

Corrigé du DM n° 2

1) Remarquons que $u(\varepsilon_1) = 0$ et pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, déterminer $u(\varepsilon_i) = \varepsilon_{i-1}$.

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ fixé. Prouvons par récurrence finie sur k que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $u^k(\varepsilon_i) = \begin{cases} \varepsilon_{i-k} & \text{quand } k < i \\ 0 & \text{quand } k \geq i \end{cases}$.

- Pour $k = 0 < i$, on a $u^0(\varepsilon_i) = \varepsilon_i = \varepsilon_{i-0}$, donc la propriété est vraie.
- Supposons la propriété vraie à un rang $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On a alors :

$$\begin{aligned} u^{k+1}(\varepsilon_i) &= u(u^k(\varepsilon_i)) = \begin{cases} u(\varepsilon_{i-k}) & \text{quand } k < i \\ u(0) & \text{quand } k \geq i \end{cases} \\ &= \begin{cases} \varepsilon_{i-k-1} & \text{quand } k < i-1 \\ u(\varepsilon_1) = 0 & \text{quand } k = i-1 \\ 0 & \text{quand } k \geq i \end{cases} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \begin{cases} \varepsilon_{i-(k+1)} & \text{quand } k+1 < i \\ 0 & \text{quand } k+1 \geq i \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie au rang $k+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Remarquons alors que $u^n(\varepsilon_i) = 0$ et pour tout entier $k > n$, $u^k(\varepsilon_i) = u^{k-n}(u^n(\varepsilon_i)) = u^{k-n}(0) = 0$.

En définitive, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et tout $k \in \mathbb{N}$:

$$u^k(\varepsilon_i) = \begin{cases} \varepsilon_{i-k} & \text{quand } k < i \\ 0 & \text{quand } k \geq i \end{cases}$$

On a $N_n = M_{\mathcal{B}_e}(u)$, donc $N_n^k = M_{\mathcal{B}_e}(u^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit :

$$N_n^k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{colonne } k+1 \\ \downarrow \\ \leftarrow \text{ligne } n-k \end{matrix}$$

2) Si $A^2 = 0_n$, on a $\text{Im } A \subset \ker A$, donc $\text{rg}(A) = r \leq \dim \ker A$.

D'après le théorème du rang, $\dim \ker A = n - \text{rg}(A) = n - r$, donc $r \leq n - r$, soit $2r \leq n$ ou encore $r \leq \frac{n}{2}$.

Comme $A \neq 0_n$ on a $r \neq 0$, soit $r \geq 1$ et ainsi, on a bien :

$$1 \leq r \leq \frac{n}{2}$$

3) On a que $\text{Im } A \subset \ker A$ et $\dim \ker A = n - r \geq r$.

Si la famille $(f(e_1), \dots, f(e_r))$ est une base de $\text{Im } f$, on peut donc la compléter par q vecteurs $e'_1, \dots, e'_q$ en $(f(e_1), \dots, f(e_r), e'_1, \dots, e'_q)$, une base de $\ker f$ et on a $q = \dim \ker A - \text{rg}(A) = n - 2r$.

Ainsi :

Il existe $q = n - 2r$ vecteurs $e'_1, \dots, e'_q$ de $\mathbb{K}^n$ tels que $(f(e_1), \dots, f(e_r), e'_1, \dots, e'_q)$ est une base de $\ker f$.

4) La famille $\mathcal{B} = (f(e_1), \dots, f(e_r), e'_1, \dots, e'_q, e_1, \dots, e_r)$ contient $r + q + r = r + n - 2r + r = n$ vecteurs.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_r, \gamma_1, \dots, \gamma_r \in \mathbb{K}$ tels que $\alpha_1 f(e_1) + \dots + \alpha_r f(e_r) + \beta_1 e'_1 + \dots + \beta_r e'_q + \gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_r e_r = 0$.

En appliquant f , on obtient, avec $f(e_1), \dots, f(e_r), e'_1, \dots, e'_q \in \ker f$:

$$\gamma_1 f(e_1) + \dots + \gamma_r f(e_r) = 0.$$

Or, $(f(e_1), \dots, f(e_r))$ est une base de $\text{Im } f$, donc est libre et ainsi, $\gamma_1 = \dots = \gamma_r = 0$. Alors :

$$\alpha_1 f(e_1) + \dots + \alpha_r f(e_r) + \beta_1 e'_1 + \dots + \beta_r e'_q = 0.$$

