

Corrigés du TD n° 0
Exercice 1

Posons $f(x) = \ln(1+x)$.

La fonction f est de classe C^∞ sur $] -1, +\infty[$, avec pour tout $x \in] -1, +\infty[$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}.$$

Comme f est C^∞ sur $] -1, +\infty[$, on peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à tout ordre $n \in \mathbb{N}^*$, entre 0 et 1, ce qui donne :

$$f(1) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} 1^k + \int_0^1 (1-t)^n \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} dt.$$

Soit :

$$\ln 2 = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} + (-1)^n \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt.$$

Et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a pour tout $t \in [0, 1]$, $\left| \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}} \right| \leq (1-t)^n$, donc :

$$\left| (-1)^n \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}} \right| dt \leq \int_0^1 (1-t)^n dt.$$

Avec $u = 1-t$, on a :

$$\int_0^1 (1-t)^n dt = - \int_1^0 u^n du = \int_0^1 u^n du = \frac{1}{n+1}.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left| (-1)^n \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt \right| \leq \frac{1}{n+1}$ et, avec le théorème des gendarmes, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\ln 2 - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[(-1)^n \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt \right] = 0.$$

Ceci permet de conclure que la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge, avec :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow 0 < \arctan\left(\frac{1}{n+1}\right) < \arctan\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \arctan\left(\frac{1}{n}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n+1}\right) < \frac{\pi}{2}$$

Alors :

$$\arctan\left(\tan\left[\arctan\left(\frac{1}{n}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)\right]\right) = \arctan\left(\frac{1}{n}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

Or :

$$\tan \left[\arctan \left(\frac{1}{n} \right) - \arctan \left(\frac{1}{n+1} \right) \right] = \frac{\tan \left(\arctan \left(\frac{1}{n} \right) \right) - \tan \left(\arctan \left(\frac{1}{n+1} \right) \right)}{1 + \tan \left(\arctan \left(\frac{1}{n} \right) \right) \tan \left(\arctan \left(\frac{1}{n+1} \right) \right)} = \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n} \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n^2 + n + 1}$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\arctan \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} \right) = \arctan \left(\frac{1}{n} \right) - \arctan \left(\frac{1}{n+1} \right).$$

Alors, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a par télescopage :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \arctan \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} \right) &= \arctan 1 + \sum_{n=1}^N \left[\arctan \left(\frac{1}{n} \right) - \arctan \left(\frac{1}{n+1} \right) \right] \\ &= \frac{\pi}{4} + \arctan 1 - \arctan \left(\frac{1}{N+1} \right) = \frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{1}{N+1} \right) \end{aligned}$$

Comme $\lim_{N \rightarrow +\infty} \arctan \left(\frac{1}{N+1} \right) = 0$, ceci permet de conclure que la série $\sum \arctan \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} \right)$ converge, avec :

$$\boxed{\sum_{n \geq 0} \arctan \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} \right) = \frac{\pi}{2}}$$

Exercice 2

Tel qu'indiqué, posons pour tout entier $n \geq 2$:

$$u_n = \frac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln \left(\frac{n-1}{n} \right) = \frac{1}{n} + \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right).$$

On a $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $u_n \sim -\frac{1}{2n^2}$ et la série (de signe constant) $\sum \left(-\frac{1}{2n^2}\right)$ converge, donc $\sum u_n$ converge. Or, pour tout entier $n \geq 2$, on a par télescopage :

$$1 + \sum_{k=2}^n u_k = 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} - \ln k + \ln(k-1) \right) = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^n (\ln k + \ln(k-1)) = H_n - \ln n.$$

Donc, la suite $(H_n - \ln n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Notons γ sa limite.

On a de plus pour tout entier $n \geq 2$, $u_n = f\left(-\frac{1}{n}\right)$ avec $f(t) = \ln(1+t) - t$ et $-\frac{1}{n} \in]-1, 0[$.

La fonction f est dérivable sur $] -1, 0[$ avec $f'(t) = -\frac{t}{1+t} > 0$, donc f est strictement croissante sur $] -1, 0[$.

Or, sur $]1, +\infty[$, la fonction $g : t \mapsto -\frac{1}{t}$ est strictement croissante et à images dans $] -1, 0[$, donc si on pose $h = f \circ g$, h est strictement croissante sur $]1, +\infty[$ et pour tout entier $n \geq 2$, $u_n = h(n)$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante. De plus, h est continue sur $]1, +\infty[$ (en tant que composée de fonctions continues).

