-intégrale) :

$$\boxed{\sum v_n \text{ diverge.}}$$

Q17. Dans les deux questions précédentes, on a $S = 0$ et une fois $\sum v_n$ converge, une fois elle diverge, donc :

Quand $S = 0$, on ne peut pas conclure quant à la nature de la série $\sum v_n$.

PARTIE II

Q18. Si la série $\sum u_n$ diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$, S_n et donc v_n sont de signe constant à partir d'un certain rang (positif si $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$, négatif si $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\infty$).

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |S_n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |n v_n| = +\infty$, donc $\frac{1}{n} = o(v_n)$. Comme la série harmonique diverge :

$\sum v_n$ diverge.

PARTIE III

Q19. Ici, $u_n = (-1)^n$. La suite u ne converge pas vers 0, donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n (-1)^k = (-1) \frac{1 - (-1)^n}{1 - (-1)} = \frac{(-1)^n - 1}{2}.$$

Donc, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite. Ainsi :

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie bien les hypothèses de cette partie.

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{S_n}{n} = \frac{(-1)^n - 1}{2n} = \frac{1}{2} \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{2} \frac{1}{n}$. La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge, mais la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc :

$\sum v_n$ diverge.

Q20. Ici, $u_1 = -1$ et, pour $n \geq 2$, $u_n = 2(-1)^n$.

La suite u ne converge pas vers 0, donc $\sum u_n$ diverge grossièrement. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 2$:

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = -1 + 2 \sum_{k=2}^n (-1)^k = -1 + 2(-1)^2 \frac{1 - (-1)^{n-1}}{1 - (-1)} = (-1)^n.$$

Donc, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite. Ainsi :

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie bien les hypothèses de cette partie.

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{S_n}{n} = \frac{(-1)^n}{n}$ et la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge, donc :

$$\sum v_n \text{ converge.}$$

Q21. Dans les deux questions précédentes, une fois $\sum v_n$ converge, une fois elle diverge, donc :

Quand la série $\sum u_n$ diverge grossièrement et que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite, on ne peut pas conclure quant à la nature de la série $\sum v_n$.

PARTIE IV

Q22. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} u_n &= \sin(\sqrt{n}) - \sin(\sqrt{n-1}) \\ &= 2 \sin\left(\frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{2}\right) \\ &= 2 \sin\left(\frac{1}{2(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{2}\right) \end{aligned}$$

Donc $|u_n| \leq 2 \left| \sin\left(\frac{1}{2(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}\right) \right|$ et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{2(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}\right) = \sin 0 = 0$, on a bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

De plus, on a par télescopage, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n (\sin(\sqrt{k}) - \sin(\sqrt{k-1})) = \sin(\sqrt{n}) - \sin(\sqrt{0}) = \sin(\sqrt{n}).$$

Alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n^2} = \sin n$, donc, d'après le résultat rappelé dans l'énoncé, $(S_{n^2})_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'a pas de limite.

Or, si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admettait une limite, toute suite extraite aurait la même limite, y compris $(S_{n^2})_{n \in \mathbb{N}^*}$. Donc, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite, et ainsi :

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie bien les hypothèses de cette partie.

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{S_n}{n} = \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$ et, d'après la question des préliminaires, la série $\sum \frac{\sin \sqrt{n}}{n}$ converge, donc :

$$\sum v_n \text{ converge.}$$

Q23. Comme la suite u est la même que celle de la question précédente en dehors de son premier terme, sa limite est toujours 0. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 1 + \sin(\sqrt{n})$, donc $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite, et ainsi :

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie bien les hypothèses de cette partie.

On a ici $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{S_n}{n} = \frac{1 + \sin(\sqrt{n})}{n} = \frac{1}{n} + \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$. Comme $\sum \frac{\sin \sqrt{n}}{n}$ converge et $\sum \frac{1}{n}$ diverge :

$\sum v_n$ diverge.

Q24. Dans les deux questions précédentes, une fois $\sum v_n$ converge, une fois elle diverge, donc :

Quand la série $\sum u_n$ diverge, mais pas grossièrement, et que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite, on ne peut pas conclure quant à la nature de la série $\sum v_n$.

CONCLUSION

Q25. Dans les quatre parties précédentes, nous avons passé en revue tous les comportements possibles pour la série $\sum u_n$: convergence, divergence vers l'infini ou absence de limite pour la somme partielle.

En définitive, on peut conclure quant à la nature de $\sum v_n$ uniquement dans le cas où la somme partielle S_n de la suite u admet une limite non nulle (finie ou infinie).

