

Corrigé du DS n° 2

Problème n° 1

I – Nilpotence d'indice 1

Q1. Un endomorphisme u nilpotent d'indice 1 vérifie $u^1 = u = 0$, donc :

Le seul endomorphisme nilpotent d'indice 1 est l'endomorphisme nul.

Q2. Comme l'indice de nilpotence de u est $p \in \mathbb{N}^*$, on a par définition, $u^p = 0$, mais $u^{p-1} \neq 0$, donc :

Il existe un vecteur x de E tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$.

Q3. Soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}$ des réels tels que $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = \lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \dots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0$.

Supposons que l'un des λ_k ne soit pas nul. L'ensemble $\{k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket \mid \lambda_k \neq 0\}$ est alors une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc admet un plus petit élément $m \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$. On a alors $\lambda_k = 0$ pour tout $k < m$ et $\lambda_m \neq 0$, donc :

$$\lambda_m u^m(x) + \lambda_{m+1} u^{m+1}(x) + \dots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0.$$

En appliquant, u^{p-1-m} à cette relation, on obtient $\lambda_m u^{p-1}(x) = 0$. Ceci est absurde car $\lambda_m \neq 0$ et $u^{p-1}(x) \neq 0$. Ainsi, supposons que l'un des λ_k n'est pas nul mène à une absurdité, donc tous les λ_k sont nuls, ce qui prouve que :

La famille $(u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$ est libre.

La famille $(u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$ contient p vecteurs. Comme on est en dimension n , cette famille, qui est libre, contient au plus n vecteurs, donc :

$$p \leq n$$

II – Réduction d'une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

Q4. On vient de voir que $p \leq n$. Comme ici $n = 2$ et $p \geq 2$, on a bien :

$$p = 2$$

On a alors $u^2 = u \circ u = 0$, donc :

$$\text{Im } u \subset \ker u.$$

Mais, u est non nul (car $p=2$ et pas 1), donc $\ker u \neq E$, soit $\dim(\ker u) \leq 1$, et $\operatorname{Im} u \neq \{0\}$, soit $\operatorname{rg} u \geq 1$. Ainsi, $1 \leq \operatorname{rg} u \leq \dim(\ker u) \leq 1$, soit :

$$\operatorname{rg} u = \dim(\ker u) = 1.$$

Finalement, on a $\operatorname{Im} u \subset \ker u$ et $\operatorname{rg} u = \dim(\ker u)$, donc :

$$\ker u = \operatorname{Im} u$$

Q5. Reprenons le vecteur x introduit dans **Q2**.

D'après **Q3**, la famille $(e_1, e_2) = (x, u(x))$ est libre. Comme elle contient 2 vecteurs, c'est une base de E (qui est de dimension 2). Et :

$$u(e_1) = u(x) = e_2 \quad \text{et} \quad u(e_2) = u(u(x)) = u^2(x) = 0.$$

Ainsi :

Dans la base $(e_1, e_2) = (x, u(x))$ de E , la matrice de u est égale à $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Q6. On a $\operatorname{Tr}(0_2) = \det(0_2) = 0$.

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, non nulle, et u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ canoniquement associé à M .

Si M est nilpotente, u l'est aussi par définition, et on vient de voir qu'alors il existe une base de $\mathbb{C}^2$ dans laquelle la matrice de u est J_2 , autrement dit, M est semblable à la matrice J_2 . Alors :

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(M) &= \operatorname{Tr}(J_2) = 0 \\ \det(M) &= \det(J_2) = 0 \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que $\operatorname{Tr}(M) = \det(M) = 0$.

Alors, M n'est pas inversible (car $\det(M) = 0$), il existe donc un vecteur $e_2 \neq 0$ tel que $u(e_2) = 0$. Si on complète ce vecteur en une base (e_1, e_2) de $\mathbb{C}^2$, on a :

$$M_{(e_1, e_2)}(u) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } a, c \in \mathbb{C}.$$

Alors, $\operatorname{Tr}(M) = \operatorname{Tr}(u) = \operatorname{Tr}(N) = a = 0$, donc $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ et $N^2 = 0_2$, ce qui prouve que u est nilpotent, donc que M est nilpotente.

Finalement, M est nilpotente si et seulement si $\operatorname{Tr}(M) = \det(M) = 0$, autrement dit :

Les matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ sont les matrices de trace nulle et de déterminant nul.

III – Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, nilpotente d'indice 2

Q7. Comme dans **Q4**, $p = 2$ donne $u^2 = u \circ u = 0$, et donc :

$$\text{Im } u \subset \ker u$$

Ceci implique que $r = \text{rg } u \leq \dim(\ker u)$ et le théorème du rang donne :

$$\text{rg } u + \dim(\ker u) = r + \dim(\ker u) = \dim E = n \Leftrightarrow \dim(\ker u) = n - r.$$

Alors, $r \leq \dim(\ker u)$ se récrit $r \leq n - r$, soit :

$$2r \leq n$$

Q8. On suppose ici que $\ker u = \text{Im } u$.

On a $r = \text{rg } u$. Soit $(f_1, f_2, \dots, f_r)$ est une base de $\text{Im } u$. Comme pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $f_k \in \text{Im } u$, il existe $e_k \in E$ tel que $f_k = u(e_k)$.

Montrons alors que la famille $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r))$ est libre.

Soient $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2, \dots, \lambda_r, \mu_r$ des scalaires tels que :

$$\lambda_1 e_1 + \mu_1 u(e_1) + \lambda_2 e_2 + \mu_2 u(e_2) + \dots + \lambda_r e_r + \mu_r u(e_r) = 0.$$

En appliquant u , on obtient (sans oublier que $u^2 = 0$) :

$$\lambda_1 u(e_1) + \mu_1 u^2(e_1) + \lambda_2 u(e_2) + \mu_2 u^2(e_2) + \dots + \lambda_r u(e_r) + \mu_r u^2(e_r) = \lambda_1 u(e_1) + \lambda_2 u(e_2) + \dots + \lambda_r u(e_r) = 0.$$

Or, la famille $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_r)) = (f_1, f_2, \dots, f_r)$ est une base $\text{Im } u$, elle est libre et donc :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0.$$

On a alors $\mu_1 u(e_1) + \mu_2 u(e_2) + \dots + \mu_r u(e_r) = 0$ et la liberté de $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_r))$ implique aussi que :

$$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_r = 0.$$

Finalement, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_r = 0$, donc la famille $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r))$ est libre.

Enfin, toujours avec $\ker u = \text{Im } u$, on a $\dim(\ker u) = n - r = r$, donc :

$$n = 2r.$$

Ainsi, $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r))$ est une famille libre de $2r = n = \dim E$ vecteurs de E , donc :

$$\text{La famille } \mathcal{B} = (e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r)) \text{ est une base de } E.$$

Pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $u(u(e_k)) = u^2(e_k) = 0$, donc :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & 0 & 0 \\ 0 & & & & \ddots & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Q9. On suppose ici que $\ker u \neq \text{Im } u$.

Avec toujours $\text{Im } u \subset \ker u$, on a $r < \dim(\ker u)$ et donc $2r < n$, soit $n - 2r \geq 1$.

Comme dans la question précédente, on considère $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_r))$ une base de $\text{Im } u$ que l'on peut compléter en $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_r), v_1, v_2, \dots, v_{n-2r})$ une base de $\ker u$ (car $\text{Im } u \subset \ker u$).

Soient $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2, \dots, \lambda_r, \mu_r, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-2r}$ des scalaires tels que :

$$\lambda_1 e_1 + \mu_1 u(e_1) + \dots + \lambda_r e_r + \mu_r u(e_r) + \gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_{n-2r} v_{n-2r} = 0.$$

En appliquant u , on obtient (sans oublier que $u^2 = 0$ et que les v_k sont dans $\ker u$) :

$$\lambda_1 u(e_1) + \dots + \lambda_r u(e_r) = 0.$$

Par liberté de $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_r))$, qui est une base de $\text{Im } u$, on a $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0$ et donc :

$$\mu_1 u(e_1) + \dots + \mu_r u(e_r) + \gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_{n-2r} v_{n-2r} = 0.$$

Par liberté de $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_r), v_1, v_2, \dots, v_{n-2r})$, qui est une base de $\ker u$, on a :

$$\mu_1 = \dots = \mu_r = \gamma_1 = \dots = \gamma_{n-2r} = 0.$$

Et donc :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = \mu_1 = \dots = \mu_r = \gamma_1 = \dots = \gamma_{n-2r} = 0.$$

Ceci prouve que la famille $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r), v_1, v_2, \dots, v_{n-2r})$ est libre et, comme elle contient $2r + n - 2r = n = \dim E$ vecteurs de E :

La famille $\mathcal{B} = (e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r), v_1, v_2, \dots, v_{n-2r})$ est une base de E .

Pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $u(u(e_k)) = u^2(e_k) = 0$ et tout $k \in \llbracket 1, n - 2r \rrbracket$, $u(v_k) = 0$, donc :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & & & & & & & 0 \\ & 0 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & & 1 & 0 & \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

←-----2r-----→ ←n-2r→

IV – Racines carrées de matrices nilpotentes

IV.1) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ et on note u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à A .

Q10. On a :

$$\text{Tr}(A) = 1 + 6 - 7 = 0$$

Notons C_1, C_2, C_3 les colonnes de A . On a $C_1 \neq 0$, $C_2 = 2C_1$ et $C_3 = -7C_1$, donc :

$$\text{rg}(A) = 1$$

Q11. On a $AC_1 = 0_{3,1}$, donc $AC_2 = AC_3 = 0_{3,1}$ et ainsi, $A^2 = 0_3$. Comme $A \neq 0_3$:

A est nilpotente d'indice 2.

Q12. On veut montrer que A est semblable à $\text{diag}(J_2, J_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$.

Autrement dit, on veut prouver l'existence d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{C}^3$ telle que $u(e_1) = e_2$ (donc $e_2 \in \text{Im } u$) et $u(e_2) = u(e_3) = 0$ (donc $e_2, e_3 \in \ker u$). Comme $\dim(\ker u) = 3 - \text{rg } u = 2$ (d'après le théorème du rang), on a alors $\text{Im } u = \text{Vect}(e_2)$ et $\ker u = \text{Vect}(e_2, e_3)$.

On a $C_1 \in \text{Im } u$ et on a vu que $AC_1 = 0_{3,1}$ donc $C_1 \in \ker u$. Ainsi, on peut poser $e_2 = C_1$ (en identifiant les espaces $\mathbb{C}^3$ et $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$).

Reste à trouver e_1 un antécédent de e_2 par u et e_3 un autre vecteur de $\ker u$, non colinéaire à e_2 .

Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$, on a $AX = (x + 3y - 7z)C_1$, donc :

- $AX = C_1$ quand $x + 3y - 7z = 1$, donc $e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un antécédent de e_2 par u ;
- $AX = 0_{3,1}$ quand $x + 3y - 7z = 0$, donc $e_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker u$ et n'est pas colinéaire à e_2 .

Remarquons qu'alors, **Q9** permet de conclure que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est bien une base de $\mathbb{C}^3$. Ainsi :

$$P^{-1}AP = \text{diag}(J_2, J_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Q13. On a $A^2 = 0_3$, donc si $R^2 = A$, alors $R^4 = (R^2)^2 = A^2 = 0_3$, donc R est nilpotente et ainsi :

p est nilpotent.

On a de plus $\rho^2 = u$, donc $\rho u = \rho \rho^2 = \rho^3 = \rho^2 \rho = u \rho$, donc u et ρ commutent, ce qui permet de conclure immédiatement que :

$\text{Im } u$ et $\ker u$ sont stables par ρ .

Q14. Notons $N = \text{diag}(J_2, J_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Rappelons que l'on a alors $P^{-1}AP = N$.

Soient $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et $R' = P^{-1}RP$. On a $R'^2 = (P^{-1}RP)^2 = P^{-1}R^2P$, donc :

$$R'^2 = A \Leftrightarrow P^{-1}R^2P = P^{-1}AP \Leftrightarrow R'^2 = N.$$

Remarquons aussi que dans ce cas, R' et N commutent (car ρ et u commutent).

Alors, si on pose $R' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, on a :

$$NR' = R'N \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 \\ h & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = e \\ b = c = h = 0 \end{cases} \Leftrightarrow R' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & a & f \\ g & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Alors, $R'^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2ad + fg & a^2 & af + fi \\ ag + gi & 0 & i^2 \end{pmatrix}$ et :

$$R'^2 = N \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = i^2 = 0 \\ af + fi = 0 \\ ag + gi = 0 \\ 2ad + fg = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = i = 0 \\ fg = 1 \end{cases} \Leftrightarrow R' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 1/g \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$R'^2 = A \Leftrightarrow R' = P^{-1}RP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1/\beta \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow R = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1/\beta \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$.

Finalement :

L'ensemble des racines carrées de A est $\left\{ P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1/\beta \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \right\}$.

IV.2)

Q15. On considère une éventuelle matrice $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $R^2 = J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a :

$$R^4 = J_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } R^6 = J_3^3 = 0_3.$$

Le résultat ci-dessus montre que R est nilpotente d'indice $p > 4$ (car $R^4 \neq 0_3$).

Or, on peut reprendre le raisonnement effectué dans les questions **Q2** et **Q3** : en partant d'un vecteur x de E tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$, on montre que la famille $(u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$ est libre et donc que $p \leq 3$.

On arrive ainsi à une absurdité ($p > 4$ et $p \leq 3$), donc :

L'équation matricielle $R^2 = J_3$ n'admet pas de solution.

IV.3)

Q16. Soit $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

De la même façon que ci-dessus (toujours avec la méthode des questions **Q2** et **Q3**), on prouve que si R est nilpotente d'indice $q \in \mathbb{N}^*$, alors $q \leq n$.

Si $R^2 = V$, on a :

$$R^{2(p-1)} = V^{p-1} \neq 0_n \text{ et } R^{2p} = V^p = 0_n.$$

Ceci prouve que R est nilpotente d'indice $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $q > 2(p-1)$, soit $q \geq 2p-1$.

Comme $q \leq n$, on a forcément $2p-1 \leq n$ et ainsi :

Si $2p-1 > n$, alors il n'existe aucune solution.

Q17. Il suffit de prendre $V = R^2$ avec $R = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ \vdots & & (0) & & 0 \\ 0 & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

On a $V = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & & & 0 & 0 \\ \vdots & & (0) & & 0 \\ 0 & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ et $V^2 = 0_n$ donc :

V est nilpotente d'indice $p = 2$ et admet R comme racine carrée.

V – Réduction des matrices nilpotentes

Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p \geq 2$, donc $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $u^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Q18. On a $\text{Im } u \subset E$, donc $u(\text{Im } u) \subset u(E) = \text{Im } u$ et ainsi :

$\text{Im } u$ est stable par u .

Soit $\tilde{u} \in \mathcal{L}(\text{Im } u)$ l'endomorphisme induit par u sur $\text{Im } u$.

Pour tout $x \in \text{Im } u$, il existe $z \in E$ tel que $x = u(z)$ et :

$$\tilde{u}^{p-1}(x) = u^{p-1}(x) = u^{p-1}(u(z)) = u^p(z) = 0.$$

Donc, $\tilde{u}^{p-1} = 0_{\mathcal{L}(\text{Im } u)}$ et $\tilde{u}$ est nilpotent d'indice inférieur ou égal à $p-1$.

Deux cas se présentent.

- Si $p = 2$, alors $\tilde{u} = 0_{\mathcal{L}(\text{Im } u)}$, donc $\tilde{u}$ est nilpotent d'indice 1.
- Si $p \geq 3$, il existe $z \in E$ tel que $u^{p-1}(z) \neq 0$ (car $u^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$). En posant $x = u(z) \in \text{Im } u$, on a :

$$\tilde{u}^{p-2}(x) = u^{p-2}(x) = u^{p-2}(u(z)) = u^{p-1}(z) \neq 0.$$

Donc, $\tilde{u}^{p-2} \neq 0_{\mathcal{L}(\text{Im } u)}$ et $\tilde{u}$ est nilpotent d'indice $p-1$.

Finalement, dans les deux cas :

$\tilde{u}$ est nilpotent d'indice $p-1$.

Q19. Pour $x \in E \setminus \{0\}$, on note $C_u(x) = \text{Vect}(u^k(x), k \in \mathbb{N})$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u(u^k(x)) = u^{k+1}(x) \in C_u(x)$, donc $u(C_u(x)) \subset C_u(x)$, autrement dit :

$C_u(x)$ est stable par u .