Alors, pour tout entier $k \geq 2$, on a :

$$(\forall t \in [k, k+1], u_k \leq h(t) \leq u_{k+1}) \Rightarrow u_k \leq \int_k^{k+1} h(t) dt \leq u_{k+1}.$$

Alors, pour tout entier $n \geq 2$, et tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \leq \int_{n+1}^{n+p+1} h(t) dt \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} u_{k+1} = \sum_{k=n+2}^{n+p+1} u_k.$$

Ceci donne finalement pour tout entier $n \geq 2$, et tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} + \int_{n+1}^{n+p} h(t) dt \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \leq \int_{n+1}^{n+p+1} h(t) dt.$$

On a d'une part :

$$\int_{n+1}^{n+p} h(t) dt = \int_{n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{t} - \ln t + \ln(t-1) \right) dt = [\ln t - t \ln t + (t-1) \ln(t-1)]_{n+1}^{n+p} = F(n+p) - F(n+1)$$

avec $F(t) = (t-1) \ln \left(1 - \frac{1}{t} \right).$

D'autre part :

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k = \left(1 + \sum_{k=2}^{n+p} u_k \right) - \left(1 + \sum_{k=2}^n u_k \right) = (H_{n+p} - \ln(n+p)) - (H_n - \ln n).$$

Donc, pour tout entier $n \geq 2$, et tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} + F(n+p) - F(n+1) \leq (H_{n+p} - \ln(n+p)) - (H_n - \ln n) \leq F(n+p+1) - F(n+1) \quad (1).$$

Or, $F(t) = (t-1) \ln \left(1 - \frac{1}{t} \right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t \left(-\frac{1}{t} \right) = -1$, donc :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} F(n+p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} F(n+p+1) = -1.$$

Avec $\lim_{p \rightarrow +\infty} (H_{n+p} - \ln(n+p)) = \gamma$, on obtient en passant à la limite quand $p \rightarrow +\infty$ dans (1) :

$$u_{n+1} - 1 - F(n+1) \leq \gamma - (H_n - \ln n) \leq -1 - F(n+1).$$

On veut $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(H_n - \ln n - \gamma) = \frac{1}{2}$. Multiplions par $-n$ la double inégalité ci-dessus :

$$n + nF(n+1) \leq H_n - \ln n - \gamma \leq n + nF(n+1) - nu_{n+1}.$$

Et, on a vu que $u_n = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $nu_n \rightarrow 0$ et $nu_{n+1} = \frac{n}{n+1}(n+1)u_{n+1} \rightarrow 0$.

Enfin :

$$\begin{aligned} n + nF(n+1) &= n[1 + F(n+1)] = n \left[1 + n \ln \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \right] \\ &= n \left[1 - n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right] = n \left[1 - n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right] = \frac{1}{2} + o(1) \end{aligned}$$

Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + n F(n+1) = \frac{1}{2}$ et par le théorème des gendarmes, on a bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(H_n - \ln n - \gamma) = \frac{1}{2}$, soit :

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 3

1) Comme $u_0 = 1 \in]0, 1]$ et $u_1 = \frac{1}{2} \sin 1 < 1 = u_0$, une récurrence immédiate permet de prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 < u_{n+1} < u_n \leq 1.$$

La fonction sinus est dérivable sur $[0, 1]$, donc d'après le théorème des accroissements finis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $c_n \in]0; u_n[$ tel que :

$$\frac{\sin u_n - \sin 0}{u_n - 0} = \frac{1}{2} \sin' c_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} \cos c_n \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le produit télescopique donne :

$$0 < \prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < \frac{u_n}{u_0} \leq \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow 0 < u_n \leq \frac{1}{2^n}.$$

Par comparaison à la série géométrique convergente $\sum \frac{1}{2^n}$, on peut conclure que :

$$\text{La série } \sum u_n \text{ converge.}$$

2) En étudiant la fonction $f_n : x \mapsto \arctan\left(\frac{x}{n}\right) = nx^2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on prouve que qu'elle s'annule exactement une fois sur $\mathbb{R}_+^*$, en un réel u_n .

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\arctan\left(\frac{u_n}{n}\right) = nu_n^2$ avec $\frac{u_n}{n} > 0$, donc $0 < \arctan\left(\frac{u_n}{n}\right) = nu_n^2 < \frac{\pi}{2}$ et :

$$0 < u_n^2 < \frac{\pi}{2n}.$$

Le théorème des gendarmes permet de conclure que $u_n^2 \rightarrow 0$, donc $u_n \rightarrow 0$ et $\frac{u_n}{n} \rightarrow 0$.