Problème n° 3

Q26. On a (avec une ré-indexation à la dernière étape) :

$$P(X) = X^p P\left(\frac{1}{X}\right) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^p a_k X^k = X^p \sum_{k=0}^p a_k \frac{1}{X^k} = \sum_{k=0}^p a_k X^{p-k} = \sum_{k=0}^p a_{p-k} X^k$$

Par unicité des coefficients, on obtient alors pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$:

$$a_k = a_{p-k}$$

Q27. Avec $\sum_{i=1}^d m_i = p$, on a :

$$\begin{aligned} X^p P\left(\frac{1}{X}\right) &= X^{m_1 + \dots + m_d} a_p \prod_{i=1}^d \left(\frac{1}{X} - \lambda_i\right)^{m_i} = a_p \prod_{i=1}^d X^{m_i} \left(\frac{1}{X} - \lambda_i\right)^{m_i} \\ &= a_p \prod_{i=1}^d (1 - \lambda_i X)^{m_i} = a_p \prod_{i=1}^d (-1)^{m_i} (\lambda_i X - 1)^{m_i} \end{aligned}$$

Donc :

$$X^p P\left(\frac{1}{X}\right) = (-1)^p a_p \prod_{i=1}^d (\lambda_i X - 1)^{m_i}$$

Remarquons que si l'un des λ_i est nul, alors $\deg X^p P\left(\frac{1}{X}\right) < p = \deg P$, donc et donc P ne peut pas être réciproque. Ainsi, si P est réciproque alors $\lambda_i \neq 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ et :

$$P(X) = X^p P\left(\frac{1}{X}\right) = (-1)^p a_p \prod_{i=1}^d (\lambda_i X - 1)^{m_i} = (-1)^p a_p \prod_{i=1}^d \lambda_i^{m_i} \left(X - \frac{1}{\lambda_i}\right)^{m_i} = (-1)^p a_p \left(\prod_{i=1}^d \lambda_i^{m_i}\right) \prod_{i=1}^d \left(X - \frac{1}{\lambda_i}\right)^{m_i}.$$

Or, on a $P(0) = a_p \prod_{i=1}^d (-\lambda_i)^{m_i} = (-1)^p a_p \left(\prod_{i=1}^d \lambda_i^{m_i}\right) \neq 0$ (formule de Viète), donc :

$$P(X) = P(0) \prod_{i=1}^d \left(X - \frac{1}{\lambda_i}\right)^{m_i}.$$

Tout ceci permet de conclure que pour tout $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$:

$$\lambda_i \text{ est non nul et } \frac{1}{\lambda_i} \text{ est racine de } P \text{ de multiplicité } m_i.$$

Q28. Si Q est antiréciproque, on a $Q(1) = -1^p Q\left(\frac{1}{1}\right) = -Q(1)$, donc $Q(1) = 0$ et ainsi :

$$1 \text{ est une racine de } Q.$$

On a alors $Q = (X - 1)P$ avec $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $p - 1$, et :

$$-X^p Q\left(\frac{1}{X}\right) = -X^p \left(\frac{1}{X} - 1\right) P\left(\frac{1}{X}\right) = -X^{p-1} (1 - X) P\left(\frac{1}{X}\right) = (X - 1) X^{p-1} P\left(\frac{1}{X}\right).$$

Or, $-X^p Q\left(\frac{1}{X}\right) = Q(X)$, donc :

$$(X - 1) X^{p-1} P\left(\frac{1}{X}\right) = (X - 1) P(X) \Leftrightarrow X^{p-1} P\left(\frac{1}{X}\right) = P(X).$$

Ainsi, P est réciproque si $p > 1$ et constant si $p = 1$. Finalement :

$$\text{Il existe bien un polynôme } P \text{ constant ou réciproque tel que } Q = (X - 1)P.$$

Q29. Remarquons déjà que si x est un réel non nul, on a :

$$x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_d, \frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_d}$ les éventuelles racines de R distinctes deux à deux et différentes de 1 et -1 ,

avec m_i la multiplicité commune à λ_i et $\frac{1}{\lambda_i}$ (avec $\lambda_i \neq \frac{1}{\lambda_i}$, car $\lambda_i \neq \pm 1$).

Notons de plus a et b les multiplicités respectives de 1 et -1 , avec $a = 0$ (resp. $b = 0$) si 1 (resp. -1) n'est pas racine de R .