On a $u^p(x) = 0$, donc l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^*, u^k(x) = 0\}$ est non vide (il contient p). Or, toute partie non vide de $\mathbb{N}^*$ admet un plus petit élément, donc :

Il existe un plus petit entier $s(x) \geq 1$ tel que $u^{s(x)}(x) = 0$.

Q20. La famille $(x, u(x), \dots, u^{s(x)-1}(x))$ est une famille de vecteurs de $C_u(x)$.

Par définition, $s(x) \in \{k \in \mathbb{N}^*, u^k(x) = 0\}$, donc $u^{s(x)}(x) = 0$.

De plus :

- si $s(x) = 1$, alors $u^{s(x)-1}(x) = x \neq 0$;
- si $s(x) \geq 2$, alors $s(x) - 1 \in \mathbb{N}^*$, mais $s(x) - 1 < s(x) = \min\{k \in \mathbb{N}^*, u^k(x) = 0\}$, donc $s(x) - 1 \notin \{k \in \mathbb{N}^*, u^k(x) = 0\}$ et $u^{s(x)-1}(x) \neq 0$.

Ainsi, dans les deux cas, on a $u^{s(x)-1}(x) \neq 0$.

On montre alors comme dans la question **Q3** que :

La famille $(x, u(x), \dots, u^{s(x)-1}(x))$ est libre.

De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq s(x)$, on a :

$$u^k(x) = u^{k-s(x)+s(x)}(x) = u^{k-s(x)}(u^{s(x)}(x)) = u^{k-s(x)}(0) = 0.$$

Donc, $C_u(x) = \text{Vect}(u^k(x), k \in \mathbb{N}) = \text{Vect}(x, u(x), \dots, u^{s(x)-1}(x))$ et ainsi

La famille $(x, u(x), \dots, u^{s(x)-1}(x))$ est génératrice de $C_u(x)$.

Finalement, la famille $(x, u(x), \dots, u^{s(x)-1}(x))$ est libre et génératrice de $C_u(x)$, donc :

$$(x, u(x), \dots, u^{s(x)-1}(x)) \text{ est une base de } C_u(x).$$

Notons $\tilde{u}_x \in \mathcal{L}(C_u(x))$ l'endomorphisme induit par u sur $C_u(x)$.

Pour tout $k \in \llbracket 0, s(x)-1 \rrbracket$, on a $\tilde{u}_x(u^k(x)) = u(u^k(x)) = u^{k+1}(x)$, avec $\tilde{u}_x(u^{s(x)-1}(x)) = u^{s(x)}(x) = 0$.

On a donc :

$$M_{(x, u(x), \dots, u^{s(x)-1}(x))}(\tilde{u}_x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = J_{s(x)}$$

Q21. On veut prouver par récurrence sur $p \geq 2$ que pour tout $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E de dimension finie et tout endomorphisme u de E , nilpotent d'indice p , il existe des vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_t \in E$ tels que $E = \bigoplus_{i=1}^t C_u(x_i)$.

Initialisation

Pour $p = 2$, on a vu dans la partie **III** qu'il existe une famille $(e_1, \dots, e_r, v_1, \dots, v_{n-2r})$ de vecteurs de E (avec $r = \text{rg } u$) telle que $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r), v_1, v_2, \dots, v_{n-2r})$ est une base de E et $v_k \in \ker u$ pour tout $k \in \llbracket 1, n-2r \rrbracket$, donc $C_u(v_k) = \text{Vect}(v_k)$.

De plus, comme $u^2 = 0$, on a $C_u(e_i) = \text{Vect}(e_i, u(e_i))$ pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$.

Comme $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r), v_1, v_2, \dots, v_{n-2r})$ est une base de E , on a

$$\begin{aligned} E &= \text{Vect}(e_1, u(e_1)) \oplus \dots \oplus \text{Vect}(e_r, u(e_r)) \oplus \text{Vect}(v_1) \oplus \dots \oplus \text{Vect}(v_{n-2r}) \\ &= C_u(e_1) \oplus \dots \oplus C_u(e_r) \oplus C_u(v_1) \oplus \dots \oplus C_u(v_{n-2r}) \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $p = 2$.

Hérédité

On suppose que la propriété est vraie à un rang $p \geq 2$.

Soit alors u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E de dimension finie n , avec u nilpotent d'indice $p+1$.

Dans la question **Q18**, on a vu que $\text{Im } u$ est stable par u et que l'endomorphisme $\tilde{u}$ induit par u sur $\text{Im } u$ est nilpotent, d'indice $p+1-1 = p$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à $\tilde{u}$.

Ainsi, il existe des vecteurs $y_1, y_2, \dots, y_t \in \text{Im } u$ tels que $\text{Im } u = \bigoplus_{i=1}^t C_{\tilde{u}}(y_i)$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$, $y_i \in \text{Im } u$ donc il existe $x_i \in E$ tel que $y_i = u(x_i)$.

Remarquons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $u^{k+1}(x_i) = u^k(u(x_i)) = u^k(y_i)$, donc $u^{s(y_i)}(x_i) = u^{s(y_i)-1}(y_i) \neq 0$ et $u^{s(y_i)+1}(x_i) = u^{s(y_i)}(y_i) = 0$, et ainsi :

$$s(x_i) = s(y_i) + 1.$$

Soit $(\lambda_{i,k})_{\substack{1 \leq i \leq t \\ 0 \leq k \leq s(y_i)}}$ une famille de scalaires telle que :

$$\sum_{i=1}^t \sum_{k=0}^{s(y_i)} \lambda_{i,k} u^k(x_i) = 0.$$

En appliquant u , on obtient :

$$u \left(\sum_{i=1}^t \sum_{k=0}^{s(y_i)} \lambda_{i,k} u^k(x_i) \right) = \sum_{i=1}^t \sum_{k=0}^{s(y_i)} \lambda_{i,k} u^{k+1}(x_i) = \sum_{i=1}^t \sum_{k=0}^{s(y_i)} \lambda_{i,k} u^k(y_i) = \sum_{i=1}^t \sum_{k=0}^{s(y_i)-1} \lambda_{i,k} u^k(y_i) = 0.$$

Or, les $C_{\tilde{u}}(y_i) = \text{Vect}(y_i, u(y_i), \dots, u^{s(y_i)-1}(y_i))$ sont en somme directe, donc la famille $(u^k(y_i))_{\substack{1 \leq i \leq t \\ 0 \leq k \leq s(y_i)-1}}$ est libre, donc la relation ci-dessus implique que $\lambda_{i,k} = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$ et tout $k \in \llbracket 0, s(y_i)-1 \rrbracket$. On a alors :

$$\sum_{i=1}^t \lambda_{i,s(y_i)} u^{s(y_i)}(x_i) = \sum_{i=1}^t \lambda_{i,s(y_i)} u^{s(y_i)-1}(y_i) = 0.$$

Or, pour tout $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$, $\lambda_{i,s(y_i)} u^{s(y_i)-1}(y_i) \in C_{\tilde{u}}(y_i)$ et toujours du fait de la somme directe des $C_{\tilde{u}}(y_i)$, on a $\lambda_{i,s(y_i)} = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$.

Finalement, $\sum_{i=1}^t \sum_{k=0}^{s(y_i)} \lambda_{i,k} u^k(x_i) = 0$ implique que $\lambda_{i,k} = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$ et tout $k \in \llbracket 0, s(y_i) \rrbracket$, donc la famille $(u^k(x_i))_{\substack{1 \leq i \leq t \\ 0 \leq k \leq s(y_i)}}$ est libre. Avec $C_u(x_i) = \text{Vect}(x_i, u(x_i), u^2(x_i), \dots, u^{s(y_i)}(x_i))$ pour tout $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$, ceci prouve que :

$$\sum_{i=1}^t C_u(x_i) = \bigoplus_{i=1}^t C_u(x_i).$$

Remarquons que ceci implique que pour tout $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$, la famille $(x_i, u(x_i), u^2(x_i), \dots, u^{s(y_i)}(x_i))$ est libre et donc que :

$$\begin{aligned} C_u(x_i) &= \text{Vect}(x_i, u(x_i), u^2(x_i), \dots, u^{s(y_i)}(x_i)) \\ &= \text{Vect}(x_i, u(x_i), u^2(x_i), \dots, u^{s(y_i)-1}(x_i)) \oplus \text{Vect}(u^{s(y_i)}(x_i)) \\ &= C_u'(x_i) \oplus \text{Vect}(u^{s(y_i)}(x_i)) \end{aligned}$$

avec $C_u'(x_i) = \text{Vect}(x_i, u(x_i), u^2(x_i), \dots, u^{s(y_i)-1}(x_i))$.