On a alors :

$$\arctan\left(\frac{u_n}{n}\right) \sim \frac{u_n}{n} \Rightarrow nu_n^2 \sim \frac{u_n}{n} \Rightarrow u_n \sim \frac{1}{n^2} \text{ (car } u_n > 0).$$

Par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum \frac{1}{n^2}$, on peut conclure que :

$$\text{La série } \sum u_n \text{ converge.}$$

Exercice 4

On a $D = \left\{ a \in \mathbb{R}_+^* \mid \sum u_n^a \text{ converge} \right\} \subset \mathbb{R}_+^*$.

Si D est non vide, alors c'est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0 : elle admet une borne inférieure $m \geq 0$.

On a alors :

$$D \subset [m, +\infty[.$$

De plus, par caractérisation de la borne supérieure, pour tout réel $x > m$, il existe $a \in D$ tel que $m \leq a < x$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^x = u_n^{x-a} u_n^a = o(u_n^a)$ car $x-a > 0$ donc $u_n^{x-a} \rightarrow 0$.

Comme $\sum u_n^a$ converge et est à termes positifs, $\sum u_n^x$ converge et donc $x \in D$.

Ceci prouve que :

$$]m, +\infty[\subset D.$$

Ainsi, $]m, +\infty[\subset D \subset [m, +\infty[$, donc $D =]m, +\infty[$ ou $[m, +\infty[$ et finalement :

L'ensemble D est vide ou bien de la forme $[m, +\infty[$ ou $]m, +\infty[$ avec $m \geq 0$.

Pour $u_n = \frac{1}{\ln n}$, on a $D = \emptyset$, car pour tout réel $a > 0$, $\frac{(\ln n)^a}{n} \rightarrow 0$ (croissances comparées) donc $\frac{1}{n} = o(u_n^a)$.

Pour $u_n = \frac{1}{n}$, on a immédiatement $D =]1, +\infty[$ (séries de Riemann).

Exercice 5

1) a. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a, en intégrant par parties (on peut car f est de classe C^1) :

$$\begin{aligned} w_n &= \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n) = [t f(t)]_{n-1}^n - \int_{n-1}^n t f'(t) dt - f(n) \\ &= n f(n) - (n-1) f(n-1) - \int_{n-1}^n t f'(t) dt - f(n) = (n-1) [f(n) - f(n-1)] - \int_{n-1}^n t f'(t) dt \\ &= (n-1) \int_{n-1}^n f'(t) dt - \int_{n-1}^n t f'(t) dt \end{aligned}$$

Soit finalement :

$$w_n = \int_{n-1}^n (n-1-t) f'(t) dt$$

On a alors :

$$|w_n| = \left| \int_{n-1}^n (n-1-t) f'(t) dt \right| \leq \int_{n-1}^n |(n-1-t) f'(t)| dt = \int_{n-1}^n |n-1-t| |f'(t)| dt.$$

Or, pour tout $t \in [n-1, n]$, $|n-1-t| = t - (n-1) \leq 1$, donc :

$$|w_n| \leq \int_{n-1}^n |f'(t)| dt$$

b. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a $\sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k |f'(t)| dt = \int_1^n |f'(t)| dt$. Or, $\int_1^x |f'(t)| dt$ admet une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$, donc la série $\sum \int_{n-1}^n |f'(t)| dt$ converge et par comparaison, $\sum |w_n|$ converge, donc :

La série $\sum w_n$ est absolument convergente.

c. D'après ce qui précède, $\sum w_n$ est absolument convergente, donc convergente. Or, pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a $f(n) = \int_{n-1}^n f(t) dt - w_n$, ce qui permet de conclure immédiatement que $\sum f(n)$ converge si et seulement si $\sum \int_{n-1}^n f(t) dt$ converge. Enfin, $\sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k f(t) dt = \int_1^n f(t) dt$ et ainsi :

La série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_1^n f(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

2) Remarquons déjà que comme g et h sont positives sur $\mathbb{R}_+$, les fonctions $x \mapsto \int_1^x g(t) dt$ et $x \mapsto \int_1^x h(t) dt$ sont croissantes sur $\mathbb{R}_+$, donc elles admettent une limite finie en $+\infty$ si et seulement si elles sont majorées. D'après les hypothèses, c'est le cas pour $x \mapsto \int_1^x g(t) dt$. De plus, $h = o_{+\infty}(g)$. Alors, il existe un réel $a \in [1, +\infty[$, tel que $\forall x \in [a, +\infty[$, $h(x) \leq g(x)$ et :

$$\int_1^x h(t) dt = \int_1^a h(t) dt + \int_a^x h(t) dt \leq \int_1^a h(t) dt + \int_a^x g(t) dt.$$

Comme $x \mapsto \int_1^x g(t) dt$ est majorée, $x \mapsto \int_a^x g(t) dt$ aussi et donc, $x \mapsto \int_1^x h(t) dt$ l'est aussi. Ainsi :

$x \mapsto \int_1^x h(t) dt$ admet une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$.