Le produit de racines de R est alors :

$$1^a (-1)^b \lambda_1^{m_1} \dots \lambda_d^{m_d} \left(\frac{1}{\lambda_1} \right)^{m_1} \dots \left(\frac{1}{\lambda_d} \right)^{m_d} = (-1)^b \frac{\lambda_1^{m_1} \dots \lambda_d^{m_d}}{\lambda_1^{m_1} \dots \lambda_d^{m_d}} = (-1)^b.$$

Ainsi :

Le produit des racines de R , comptées avec multiplicités, vaut 1 ou -1 .

Q30. Avec les notations précédentes et si R admet des racines différentes de 1 et -1 , on a :

$$R = \alpha (X-1)^a (X+1)^b \prod_{i=1}^d \left[(X-\lambda_i)^{m_i} \left(X - \frac{1}{\lambda_i} \right)^{m_i} \right].$$

où α est le coefficient dominant de R (non nul).

Alors, en posant $p = a + b + 2m_1 + \dots + 2m_d = \deg R$, on a :

$$\begin{aligned} X^p R\left(\frac{1}{X}\right) &= \alpha X^p \left(\frac{1}{X}-1\right)^a \left(\frac{1}{X}+1\right)^b \prod_{i=1}^d \left[\left(\frac{1}{X}-\lambda_i\right)^{m_i} \left(\frac{1}{X}-\frac{1}{\lambda_i}\right)^{m_i} \right] \\ &= \alpha X^p \frac{(1-X)^a (1+X)^b}{X^a X^b} \prod_{i=1}^d \left[\frac{(1-\lambda_i X)^{m_i} (\lambda_i - X)^{m_i}}{X^{m_i} \lambda_i X^{m_i}} \right] \\ &= \alpha X^p \frac{1}{X^{a+b+2m_1+\dots+2m_d}} (-1)^a (X-1)^a (X+1)^b \prod_{i=1}^d \left[\frac{(\lambda_i X - 1)^{m_i}}{\lambda_i^{m_i}} (X - \lambda_i)^{m_i} \right] \\ &= (-1)^a \alpha (X-1)^a (X+1)^b \prod_{i=1}^d \left[\left(X - \frac{1}{\lambda_i} \right)^{m_i} (X - \lambda_i)^{m_i} \right] \\ &= (-1)^a P(X) \end{aligned}$$

Ainsi, on a $P(X) = (-1)^a X^p R\left(\frac{1}{X}\right) = \pm X^p R\left(\frac{1}{X}\right)$, donc :

R est réciproque ou antiréciproque.

Partie 2.

Q31. Avec A inversible et $x \neq 0$, on peut écrire :

$$\det(xI_n - A) = \det\left[x\left(A^{-1} - \frac{1}{x}I_n\right)A\right] = x^n \det\left(A^{-1} - \frac{1}{x}I_n\right) \det A = x^n (-1)^n \det\left(\frac{1}{x}I_n - A^{-1}\right) \det A.$$

Soit :

$$\det(xI_n - A) = (-1)^n (\det A) x^n \det\left(\frac{1}{x}I_n - A^{-1}\right)$$

Q32. Le déterminant est un invariant de similitude, donc si A est semblable à son inverse, alors $\det A^{-1} = \det A$.

Or, $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$, donc $\det A = \frac{1}{\det A}$ et d'après la question **Q29** :

$$\det A = \pm 1$$

De plus, il existe $P \in \text{GL}_n$ telle que $A^{-1} = P^{-1}AP$ et :

$$\det\left(\frac{1}{x}I_n - A^{-1}\right) = \det\left(\frac{1}{x}I_n - P^{-1}AP\right) = \det\left[P^{-1}\left(\frac{1}{x}I_n - A\right)P\right] = \det\left(\frac{1}{x}I_n - A\right).$$

Donc, pour tout réel $x \neq 0$:

$$\det(xI_n - A) = (-1)^n (\det A) x^n \det\left(\frac{1}{x}I_n - A\right).$$

Avec $\det A = \pm 1$, on obtient :

$$\chi_A = \det(xI_n - A) = \pm (-1)^n x^n \det\left(\frac{1}{x}I_n - A\right) = \pm (-1)^n x^n \chi_A\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ainsi, $\chi_A = \pm x^n \chi_A\left(\frac{1}{x}\right)$ et donc :

Le polynôme χ_A est réciproque ou antiréciproque.

