

DS de Mathématiques n° 1
4 heures
Calculatrices autorisées

N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Le sujet comporte 7 pages.
Problème n° 1
Extrait de Centrale-Supélec 2024 - PC - Mathématiques 2

Dans ce problème, on introduit la notion de produit infini et on l'utilise pour obtenir diverses propriétés.

- La partie I permet d'obtenir des résultats qui seront utilisés dans tout le problème.
- La partie II étudie quelques exemples de calcul de produit infini, dont celui de Wallis.
- La partie III permet de montrer, sous certaines conditions, la continuité ou le caractère C^1 d'une fonction définie par un produit infini de fonctions.
- La partie IV a pour but d'exprimer la fonction sinus sous forme de produit infini et, en s'appuyant sur la partie III, d'en tirer quelques conséquences.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor t \rfloor$ la partie entière de t .

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \geq p}$ une suite de nombres réels. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq p$:

$$P_n = \prod_{k=p}^n u_k .$$

On dit que la suite $(P_n)_{n \geq p}$ est la suite des produits partiels du produit infini $\prod_{n \geq p} u_n$.

Si la suite $(P_n)_{n \geq p}$ converge, on dit que sa limite est la valeur du produit infini et on pose :

$$\prod_{k=p}^{+\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n .$$

I Résultats préliminaires

I.A – Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Q1. Montrer que, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\left| \left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \right) - 1 \right| \leq \left(\prod_{k=1}^n (1 + |x_k|) \right) - 1.$$

☺ On pourra procéder par récurrence.

Q2. Montrer que, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in [-1; +\infty[^n$:

$$\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \leq \exp \left(\sum_{k=1}^n x_k \right).$$

I.B – Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n.$$

Le but de cette sous-partie est de montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers e^z .

Q3. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{C}$:

$$|(1+t) - e^t| \leq |t|^2 e^{|t|}.$$

Q4. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $M = \max(|a|, |b|)$. Montrer que :

$$|a^n - b^n| \leq n M^{n-1} |a - b|.$$

Q5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n - e^z \right| \leq \frac{|z|^2 e^{|z|}}{n}.$$

Q6. Conclure que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers e^z .

II Exemples de calcul de produit infini

II.A –

Q7. Calculer $\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$ et $\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right)$.

☺ On pourra, pour tout $N \geq 2$, établir une expression de $\prod_{n=2}^N \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$ et $\prod_{n=2}^N \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right)$.

II.B – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n u \, du.$$

Q8. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Q9. Déterminer un équivalent de W_{2n+1} et en déduire $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{4n^2 - 1}\right)$.

Problème n° 2

Moyenne de Césaro et séries

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k = \frac{S_n}{n}$$

(v est la moyenne de Césaro de u).

L'objet de ce problème est d'étudier la nature de la série $\sum v_n$, suivant celle de $\sum u_n$.

PRELIMINAIRES

Soit $f \in C^1([1, +\infty[, \mathbb{C})$.

Q10. Montrer que s'il existe $h \in C([1, +\infty[, \mathbb{R}_+)$ telle que $x \mapsto \int_1^x h(t)dt$ admet une limite finie

quand $x \rightarrow +\infty$ et, pour tout $x \in [1, +\infty[$, $|f(x)| \leq h(x)$, alors $x \mapsto \int_1^x |f(t)|dt$ admet une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$.

Q11. Prouver que si $x \mapsto \int_1^x |f(t)|dt$ admet une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$, alors $x \mapsto \int_1^x f(t)dt$ admet une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$.

☺ On s'inspirera de la preuve de la propriété disant qu'une série absolument convergente est convergente, notamment en commençant par le cas où f est à valeurs réelles.

Q12. On suppose que $\int_1^x |f'(t)|dt$ admet une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$ et, pour tout entier naturel

$n \geq 2$, on pose $w_n = \int_{n-1}^n f(t)dt - f(n)$.

a. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$w_n = \int_{n-1}^n (n-1-t)f'(t)dt,$$

puis que :

$$|w_n| \leq \int_{n-1}^n |f'(t)|dt.$$

- b. En déduire que la série $\sum w_n$ est absolument convergente.
- c. Prouver alors que la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_1^n f(t)dt\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Q13. On pose $f(x) = \frac{\sin \sqrt{x}}{x}$.

- a. Montrer que $\int_1^x |f'(t)| dt$ admet une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$.
- b. Prouver que $\forall x \in [1, +\infty[$:

$$\int_1^x f(t)dt = 2 \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin u}{u} du = 2 \left(\cos 1 - \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos u}{u^2} du \right).$$

- c. En déduire que la série $\sum \frac{\sin \sqrt{n}}{n}$ converge.

PARTIE I

Dans cette partie, on suppose que la série $\sum u_n$ converge et on note S sa somme.

Q14. Déterminer la nature de la série $\sum v_n$ correspondante quand $S \neq 0$.

Q15. On pose ici $u_n = \frac{(-1)^n}{2E\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ (E désigne la partie entière). Montrer que $\sum u_n$ converge et calculer sa somme S , puis déterminer la nature de la série $\sum v_n$ correspondante.

Q16. On pose ici $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln \left[1 + E\left(\frac{n+1}{2}\right) \right]}$ (E désigne encore la partie entière). Montrer que $\sum u_n$ converge et calculer sa somme S , puis, à l'aide des préliminaires, déterminer la nature de la série $\sum v_n$ correspondante.