3) Remarquons que les séries $\sum \frac{1}{n \ln n}$ et $\sum \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} = \sum f(n)$ sont de même nature.

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{(x+1) \ln(x+1)}$ appartient à $C^1([1, +\infty[, \mathbb{R})$ et $\forall x \in [1, +\infty[$:

$$f'(x) = -\frac{\ln(x+1)+1}{((x+1) \ln(x+1))^2}.$$

Alors, $\forall x \in [1, +\infty[$:

$$|f'(x)| = \frac{1}{(x+1)^2} \left(\frac{1}{\ln(x+1)} + \frac{1}{(\ln(x+1))^2} \right) \leq \frac{1}{(x+1)^2} \left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{(\ln 2)^2} \right).$$

Donc :

$$\int_1^x |f'(t)| dt \leq \left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{(\ln 2)^2} \right) \int_1^x \frac{dt}{(t+1)^2} = \left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{(\ln 2)^2} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} \right).$$

Comme $\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{2}$, la fonction $x \mapsto \int_1^x |f'(t)| dt$ est majorée sur $[1, +\infty[$. Comme elle est croissante sur cet intervalle, elle admet une limite finie en $+\infty$.

La fonction f vérifie donc les hypothèses de la question 1, et ainsi, $\sum \frac{1}{n \ln n}$ et $\left(\int_1^n f(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont de même nature.

Or, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^n f(t) dt = \int_1^n \frac{dt}{(t+1) \ln(t+1)} = \int_1^n \frac{\ln'(t+1)}{\ln(t+1)} dt = \left[\ln(\ln(t+1)) \right]_1^n = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2).$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\ln(n+1)) = +\infty$, la suite $\left(\int_1^n f(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

Finalement :

La série $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge.

3) a. La fonction f est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$ et $\forall x \in [1, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \left(x \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} - \sin \sqrt{x} \right) = \frac{\cos \sqrt{x}}{2x\sqrt{x}} - \frac{\sin \sqrt{x}}{x^2}.$$

Alors, $\forall x \in [1, +\infty[$, on a $|f'(x)| \leq \frac{|\cos \sqrt{x}|}{2x\sqrt{x}} + \frac{|\sin \sqrt{x}|}{x^2} \leq \frac{1}{2x^{3/2}} + \frac{1}{x^2}$ et :

$$\int_1^x |f'(t)| dt \leq \int_1^x \left(\frac{1}{2t^{3/2}} + \frac{1}{t^2} \right) dt = \left[-\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{t} \right]_1^x = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \leq 2.$$

Ainsi, $x \mapsto \int_1^x |f'(t)| dt$ est croissante (car $|f'(x)| \geq 0$) et majorée sur $[1, +\infty[$, donc :

$x \mapsto \int_1^x |f'(t)| dt$ admet une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$.

b. $\forall x \in [1, +\infty[$, en posant le changement de variable $u = \sqrt{t}$ (soit $t = u^2$ et $dt = 2u du$), on a :

$$\int_1^x f(t) dt = \int_1^x \frac{\sin \sqrt{t}}{t} dt = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin u}{u^2} 2u du = 2 \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin u}{u} du.$$

En intégrant par parties, on obtient alors :

$$\int_1^x f(t) dt = 2 \left(\left[\frac{-\cos u}{u} \right]_1^{\sqrt{x}} - \int_1^{\sqrt{x}} -\frac{\cos u}{u^2} du \right) = 2 \left(\cos 1 - \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos u}{u^2} du \right).$$

Ainsi, on a bien, $\forall x \in [1, +\infty[$:

$\int_1^x f(t) dt = 2 \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin u}{u} du = 2 \left(\cos 1 - \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos u}{u^2} du \right)$

c. On a $\forall x \in [1, +\infty[$, $\int_1^{\sqrt{x}} \left| \frac{\cos u}{u^2} \right| du \leq \int_1^{\sqrt{x}} \frac{du}{u^2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} < 1$, donc, comme plus haut, on peut conclure que la fonction $x \mapsto \int_1^{\sqrt{x}} \left| \frac{\cos u}{u^2} \right| du$ admet une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$. D'après le résultat admis, il en va de même

pour $x \mapsto \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos u}{u^2} du$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$, la fonction $x \mapsto \int_1^x f(t) dt$ admet, elle aussi, une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$. Ceci prouve que la suite $\left(\int_1^n f(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Or, d'après la question a, la fonction f vérifie les hypothèses de la question 1. Ceci nous permet de conclure que la série $\sum f(n)$ converge, autrement dit :

La série $\sum \frac{\sin \sqrt{n}}{n}$ converge.