On a alors :

$$\bigoplus_{i=1}^t C_u(x_i) = F \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^t \text{Vect}(u^{s(y_i)}(x_i)) \right) = F \oplus \text{Vect}(u^{s(y_1)}(x_1), \dots, u^{s(y_t)}(x_t)) \quad (1)$$

avec $F = \bigoplus_{i=1}^t C_u'(x_i)$.

On a :

$$\dim F = \sum_{i=1}^t \dim(C_u'(x_i)) = \sum_{i=1}^t s(y_i) = \dim \left(\bigoplus_{i=1}^t C_{\tilde{u}}(y_i) \right) = \dim(\text{Im } u) = \text{rg } u.$$

Donc :

$$\dim F + \dim(\ker u) = \text{rg } u + \dim(\ker u) = n.$$

Ceci permet de conclure que :

$$F + \ker u = F \oplus \ker u = E \quad (2)$$

Par ailleurs, pour tout $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$, $u(u^{s(y_i)}(x_i)) = u^{s(y_i)}(u(x_i)) = u^{s(y_i)}(y_i) = 0$ donc $u^{s(y_i)}(x_i) \in \ker u$. Ainsi :

$$\text{Vect}(u^{s(y_1)}(x_1), \dots, u^{s(y_t)}(x_t)) \subset \ker u.$$

De plus, $\dim(\text{Vect}(u^{s(y_1)}(x_1), \dots, u^{s(y_t)}(x_t))) = t$ car la famille $(u^{s(y_1)}(x_1), \dots, u^{s(y_t)}(x_t))$ est extraite d'une famille libre, donc libre.

On peut compléter la famille $(u^{s(y_1)}(x_1), \dots, u^{s(y_t)}(x_t))$ en une base $(u^{s(y_1)}(x_1), \dots, u^{s(y_t)}(x_t), v_1, \dots, v_\alpha)$ de $\ker u$ avec $\dim(\ker u) = t + \alpha = n - \text{rg } u$, donc $\alpha = n - \text{rg } u - t$.

Comme la famille $(u^{s(y_1)}(x_1), \dots, u^{s(y_t)}(x_t), v_1, \dots, v_\alpha)$ est une base de $\ker u$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \ker u &= \text{Vect}(u^{s(y_1)}(x_1), \dots, u^{s(y_t)}(x_t), v_1, \dots, v_\alpha) \\ &= \text{Vect}(u^{s(y_1)}(x_1), \dots, u^{s(y_t)}(x_t)) \oplus \text{Vect}(v_1) \oplus \dots \oplus \text{Vect}(v_\alpha) \end{aligned}$$

Et comme plus haut $C_u(v_k) = \text{Vect}(v_k)$, pour tout $k \in \llbracket 1, \alpha \rrbracket$, donc :

$$\ker u = \text{Vect}(u^{s(y_1)}(x_1), \dots, u^{s(y_t)}(x_t)) \oplus C_u(v_1) \oplus \dots \oplus C_u(v_\alpha) \quad (3)$$

Finalement, avec (1), (2) et (3), on obtient :

$$\begin{aligned} E &= F \oplus \ker u \\ &= F \oplus \text{Vect}(u^{s(y_1)}(x_1), \dots, u^{s(y_t)}(x_t)) \oplus C_u(v_1) \oplus \dots \oplus C_u(v_\alpha). \\ &= \left(\bigoplus_{i=1}^t C_u(x_i) \right) \oplus C_u(v_1) \oplus \dots \oplus C_u(v_\alpha) \end{aligned}$$

Ceci prouve que la propriété est vraie au rang $p+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $p \geq 2$.

Ainsi, pour tout endomorphisme u de E , nilpotent d'indice p :

Il existe $x_1, x_2, \dots, x_t \in E$ tels que $E = \bigoplus_{i=1}^t C_u(x_i)$.

Q22. Pour tout $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$, $C_u(x_i)$ est stable par u (question **Q19**) et il existe une base $(x_i, u(x_i), \dots, u^{s(x_i)-1}(x_i))$ de $C_u(x_i)$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme induit par u sur $C_u(x_i)$ est $J_{s(x_i)}$ (question **Q20**).

Comme $E = \bigoplus_{i=1}^t C_u(x_i)$, $\mathcal{B} = (x_1, u(x_1), \dots, u^{s(x_1)-1}(x_1), \dots, x_t, u(x_t), \dots, u^{s(x_t)-1}(x_t))$ est une base de E , on peut immédiatement conclure que la matrice de u dans cette base $\mathcal{B}$, adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^t C_u(x_i)$, est :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \text{diag}(J_{s(x_1)}, \dots, J_{s(x_t)})$$

V – Exponentielle d'une matrice nilpotente

Q23. Voir le TD n° 2.

Q24. Pour tout entier $\alpha \geq 2$, on peut écrire $J_\alpha = \left(\begin{array}{c|c} 0_{1,\alpha-1} & 0_1 \\ \hline I_{\alpha-1} & 0_{\alpha-1,1} \end{array} \right) = (\delta_{i,j+1})_{i,j \in \llbracket 1, \alpha \rrbracket}$.

Prouvons par récurrence finie sur k que pour tout $k \in \llbracket 1, \alpha \rrbracket$:

$$J_\alpha^k = (\delta_{i,j+k})_{i,j \in \llbracket 1, \alpha \rrbracket} \left[= \left(\begin{array}{c|c} 0_{k, \alpha-k} & 0_k \\ \hline I_{\alpha-k} & 0_{\alpha-k, k} \end{array} \right) \text{ quand } k \in \llbracket 1, \alpha-1 \rrbracket \right].$$

- D'après ce que l'on vient de voir, la propriété est vraie au rang $k=1$.
- Supposons la propriété vraie à un rang $k \in \llbracket 1, \alpha-1 \rrbracket$ (possible car $\alpha-1 \geq 1$).

En notant $[M]_{i,j}$ les coefficients d'une matrice M , on a pour tous $i, j \in \llbracket 1, \alpha \rrbracket$:

$$[J_\alpha^{k+1}]_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{\alpha} [J_\alpha]_{i,\ell} [J_\alpha^k]_{\ell,j} = \sum_{\ell=1}^{\alpha} \delta_{i,\ell+1} \delta_{\ell,j+k} = \delta_{i,j+k+1}.$$

Donc, $J_\alpha^{k+1} = (\delta_{i,j+k+1})_{i,j \in \llbracket 1, \alpha \rrbracket} = \left(\begin{array}{c|c} 0_{k, \alpha-k} & 0_k \\ \hline I_{\alpha-k} & 0_{\alpha-k, k} \end{array} \right)$ et la propriété est vraie au rang $k+1$.

Ainsi, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $k \in \llbracket 1, \alpha \rrbracket$.

Remarquons qu'alors $J_\alpha^\alpha = (\delta_{i,j+\alpha})_{i,j \in \llbracket 1, \alpha \rrbracket} = 0_\alpha$ car pour tous $i, j \in \llbracket 1, \alpha \rrbracket$, $i \leq \alpha < j+\alpha$, donc $\delta_{i,j+\alpha} = 0$.