Q17. Que déduire des deux questions précédentes ?

PARTIE II

Q18. On suppose ici que la série $\sum u_n$ diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$. Déterminer la nature de $\sum v_n$.

PARTIE III

Dans cette partie, on suppose que la série $\sum u_n$ diverge grossièrement et que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite (finie ou infinie).

Q19. On pose ici $u_n = (-1)^n$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie bien les hypothèses de cette partie et déterminer la nature de la série $\sum v_n$ correspondante.

Q20. On pose ici $u_1 = -1$ et, pour $n \geq 2$, $u_n = 2(-1)^n$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie bien les hypothèses de cette partie et déterminer la nature de la série $\sum v_n$ correspondante.

Q21. Que déduire des deux questions précédentes ?

PARTIE IV

Dans cette partie, on suppose que la série $\sum u_n$ diverge, mais pas grossièrement, et que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite (finie ou infinie).

Q22. On pose ici $u_n = \sin(\sqrt{n}) - \sin(\sqrt{n-1})$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie bien les hypothèses de cette partie et déterminer la nature de la série $\sum v_n$ correspondante.

On rappelle que la suite $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Q23. On reprend ici la même suite que dans la question précédente en rajoutant 1 au premier terme, soit $u_1 = 1 + \sin 1$ et pour $n \geq 2$, $u_n = \sin(\sqrt{n}) - \sin(\sqrt{n-1})$. Justifier que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie toujours les hypothèses de cette partie et déterminer la nature de la série $\sum v_n$ correspondante.

Q24. Que déduire des deux questions précédentes ?

CONCLUSION

Q25. Dans quels cas peut-on conclure quant à la nature de $\sum v_n$ quand on connaît le comportement de $\sum u_n$?

Problème n° 3

Extrait adapté de Mines-Ponts 2025 - PSI - Mathématiques 1

Notations et définitions.

On note $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes, $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, M_n désigne l'espace des matrices carrées complexes de taille n et GL_n l'ensemble des matrices complexes inversibles de taille n .

On rappelle que deux matrices A et B de M_n sont semblables s'il existe $P \in GL_n$ telle que :

$$A = P^{-1}BP.$$

Partie 1.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ de degré p est dit réciproque lorsqu'il satisfait l'égalité :

$$P(X) = X^p P\left(\frac{1}{X}\right).$$

Q26. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré p . On écrit $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ avec $a_1, a_2, \dots, a_p \in \mathbb{C}$ et $a_p \neq 0$.

Montrer que P est réciproque si et seulement si pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, on a $a_k = a_{p-k}$.

Q27. Soit P un polynôme de degré p écrit sous forme factorisée $P = a_p \prod_{i=1}^d (X - \lambda_i)^{m_i}$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ sont les racines complexes distinctes de P et $m_1, \dots, m_d$ leurs multiplicités.

Ecrire sous forme factorisée le polynôme $X^p P\left(\frac{1}{X}\right)$ et démontrer que si P est réciproque alors pour tout $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, λ_i est non nul et $\frac{1}{\lambda_i}$ est racine de P avec la multiplicité m_i .

Q28. Soit Q un polynôme de degré p . On dit que Q est antiréciproque si :

$$Q(X) = -X^p Q\left(\frac{1}{X}\right).$$

Montrer que si Q est antiréciproque, 1 est une racine de Q et qu'il existe un polynôme P constant ou réciproque tel que $Q = (X-1)P$.

Soit R un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ ayant la propriété suivante :

Toute racine a de R est non nulle et $\frac{1}{a}$ est racine de R de même multiplicité que a .

Q29. Démontrer que le produit des racines de R , comptées avec multiplicités, ne peut prendre que les valeurs 1 ou -1 . On pourra remarquer que l'égalité $a = \frac{1}{a}$ a lieu que pour $a = 1$ ou -1 .

Q30. En déduire que R est réciproque ou antiréciproque.

Partie 2.

Soit A une matrice appartenant à GL_n .

On admet que pour toute matrice M de M_n , $\chi_M = \det(XI_n - M)$ est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, unitaire et de degré n .

Q31. Soit x un nombre réel non nul.

Exprimer $\det(xI_n - A)$ en fonction de x , $\det A$ et $\det\left(\frac{1}{x}I_n - A^{-1}\right)$.

Q32. On suppose dans cette question que A est semblable à son inverse. Préciser les valeurs que peut prendre le déterminant de A , et en déduire que $\chi_A = \det(XI_n - A)$ est soit réciproque, soit antiréciproque.

Q33. Soit $B \in M_n$ une matrice semblable à une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Calculer $\chi_B = \det(XI_n - B)$ en fonction des λ_k . On suppose que χ_B est réciproque ou antiréciproque. Démontrer que B est inversible et semblable à son inverse.

Q34. On pose $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

- Calculer le polynôme χ_B et établir qu'il est réciproque.
- Justifier que B est inversible et calculer B^{-1} .
- Calculer $(B - 2I_4)\left(B - \frac{1}{2}I_4\right)^2$.
- Montrer que B n'est pas semblable à son inverse.
- La matrice B est-elle semblable à une matrice diagonale ?

- FIN DU SUJET -