Q33. On a $B = P^{-1}DP$ avec $P \in \text{GL}_n$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Le déterminant étant un invariant de similitude :

$$\begin{aligned} \chi_B &= \det(xI_n - B) = \det(xI_n - P^{-1}DP) = \det(P^{-1}(xI_n - D)P) \\ &= \det(xI_n - D) = \begin{vmatrix} x - \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x - \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x - \lambda_n \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Donc :

$$\chi_B = \prod_{k=1}^n (x - \lambda_k)$$

Si χ_B est réciproque ou antiréciproque, alors toutes les racines de χ_B sont non nulles d'après les questions **Q27** et **Q28**. Alors, $\chi_B(0) = \prod_{k=1}^n (-\lambda_k) = (-1)^n \prod_{k=1}^n \lambda_k \neq 0$. Or, comme le déterminant est un

invariant de similitude, $\det B = \det D = \prod_{k=1}^n \lambda_k$. Ainsi, $\det B \neq 0$ et donc :

B est inversible.

De plus, si χ_B est réciproque ou antiréciproque, alors pour toute racine λ de χ_B (non nulle), $\frac{1}{\lambda}$ est racine de χ_B de même multiplicité (à nouveau d'après les questions **Q27** et **Q28**). Ceci veut dire que les familles $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$ sont les mêmes à l'ordre près, donc que les matrices $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $D^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$ sont semblables (il suffit de changer l'ordre des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^n$). Mais, comme $B = P^{-1}DP$, on a $B^{-1} = (P^{-1}DP)^{-1} = P^{-1}D^{-1}P$.

Ainsi, B^{-1} est semblable à D^{-1} , qui est semblable à D , qui est semblable à B . Comme la relation de similitude est transitive :

B^{-1} est semblable à B .

Q34. On pose $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

a. On a :

$$\chi_B = \det(XI_4 - B) = \begin{vmatrix} X-2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X-\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & X-\frac{1}{2} \end{vmatrix}.$$

La matrice étant triangulaire :

$$\chi_B = (X-2)^2 \left(X - \frac{1}{2}\right)^2$$

On a :

$$\begin{aligned} X^4 \chi_B\left(\frac{1}{X}\right) &= X^4 \left(\frac{1}{X} - 2\right)^2 \left(\frac{1}{X} - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(X\left(\frac{1}{X} - 2\right)\right)^2 \left(X\left(\frac{1}{X} - \frac{1}{2}\right)\right)^2 \\ &= (1-2X)^2 \left(1 - \frac{1}{2}X\right)^2 = (2X-1)^2 \left(\frac{1}{2}X - 1\right)^2 \\ &= 4\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{4}(X-2)^2 = \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 (X-2)^2 = \chi_B(X) \end{aligned}$$

Donc :

χ_B est réciproque.

b. On a $\chi_B(0) = \det(-B) = \det B = (-2)^2 \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \neq 0$, donc :

B est inversible.

On a :

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = a \\ 2y = b \\ \frac{1}{2}z + t = c \\ \frac{1}{2}t = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}a \\ y = \frac{1}{2}b \\ z = 2c - 4d \\ t = 2d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c. On a $B - 2I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}$ et $B - \frac{1}{2}I_4 = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\left(B - \frac{1}{2}I_4\right)^2 = \begin{pmatrix} 9/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D'où :

$$(B - 2I_4) \left(B - \frac{1}{2}I_4\right)^2 = 0_4$$

d. Supposons que B est semblable à son inverse. Alors, il existe $P \in GL_n$ telle que $B^{-1} = P^{-1}BP$.

Alors :

$$\begin{aligned} (B^{-1} - 2I_4) \left(B^{-1} - \frac{1}{2}I_4\right)^2 &= (P^{-1}BP - 2I_4) \left(P^{-1}BP - \frac{1}{2}I_4\right)^2 \\ &= [P^{-1}(B - 2I_4)P] \left[P^{-1} \left(B - \frac{1}{2}I_4\right)^2 P\right] = P^{-1}(B - 2I_4) \left(B - \frac{1}{2}I_4\right)^2 P = 0_4 \end{aligned}$$

Or, $B^{-1} - 2I_4 = -\begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\left(B - \frac{1}{2}I_4\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9/4 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 9/4 \end{pmatrix}$, donc :

$$(B^{-1} - 2I_4) \left(B^{-1} - \frac{1}{2}I_4\right)^2 = B^{-1} - 2I_4 = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0_4.$$

Ceci est contradictoire avec $(B^{-1} - 2I_4) \left(B^{-1} - \frac{1}{2}I_4\right)^2 = 0_4$, donc :

B n'est pas semblable à son inverse.

e. Le polynôme χ_B est réciproque, donc d'après la question 33, si B était semblable à une matrice diagonale, elle serait semblable à son inverse. Ceci est faux, donc :

B n'est pas semblable à une matrice diagonale.