Alors, pour tout entier $k \geq \alpha$, $J_\alpha^k = J_\alpha^{k-\alpha} J_\alpha^\alpha = J_\alpha^{k-\alpha} 0_\alpha = 0_\alpha$ et finalement pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$J_\alpha^k = (\delta_{i,j+k})_{i,j \in \llbracket 1, \alpha \rrbracket} = \begin{cases} I_\alpha & \text{quand } k=0 \\ \left(\begin{array}{c|c} 0_{k, \alpha-k} & 0_k \\ \hline I_{\alpha-k} & 0_{\alpha-k, k} \end{array} \right) & \text{quand } k \in \llbracket 1, \alpha-1 \rrbracket \\ 0_\alpha & \text{quand } k \geq \alpha \end{cases}$$

On a alors :

$$\exp(J_\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} J_\alpha^k = \sum_{k=0}^{\alpha-1} \frac{1}{k!} (\delta_{i,j+k})_{i,j \in \llbracket 1, \alpha \rrbracket}.$$

Soit :

$$\exp(J_\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 1/2 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 1/\alpha! & \cdots & 1/2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Q25. D'après la question **Q22**, la matrice de u dans une base adaptée $\mathcal{B}$ est :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \text{diag}(J_{s(x_1)}, \dots, J_{s(x_r)}).$$

Alors :

$$\begin{aligned} \exp(M_{\mathcal{B}}(u)) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (M_{\mathcal{B}}(u))^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\text{diag}(J_{s(x_1)}, \dots, J_{s(x_r)}) \right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\text{diag}(J_{s(x_1)}^k, \dots, J_{s(x_r)}^k) \right) \\ &= \text{diag} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} J_{s(x_1)}^k, \dots, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} J_{s(x_r)}^k \right) = \text{diag}(\exp(J_{s(x_1)}), \dots, \exp(J_{s(x_r)})) \end{aligned}$$

Donc :

$$\exp(M_{\mathcal{B}}(u)) = \text{diag} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 1/2 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 1/s(x_1)! & \cdots & 1/2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 1/2 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 1/s(x_i)! & \cdots & 1/2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Problème n° 2

Q26. Supposons que α est un nombre rationnel. Il existe alors $p, q \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tels que $\alpha = \frac{p}{q}$. On a alors :

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| \frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q} \frac{|pq_n - qp_n|}{q_n} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{q_n} \right).$$

Donc, $pq_n - qp_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(1)$, autrement dit, $pq_n - qp_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $pq_n - qp_n$ est entier et une suite d'entiers qui converge vers 0 est nulle à partir d'un certain rang. Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $pq_N - qp_N = 0$, soit $\frac{p_N}{q_N} = \frac{p}{q} = \alpha$. Ceci contredit l'hypothèse que $\frac{p_n}{q_n} \neq \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc supposer que α est rationnel mène à une absurdité. Ainsi :

α est un nombre irrationnel.

Q27. La série $\sum \frac{1}{k^2}$ est une série de Riemann convergente (car $2 > 1$), donc :

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \text{ est bien défini.}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $k \mid d_n$ (car $d_n = \text{PPCM}(1, 2, \dots, n)$) et on peut poser $\lambda_k = \frac{d_n}{k} \in \mathbb{N}^*$.

On a alors :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\lambda_k}{d_n} \right)^2 = \frac{1}{d_n^2} \sum_{k=1}^n \lambda_k^2.$$

Et donc en posant $p_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \in \mathbb{N}^*$ et $q_n = d_n^2$, on a bien :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{p_n}{q_n}$$

Q28. On a bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_n}{q_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \zeta(2)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \zeta(2) - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t} \right]_n^{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n^2}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} &\leq \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \Leftrightarrow \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^2} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Et comme $\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, le théorème des gendarmes appliqué aux équivalents permet de conclure que :

$$\left| \zeta(2) - \frac{p_n}{q_n} \right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Or, $n \mid d_n$, donc $\frac{q_n}{n} = \frac{d_n^2}{n} \geq d_n \geq n$ et par comparaison :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n \left| \zeta(2) - \frac{p_n}{q_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q_n}{n} = +\infty.$$

Ainsi, on a $\frac{1}{q_n} = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\left| \zeta(2) - \frac{p_n}{q_n} \right| \right)$ et non $\left| \zeta(2) - \frac{p_n}{q_n} \right| = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{q_n} \right)$, comme le réclame la question **Q26**.

Finalement :

On ne peut pas appliquer le résultat de la question **Q26** aux suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour conclure sur l'irrationalité de $\zeta(2)$.

Partie B – Calcul d'une intégrale double

I – Une intégrale double

Q29. Soit $y \in [0, 1[$. La fonction $x \mapsto \frac{x^r y^s}{1-xy}$ est une fonction rationnelle, donc définie et continue sur $[0, 1]$.

Ainsi, l'intégrale $\int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy} dx$ existe et donc :

La fonction $f_{r,s} : y \mapsto \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy} dx$ est bien définie sur $[0, 1[$.

Q30. Soit $y \in [0, 1[$ fixé. Pour tout $x \in [0, 1]$, $xy \in [0, 1[$ et donc, on peut écrire :

$$\frac{x^r y^s}{1-xy} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^r y^s (xy)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} y^{n+s} x^{n+r}.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\varphi_n : x \mapsto y^{n+s} x^{n+r}$ est continue sur $[0, 1]$ et $\sup_{x \in [0, 1]} |\varphi_n(x)| = y^{n+s}$.

Comme la série géométrique $\sum y^{n+s}$ converge (car $|y| < 1$), la série $\sum \varphi_n$ converge normalement, et donc uniformément sur $[0, 1]$, et on peut écrire :

$$f_{r,s}(y) = \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy} dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} y^{n+s} x^{n+r} \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 y^{n+s} x^{n+r} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} y^{n+s} \int_0^1 x^{n+r} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} y^{n+s} \left[\frac{x^{n+r+1}}{n+r+1} \right]_0^1.$$

Soit, pour tout $y \in [0, 1[$:

$$f_{r,s}(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{n+s}}{n+r+1}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\psi_n : y \mapsto \frac{y^{n+s}}{n+r+1}$ est continue sur $[0, 1[$ et pour tout $a \in [0, 1[$, on a :

$$\sup_{y \in [0, a]} |\psi_n(y)| = \frac{a^{n+s}}{n+r+1} \leq a^n.$$

Comme la série géométrique $\sum a^n$ converge (car $|a| < 1$), la série $\sum \psi_n$ converge normalement, et donc uniformément sur $[0, a]$. On peut donc conclure que $f_{r,s} = \sum_{n=0}^{+\infty} \psi_n$ est continue sur $[0, a]$. Ceci étant vrai pour tout $a \in [0, 1[$:

$$f_{r,s} \text{ est continue sur } \bigcup_{a \in [0, 1[} [0, a] = [0, 1[.$$

De plus, pour tout $t \in [0, 1[$, ψ_n est continue sur $[0, t]$ et $\sum \psi_n$ converge uniformément sur $[0, t]$, donc :

$$\int_0^t f_{r,s}(y) dy = \int_0^t \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \psi_n(y) \right) dy = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^t \psi_n(y) dy = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^t \frac{y^{n+s}}{n+r+1} dy = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{y^{n+s+1}}{(n+r+1)(n+s+1)} \right]_0^t.$$

Soit, pour tout $t \in [0, 1[$:

$$\int_0^t f_{r,s}(y) dy = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+s+1}}{(n+r+1)(n+s+1)}$$

Q32. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\theta_n : t \mapsto \frac{t^{n+s+1}}{(n+r+1)(n+s+1)}$ est continue sur $[0, 1]$ et :

$$\sup_{t \in [0, 1]} |\theta_n(t)| = \frac{1}{(n+r+1)(n+s+1)}.$$

Comme $\frac{1}{(n+r+1)(n+s+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum \sup_{t \in [0, 1]} |\theta_n(t)|$ converge par comparaison de séries à termes positifs. Ainsi, la série de fonctions $\sum \theta_n$ converge normalement, donc uniformément sur $[0, 1]$, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \theta_n$ est continue sur $[0, 1]$, d'où :

$$\lim_{t \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+s+1}}{(n+r+1)(n+s+1)} = \lim_{t \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{+\infty} \theta_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \theta_n(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+r+1)(n+s+1)}.$$

Autrement dit :

$$\lim_{t \rightarrow 1} \int_0^t f_{r,s}(y) dy = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+r+1)(n+s+1)}$$

II – Une écriture sous forme de quotient

Q33. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{r-s} \left(\frac{1}{n+s+1} - \frac{1}{n+r+1} \right) = \frac{1}{r-s} \frac{(n+r+1) - (n+s+1)}{(n+r+1)(n+s+1)} = \frac{1}{r-s} \frac{r-s}{(n+r+1)(n+s+1)}.$$

Donc, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{(n+r+1)(n+s+1)} = \frac{1}{r-s} \left(\frac{1}{n+s+1} - \frac{1}{n+r+1} \right)$$