Et, comme $(f(e_1), \dots, f(e_r), e'_1, \dots, e'_q)$ est une base de $\ker f$, donc est une famille libre, on obtient $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = \beta_1 = \dots = \beta_r = 0$. Finalement :

$$\alpha_1 f(e_1) + \dots + \alpha_r f(e_r) + \beta_1 e'_1 + \dots + \beta_r e'_q + \gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_r e_r = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_r = \beta_1 = \dots = \beta_r = \gamma_1 = \dots = \gamma_r = 0.$$

Donc, la famille $(f(e_1), \dots, f(e_r), e'_1, \dots, e'_q, e_1, \dots, e_r)$ est libre et comme elle contient $n = \dim \mathbb{K}^n$ vecteurs :

$\mathcal{B} = (f(e_1), \dots, f(e_r), e'_1, \dots, e'_q, e_1, \dots, e_r)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

Comme $f(f(e_1)) = \dots = f(f(e_r)) = f(e'_1) = \dots = f(e'_q) = 0$, on a :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & 0 & 1 \\ \vdots & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{colonne } n-r+1 \\ \downarrow \\ \leftarrow \text{ligne } r \end{matrix}$$

Soit :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = N_n^{n-r}$$

On a $A = M_{\mathcal{B}_c}(f)$ et $M_{\mathcal{B}}(f) = N_n^{n-r}$, donc les matrices A et N_n^{n-r} représentent le même endomorphisme f dans deux bases différentes : elles sont semblables. Ainsi :

Il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P N_n^{n-r} P^{-1}$.

5) Si $n-r$ est pair, on peut poser $B = PN_n^p P^{-1}$ avec $p = \frac{n-r}{2} \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$B^2 = (PN_n^p P^{-1})^2 = P(N_n^p)^2 P^{-1} = PN_n^{2p} P^{-1} = PN_n^{n-r} P^{-1} = A.$$

Ainsi :

Il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $B^2 = A$.

6) On a vu dans la question 4 que A est semblable à N_n^{n-r} . Or, les seules hypothèses sur A (non nulle) que l'on a utilisé pour établir ce résultat sont $\text{rg}(A) = r$ et $A^2 = 0_n$. Ainsi, toute matrice de rang r et de carré nul est semblable à N_n^{n-r} , et donc à A . Or, comme M_n est diagonale par blocs, on a :

$$M_n^{n-1-r} = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ N_{n-1}^{n-1-r} & & & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right) = \begin{array}{c} \text{colonne } n-r \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ligne } r \end{array}$$

Donc, $\text{Im}(M_n^{n-1-r}) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ et :

$$\underline{\text{rg}(M_n^{n-1-r}) = r.}$$

De plus :

$$(M_n^{n-1-r})^2 = (M_n^{2(n-1-r)})^2 = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ N_{n-1}^{2(n-1-r)} & & & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Or, ici $2r < n$, donc $n \geq 2r+1$ et $2(n-1-r) \geq n-1$, d'où $N_{n-1}^{2(n-1-r)} = 0_{n-1}$ d'après la question 1. Ainsi :

$$\underline{(M_n^{n-1-r})^2 = 0_n.}$$

Les deux hypothèses sont réunies pour affirmer que M_n^{n-1-r} est semblable à N_n^{n-r} , et donc que :

M_n^{n-1-r} est semblable à A .

Comme A et M_n^{n-1-r} sont semblables, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PM_n^{n-1-r} P^{-1}$.

Ici, $n-r$ est impair, $n-1-r$ est pair et on peut poser $p = \frac{n-1-r}{2} \in \mathbb{N}$ (car $n \geq 2r+1$ donc $n-1-r \geq r > 0$) et

$B = PM_n^p P^{-1}$. On a alors :

$$B^2 = (PM_n^p P^{-1})^2 = P(M_n^p)^2 P^{-1} = PM_n^{2p} P^{-1} = PM_n^{n-1-r} P^{-1} = A.$$

Ainsi :

Il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $B^2 = A$.

7) On suppose ici que $n - r$ est impair et $2r = n$.

a. Si $n = 2r$ alors n est pair. Comme $n - r$ est impair, ceci implique que $r = n - (n - r)$ est lui aussi impair et donc il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $r = 2p + 1$ et $n = 2r = 2(2p + 1)$.

Alors, A est semblable à $N_n^{n-r} = N_{2(2p+1)}^{2p+1} = \begin{pmatrix} 0_{2p+1} & I_{2p+1} \\ 0_{2p+1} & 0_{2p+1} \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe } p \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = 2(2p + 1), r = 2p + 1 \text{ et } A \text{ est semblable à } \begin{pmatrix} 0_{2p+1} & I_{2p+1} \\ 0_{2p+1} & 0_{2p+1} \end{pmatrix} .}$$

b. Supposons qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

Comme A est semblable à $\begin{pmatrix} 0_{2p+1} & I_{2p+1} \\ 0_{2p+1} & 0_{2p+1} \end{pmatrix}$, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P \begin{pmatrix} 0_{2p+1} & I_{2p+1} \\ 0_{2p+1} & 0_{2p+1} \end{pmatrix} P^{-1}$.