Q34. On a :

$$J_{r,s} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+r+1)(n+s+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{r-s} \left(\frac{1}{n+s+1} - \frac{1}{n+r+1} \right) = \frac{1}{r-s} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+s+1} - \frac{1}{n+r+1} \right).$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, en réindexant (en posant $k = n+s+1$ dans la première somme et $k = n+r+1$ dans la seconde), on obtient :

$$\sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{n+s+1} - \frac{1}{n+r+1} \right) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n+s+1} - \sum_{n=0}^N \frac{1}{n+r+1} = \sum_{k=s+1}^{N+s+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=r+1}^{N+r+1} \frac{1}{k}.$$

Et en prenant $N \geq r-s$, on peut écrire :

$$\sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{n+s+1} - \frac{1}{n+r+1} \right) = \sum_{k=s+1}^r \frac{1}{k} + \sum_{k=r+1}^{N+s+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=r+1}^{N+s+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=N+s+2}^{N+r+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=s+1}^r \frac{1}{k} - \sum_{k=N+s+2}^{N+r+1} \frac{1}{k}.$$

Et :

$$\frac{r-s}{N+r+1} = \sum_{k=N+s+2}^{N+r+1} \frac{1}{N+r+1} \leq \sum_{k=N+s+2}^{N+r+1} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=N+s+2}^{N+r+1} \frac{1}{N+s+2} = \frac{r-s}{N+s+2}$$

Comme $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{r-s}{N+r+1} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{r-s}{N+s+2} = 0$, on a $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=N+s+2}^{N+r+1} \frac{1}{k} = 0$ d'après le théorème des gendarmes, d'où :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+s+1} - \frac{1}{n+r+1} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{n+s+1} - \frac{1}{n+r+1} \right) = \sum_{k=s+1}^r \frac{1}{k}.$$

Finalement, on a bien :

$$J_{r,s} = \frac{1}{r-s} \sum_{k=s+1}^r \frac{1}{k}$$

Q34. On procède comme dans la question **Q27**. Avec $d_r = \text{PPCM}(1, 2, \dots, r)$, on a $k \mid d_r$ pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$,

donc on peut poser $\delta_k = \frac{d_r}{k} \in \mathbb{N}^*$ pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$ (y compris $r-s \in \llbracket 1, r \rrbracket$). Alors :

$$J_{r,s} = \frac{\delta_{r-s}}{d_r} \sum_{k=s+1}^r \frac{\delta_k}{d_r} = \frac{1}{d_r^2} \sum_{k=s+1}^r \delta_{r-s} \delta_k.$$

Et en posant $p_{r,s} = \sum_{k=s+1}^r \delta_{r-s} \delta_k \in \mathbb{N}^*$ et $q_{r,s} = d_r^2 \in \mathbb{N}^*$, on a bien :

$$J_{r,s} = \frac{p_{r,s}}{q_{r,s}}$$

Q36. Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a en réindexant et avec $r \geq 1$:

$$J_{r,r} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+r+1)^2} = \sum_{k=r+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^r \frac{1}{k^2}.$$

Soit :

$$J_{r,r} = \zeta(2) - \sum_{k=1}^r \frac{1}{k^2}$$

Enfin, $J_{0,0} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$, soit :

$$J_{0,0} = \zeta(2)$$

Partie C – Une démonstration de l'irrationalité de $\zeta(2)$

Q37. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [0,1]$:

$$g_n(x) = x^n(1-x)^n = x^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-x)^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^{n+k}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{n!} g_n^{(n)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n+k)(n+k-1)\dots(k+1)x^k \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(n+k)}{n!k!} x^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} x^k \end{aligned}$$

Comme $(-1)^n \binom{n}{n} \binom{2n}{n} = (-1)^n \binom{2n}{n} \neq 0$ et $(-1)^k \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} \in \mathbb{Z}$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

P_n est bien une fonction polynomiale sur $[0,1]$ de degré n et à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Q38. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous $x, y \in [0,1]$:

$$(1-y)^n P_n(x) = P_n(x)(1-y)^n = \left(\sum_{r=0}^n a_r x^r \right) \left(\sum_{s=0}^n b_s y^s \right) = \sum_{0 \leq r,s \leq n} a_r b_s x^r y^s.$$

Donc, pour tout $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} \int_0^t \left(\int_0^1 \frac{(1-y)^n P_n(x)}{1-xy} dx \right) dy &= \int_0^t \left(\int_0^1 \frac{1}{1-xy} \sum_{0 \leq r,s \leq n} a_r b_s x^r y^s dx \right) dy \\ &= \int_0^t \left(\sum_{0 \leq r,s \leq n} a_r b_s \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy} dx \right) dy = \sum_{0 \leq r,s \leq n} a_r b_s \int_0^t \left(\int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy} dx \right) dy \end{aligned}$$

Donc, avec $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy} dx dy = J_{r,s}$ pour tous $r, s \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \lim_{t \rightarrow 1} \int_0^t \left(\int_0^1 \frac{(1-y)^n P_n(x)}{1-xy} dx \right) dy = \sum_{0 \leq r, s \leq n} a_r b_s \lim_{t \rightarrow 1} \int_0^t \left(\int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy} dx \right) dy = \sum_{0 \leq r, s \leq n} a_r b_s J_{r,s}.$$

Et ainsi :

$$I_n = \sum_{\substack{0 \leq r, s \leq n \\ r \neq s}} a_r b_s J_{r,s} + \sum_{r=0}^n a_r b_r J_{r,r}$$

Q39. Remarquons que pour tous $r, s \in \mathbb{N}$:

$$J_{r,s} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+r+1)(n+s+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+s+1)(n+r+1)} = J_{s,r}.$$

Alors, d'après la question **Q35**, on a quand $s > r$, $J_{r,s} = J_{s,r} = \frac{p_{s,r}}{q_{s,r}}$ avec $p_{s,r} \in \mathbb{N}^*$ et $q_{s,r} = d_s^2 \in \mathbb{N}^*$.

Donc, pour tous $r, s \in \mathbb{N}$ tels que $r \neq s$, on a $J_{r,s} = \frac{\alpha_{r,s}}{d_{\max(r,s)}^2}$ avec $\alpha_{s,r} \in \mathbb{N}^*$.

De plus, d'après la question **Q27**, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a $\sum_{k=1}^r \frac{1}{k^2} = \frac{\beta_r}{d_r^2}$ avec $\beta_r \in \mathbb{N}^*$.

Enfin, d'après la question **Q36**, $J_{0,0} = \zeta(2)$ et pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a $J_{r,r} = \zeta(2) - \sum_{k=1}^r \frac{1}{k^2}$.

Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $d_k = \text{PPCM}(1, 2, \dots, k)$ donc $d_n = \text{PPCM}(d_k, k+1, \dots, n)$ et ainsi, $d_k \mid d_n$, donc on peut

écrire $\frac{d_n}{d_k} = \gamma_k \in \mathbb{N}^*$, soit $\frac{1}{d_k^2} = \frac{\gamma_k^2}{d_n^2}$ avec $\gamma_k^2 \in \mathbb{N}^*$. On a alors :

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{\substack{0 \leq r, s \leq n \\ r \neq s}} a_r b_s J_{r,s} + \sum_{r=0}^n a_r b_r J_{r,r} = \sum_{\substack{0 \leq r, s \leq n \\ r \neq s}} a_r b_s J_{r,s} + \sum_{r=1}^n a_r b_r J_{r,r} + a_0 b_0 J_{0,0} \\ &= \sum_{\substack{0 \leq r, s \leq n \\ r \neq s}} a_r b_s \frac{\alpha_{r,s}}{d_{\max(r,s)}^2} + \sum_{r=1}^n a_r b_r \left(\zeta(2) - \sum_{k=1}^r \frac{1}{k^2} \right) + a_0 b_0 \zeta(2) \\ &= \sum_{\substack{0 \leq r, s \leq n \\ r \neq s}} a_r b_s \frac{\alpha_{r,s}}{d_{\max(r,s)}^2} - \sum_{r=1}^n a_r b_r \left(\sum_{k=1}^r \frac{1}{k^2} \right) + \sum_{r=1}^n a_r b_r \zeta(2) + a_0 b_0 \zeta(2) \\ &= \sum_{\substack{0 \leq r, s \leq n \\ r \neq s}} a_r b_s \frac{\alpha_{r,s}}{d_{\max(r,s)}^2} - \sum_{r=1}^n a_r b_r \frac{\beta_r}{d_r^2} + \left(\sum_{r=0}^n a_r b_r \right) \zeta(2) \\ &= \sum_{\substack{0 \leq r, s \leq n \\ r \neq s}} a_r b_s \frac{\gamma_{\max(r,s)}^2 \alpha_{r,s}}{d_n^2} - \sum_{r=1}^n a_r b_r \frac{\gamma_r^2 \beta_r}{d_n^2} + \left(\sum_{r=0}^n a_r b_r \right) \zeta(2) \\ &= \frac{1}{d_n^2} \left[\sum_{\substack{0 \leq r, s \leq n \\ r \neq s}} a_r b_s \gamma_{\max(r,s)}^2 \alpha_{r,s} - \sum_{r=1}^n a_r b_r \gamma_r^2 \beta_r + \left(d_n^2 \sum_{r=0}^n a_r b_r \right) \zeta(2) \right] \end{aligned}$$

Alors, on posant $p_n = \sum_{\substack{0 \leq r, s \leq n \\ r \neq s}} a_r b_s \gamma_{\max(r,s)}^2 \alpha_{r,s} - \sum_{r=1}^n a_r b_r \gamma_r^2 \beta_r$ et $q_n = d_n^2 \sum_{r=0}^n a_r b_r$, on a $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$ (comme somme d'entiers relatifs) et :

$$I_n = \frac{p_n + q_n \zeta(2)}{d_n^2}$$

Q40. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $y \in]0, 1[$, $\int_0^1 \frac{P_n(x)}{1-xy} dx$ est bien défini ($x \mapsto \frac{P_n(x)}{1-xy}$ est une fonction rationnelle définie, donc continue sur $[0, 1]$) et :

$$\int_0^1 \frac{P_n(x)}{1-xy} dx = \frac{1}{n!} \int_0^1 \frac{1}{1-xy} g_n^{(n)}(x) dx.$$

Prouvons alors par récurrence finie sur k que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\int_0^1 \frac{P_n(x)}{1-xy} dx = \frac{(-y)^k k!}{n!} \int_0^1 \frac{1}{(1-xy)^{k+1}} g_n^{(n-k)}(x) dx.$$

Initialisation : Pour $k=0$, on a bien $\int_0^1 \frac{P_n(x)}{1-xy} dx = \frac{(-y)^0 0!}{n!} \int_0^1 \frac{1}{(1-xy)^{0+1}} g_n^{(n-0)}(x) dx$ d'après ce que l'on vient de voir, donc la propriété est vraie au rang $k=0$.

Hérédité : Supposons la propriété vraie à un rang $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ (possible car $n \in \mathbb{N}^*$, donc $n \geq 1$).

On a alors par hypothèse de récurrence et en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{P_n(x)}{1-xy} dx &= \frac{(-y)^k k!}{n!} \int_0^1 \frac{1}{(1-xy)^{k+1}} g_n^{(n-k)}(x) dx \\ &= \frac{(-y)^k k!}{n!} \left(\left[\frac{1}{(1-xy)^{k+1}} g_n^{(n-k-1)}(x) \right]_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{(-y)(k+1)}{(1-xy)^{k+2}} \right) g_n^{(n-k-1)}(x) dx \right) \\ &= \left(\frac{g_n^{(n-k+1)}(1)}{(1-y)^{k+1}} - g_n^{(n-k-1)}(0) \right) + \frac{(-y)^{k+1} (k+1)!}{n!} \int_0^1 \frac{1}{(1-xy)^{k+2}} g_n^{(n-(k+1))}(x) dx \end{aligned}$$

Or, si $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a $n-k-1 \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et comme 0 et 1 sont racines de multiplicité n de la fonction polynomiale $g_n : x \mapsto x^n(1-x)^n$, on a $g_n^{(n-k+1)}(1) = g_n^{(n-k-1)}(0) = 0$. D'où :

$$\int_0^1 \frac{P_n(x)}{1-xy} dx = \frac{(-y)^{k+1} (k+1)!}{n!} \int_0^1 \frac{1}{(1-xy)^{k+2}} g_n^{(n-(k+1))}(x) dx.$$

Et la propriété est vraie au rang $k+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En particulier pour $k=n$:

$$\int_0^1 \frac{P_n(x)}{1-xy} dx = \frac{(-y)^n n!}{n!} \int_0^1 \frac{1}{(1-xy)^{n+1}} g_n^{(n-n)}(x) dx = (-y)^n \int_0^1 \frac{g_n(x)}{(1-xy)^{n+1}} dx.$$

Soit :

$$\int_0^1 \frac{P_n(x)}{1-xy} dx = (-y)^n \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n}{(1-xy)^{n+1}} dx$$

Pour $y = 0$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{P_n(x)}{1-xy} dx &= \int_0^1 P_n(x) dx = \frac{1}{n!} \int_0^1 g_n^{(n)}(x) dx = \frac{1}{n!} [g_n^{(n-1)}(x)]_0^1 \\ &= \frac{g_n^{(n-1)}(1) - g_n^{(n-1)}(0)}{n!} = \frac{0-0}{n!} = 0 = (-0)^n \int_0^1 x^n (1-x)^n dx\end{aligned}$$

Ainsi :

La relation $\int_0^1 \frac{P_n(x)}{1-xy} dx = (-y)^n \int_0^1 \frac{x^n (1-x)^n}{(1-xy)^{n+1}} dx$ reste vraie pour $y = 0$.

Q41. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $y \in [0, 1[$, $\int_0^1 \frac{P_n(x)}{1-xy} dx = (-y)^n \int_0^1 \frac{x^n (1-x)^n}{(1-xy)^{n+1}} dx$, donc pour tout $t \in [0, 1[$:

$$\begin{aligned}\int_0^t \left(\int_0^1 \frac{(1-y)^n P_n(x)}{1-xy} dx \right) dy &= \int_0^t \left((1-y)^n \int_0^1 \frac{P_n(x)}{1-xy} dx \right) dy = \int_0^t \left((1-y)^n (-y)^n \int_0^1 \frac{x^n (1-x)^n}{(1-xy)^{n+1}} dx \right) dy \\ &= (-1)^n \int_0^t \left(\int_0^1 \frac{x^n (1-x)^n y^n (1-y)^n}{(1-xy)^{n+1}} dx \right) dy\end{aligned}$$

Et en passant à la limite quand $t \rightarrow 1$ (qui existe par définition de I_n), on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = (-1)^n \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n (1-x)^n y^n (1-y)^n}{(1-xy)^{n+1}} dx dy$$

Q42. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $y \in]0, 1[$, la fonction $x \mapsto \frac{x^n (1-x)^n y^n (1-y)^n}{(1-xy)^{n+1}}$ est continue, non nulle et positive sur $[0, 1]$, donc :

$$\int_0^1 \frac{x^n (1-x)^n y^n (1-y)^n}{(1-xy)^{n+1}} dx > 0.$$

Pour $y = 0$ ou 1 , la fonction $x \mapsto \frac{x^n (1-x)^n y^n (1-y)^n}{(1-xy)^{n+1}}$ est nulle, donc :

$$\int_0^1 \frac{x^n (1-x)^n y^n (1-y)^n}{(1-xy)^{n+1}} dx = 0.$$

Ainsi, la fonction $y \mapsto \int_0^1 \frac{x^n (1-x)^n y^n (1-y)^n}{(1-xy)^{n+1}} dx$ est continue (admis), non nulle et positive sur $[0, 1]$ et donc

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n (1-x)^n y^n (1-y)^n}{(1-xy)^{n+1}} dx dy > 0.$$

Ainsi, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n \neq 0$$

Q43. Pour tout $y \in]0,1[$, considérons la fonction $\Psi : x \mapsto \frac{x(1-x)y(1-y)}{1-xy} = y(1-y) \frac{x^2-x}{xy-1}$.