Posons $B' = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$ avec $B_1, B_2, B_3, B_4 \in \mathcal{M}_{2p+1}(\mathbb{R})$. On a :

$$(B')^2 = (P^{-1}BP)^2 = P^{-1}B^2P = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0_{2p+1} & I_{2p+1} \\ 0_{2p+1} & 0_{2p+1} \end{pmatrix}.$$

Les matrices B' et $(B')^2$ commutent, donc $\begin{pmatrix} 0_{2p+1} & I_{2p+1} \\ 0_{2p+1} & 0_{2p+1} \end{pmatrix}$ et $(B')^2$ commutent. Ainsi :

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{2p+1} & I_{2p+1} \\ 0_{2p+1} & 0_{2p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{2p+1} & I_{2p+1} \\ 0_{2p+1} & 0_{2p+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0_{2p+1} & B_1 \\ 0_{2p+1} & B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_3 & B_4 \\ 0_{2p+1} & 0_{2p+1} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} B_3 = 0_{2p+1} \\ B_1 = B_4 \end{cases}$$

Alors :

$$(B')^2 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0_{2p+1} & B_1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} B_1^2 & B_1B_2 + B_2B_1 \\ 0_{2p+1} & B_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{2p+1} & I_{2p+1} \\ 0_{2p+1} & 0_{2p+1} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} B_1^2 = 0_{2p+1} \\ B_1B_2 + B_2B_1 = I_{2p+1} \end{cases}$$

Dans le cas où $n = 2$, on a $2p + 1 = 1$, donc $B' = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\begin{cases} b_1^2 = 0 \\ b_1b_2 + b_2b_1 = 1 \end{cases}$, soit $\begin{cases} b_1 = 0 \\ 2b_1b_2 = 1 \end{cases}$ qui est absurde.

Dans le cas où $n > 2$, on a $p > 0$ et $2p + 1 > 2$. Comme $B_1^2 = 0_{2p+1}$, d'après la question 4, il existe une matrice $Q \in GL_{2p+1}(\mathbb{R})$ telle que $Q^{-1}B_1Q = N_{2p+1}^{2p+1-r_1}$ avec $r_1 = \text{rg}(B_1)$. Alors, en posant $C = Q^{-1}B_2Q$, on a :

$$I_{2p+1} = Q^{-1}I_{2p+1}Q = Q^{-1}(B_1B_2 + B_2B_1)Q = N_{2p+1}^{2p+1-r_1}C + CN_{2p+1}^{2p+1-r_1}.$$

Or, d'après la question 2, $\text{rg}(B_1) = r_1 \leq \frac{2p+1}{2} = p + \frac{1}{2}$, donc $r_1 \leq p$ (car r_1 est entier). Rappelons que :

$$N_{2p+1}^{2p+1-r_1} = \begin{matrix} & \text{colonne } n - r_1 + 1 \\ & \downarrow \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & 1 \\ \vdots & & & & & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \leftarrow r_1^{\text{ième}} \text{ ligne} \end{matrix}$$

On a $r_1 \leq p$ et $n - r_1 + 1 \geq n - p + 1 = p + 2$, donc la $(p+1)^{\text{ième}}$ ligne et la $(p+1)^{\text{ième}}$ colonne de $N_{2p+1}^{2p+1-r_1}$ sont nulles, ce qui implique que la $(p+1)^{\text{ième}}$ ligne de $N_{2p+1}^{2p+1-r_1} C$ et la $(p+1)^{\text{ième}}$ colonne de $C N_{2p+1}^{2p+1-r_1}$ sont nulles.

Alors, le coefficient central, d'indices $p+1, p+1$ de $N_{2p+1}^{2p+1-r_1} C + N_{2p+1}^{2p+1-r_1} C$ est nul, ce qui contredit la relation $N_{2p+1}^{2p+1-r_1} C + C N_{2p+1}^{2p+1-r_1} = I_{2p+1}$ trouvée plus haut.

Finalement, dans les deux cas, supposer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$ mène à une absurdité et donc :

Il n'existe pas de matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $B^2 = A$.

8) D'après la question 2, on a toujours $2r \leq n$. On a alors trois possibilités :

- $n - r$ est pair ;
- $n - r$ est impair et $2r < n$;
- $n - r$ est impair et $2r = n$.

Ainsi, les questions 5, 6 et 7 balayent tous les cas possibles, donc :

Il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$ sauf quand $n = 2(2p+1)$ et $rg(A) = 2p+1$.