Cette fonction est définie et rationnelle, donc dérivable sur $[0,1]$, et pour tout $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}\Psi'(x) &= y(1-y) \frac{yx^2-2x+1}{(xy-1)^2} = y(1-y) \frac{(1-x)^2-x^2(1-y)}{(xy-1)^2} \\ &= y(1-y) \frac{1-x+x\sqrt{1-y}}{(xy-1)^2} (1-x(1+\sqrt{1-y})) \\ &= \frac{1-x+x\sqrt{1-y}}{(xy-1)^2} (1+\sqrt{1-y}) \left(\frac{1}{1+\sqrt{1-y}} - x \right)\end{aligned}$$

Comme $y(1-y) \frac{1-x+x\sqrt{1-y}}{(xy-1)^2} (1+\sqrt{1-y}) > 0$, $\Psi'(x)$ est du signe de $\frac{1}{1+\sqrt{1-y}} - x$.

Comme $1 < 1+\sqrt{1-y} < 2$, on a $\frac{1}{1+\sqrt{1-y}} \in]0,1[$, donc Ψ' s'annule et change de signe en $\frac{1}{1+\sqrt{1-y}}$ (en passant de positif en $x=0$ à négatif en $x=1$).

Ainsi, Ψ est croissante sur $\left[0, \frac{1}{1+\sqrt{1-y}}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{1+\sqrt{1-y}}, 1\right]$. Enfin, comme $\Psi(0) = \Psi(1) = 0$,

Ψ est maximale en $\frac{1}{1+\sqrt{1-y}}$ et ainsi, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $y \in]0,1[$:

$$\Psi(x) \leq \Psi\left(\frac{1}{1+\sqrt{1-y}}\right).$$

On a :

$$\Psi\left(\frac{1}{1+\sqrt{1-y}}\right) = \frac{\frac{1}{1+\sqrt{1-y}} \left(1 - \frac{1}{1+\sqrt{1-y}}\right) y(1-y)}{1 - \frac{1}{1+\sqrt{1-y}} y} = \frac{\frac{\sqrt{1-y}}{1+\sqrt{1-y}} \frac{y(1-y)}{\sqrt{1-y}+1-y}}{\left(\frac{1}{1+\sqrt{1-y}}\right)^2}.$$

Posons $t = \sqrt{1-y} \in]0,1[$. On a alors $y = 1-t^2$ et :

$$\frac{y(1-y)}{\left(1+\sqrt{1-y}\right)^2} = \frac{(1-t^2)t^2}{(1+t)^2} = \frac{(1-t)t^2}{1+t}.$$

La fonction $\Theta : t \mapsto \frac{(1-t)t^2}{1+t}$ est définie et rationnelle, donc dérivable sur $[0,1]$, de dérivée $\Theta' : t \mapsto 2t \frac{1-t-t^2}{(1+t)^2}$.

Le trinôme $1-t-t^2$ a pour racines $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \in]0,1[$ et $-\frac{1+\sqrt{5}}{2} < 0$. Il est positif entre ses racines, donc Θ' est

positive sur $\left[0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$ et négative sur $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1\right]$. Alors, Θ est croissante sur $\left[0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$ et décroissante sur

$\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1\right]$. Comme $\Theta(0) = \Theta(1) = 0$, Θ est maximale en $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et pour tout $t \in [0,1]$, $\Theta(t) \leq \Theta\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

Ainsi, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $y \in]0, 1[$:

$$\frac{x(1-x)y(1-y)}{1-xy} \leq \frac{y(1-y)}{(1+\sqrt{1-y})^2} \leq \Theta\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \frac{5\sqrt{5}-11}{2}.$$

Notons que pour $y=0$ et tout $x \in [0, 1]$, l'inégalité ci-dessus reste vraie car le membre de gauche est alors nul.

Ainsi, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $y \in [0, 1[$:

$$0 \leq \frac{x(1-x)y(1-y)}{1-xy} \leq \frac{5\sqrt{5}-11}{2}$$

Remarquons préalablement que $\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy = J_{0,0} = \zeta(2)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|I_n| = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n (1-x)^n y^n (1-y)^n}{(1-xy)^{n+1}} dx dy = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{x(1-x)y(1-y)}{1-xy} \right)^n \frac{1}{1-xy} dx dy.$$

Et pour tout $t \in [0, 1[$ et tout $(x, y) \in [0, 1] \times [0, t]$, on a $1-xy > 0$ et :

$$0 \leq \left(\frac{x(1-x)y(1-y)}{1-xy} \right)^n \frac{1}{1-xy} \leq \left(\frac{5\sqrt{5}-11}{2} \right)^n \frac{1}{1-xy}.$$

Donc :

$$\int_0^1 \left(\frac{x(1-x)y(1-y)}{1-xy} \right)^n \frac{1}{1-xy} dx \leq \int_0^1 \left(\frac{5\sqrt{5}-11}{2} \right)^n \frac{1}{1-xy} dx \leq \left(\frac{5\sqrt{5}-11}{2} \right)^n \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx.$$

Puis :

$$\int_0^t \int_0^1 \left(\frac{x(1-x)y(1-y)}{1-xy} \right)^n \frac{1}{1-xy} dx dy \leq \int_0^t \left(\frac{5\sqrt{5}-11}{2} \right)^n \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy = \left(\frac{5\sqrt{5}-11}{2} \right)^n \int_0^t \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy.$$

Et en passant à la limite quand $t \rightarrow 1$ (les deux membres en ont une, on obtient :

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{x(1-x)y(1-y)}{1-xy} \right)^n \frac{1}{1-xy} dx dy \leq \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{5\sqrt{5}-11}{2} \right)^n \frac{1}{1-xy} dx dy = \left(\frac{5\sqrt{5}-11}{2} \right)^n \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy.$$

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|I_n| \leq \zeta(2) \left(\frac{5\sqrt{5}-11}{2} \right)^n$$

D'après la question **Q39**, on obtient :

$$\left| \frac{p_n + \zeta(2)q_n}{d_n^2} \right| \leq \zeta(2) \left(\frac{5\sqrt{5}-11}{2} \right)^n \Leftrightarrow |p_n + \zeta(2)q_n| \leq \zeta(2) d_n^2 \left(\frac{5\sqrt{5}-11}{2} \right)^n.$$

Or, avec le résultat admis au début de ce problème ($d_n \leq 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$), on peut écrire :

$$|p_n + \zeta(2)q_n| \leq \zeta(2) (3^n)^2 \left(\frac{5\sqrt{5}-11}{2} \right)^n.$$

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{|p_n + \zeta(2)q_n| \leq \zeta(2) \left(9 \frac{5\sqrt{5}-11}{2}\right)^n}$$

Q44. On a :

$$0 < 9 \frac{5\sqrt{5}-11}{2} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 5\sqrt{5}-11 > 0 \\ 9(5\sqrt{5}-11) < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\sqrt{5} > 11 \\ 45\sqrt{5} < 101 \end{cases}.$$

Or :

$$\begin{cases} (5\sqrt{5})^2 = 25 = 125 > 121 = 11^2 \\ (45\sqrt{5})^2 = \left(\frac{90}{2}\right)^2 \times \frac{10}{2} = \frac{81000}{8} = 10125 < 10201 = 10000 + 200 + 1 = (100+1)^2 = 101^2 \end{cases}$$

Donc, on a bien $5\sqrt{5} > 11$ et $45\sqrt{5} < 101$, soit :

$$\boxed{0 < 9 \frac{5\sqrt{5}-11}{2} < 1}$$

Q45. Comme $0 < 9 \frac{5\sqrt{5}-11}{2} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \zeta(2) \left(9 \frac{5\sqrt{5}-11}{2}\right)^n = 0$, donc avec l'inégalité de la question **Q43** et le théorème des gendarmes, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (p_n + \zeta(2)q_n) = 0.$$

Supposons alors que $\zeta(2)$ est un nombre rationnel.

Il existe donc $p, q \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tels que $\zeta(2) = \frac{p}{q}$.

On a alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(p_n + \frac{p}{q}q_n\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (qp_n + pq_n) = 0.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $qp_n + pq_n$ est entier relatif, donc, comme dans la question **Q26**, la suite d'entiers $(qp_n + pq_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, qui converge vers 0, est nulle à partir d'un certain rang.

Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $qp_N + pq_N = 0$, et :

$$I_N = \frac{p_N + \zeta(2)q_N}{d_N^2} = \frac{qp_N + pq_N}{qd_N^2} = 0.$$

Ceci contredit le résultat de la question **Q42**, donc est absurde et ainsi :

$$\boxed{\zeta(2) \text{ est un nombre irrationnel.}}$$