

DM de Mathématiques n° 3
Théorème de Weierstrass
Exemple via un théorème de Dini

 1) *Question préliminaire*

Soit $x \in [0, 1]$. On note $I =]-\infty, \sqrt{x}]$ et on pose, pour tout $t \in I$, $g_x(t) = t + \frac{1}{2}(x - t^2)$.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = g_x(u_n) = u_n + \frac{1}{2}(x - u_n^2).$$

Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite en fonction du réel x .

- 2) Proposer un exemple de suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues sur $[a, b]$ qui converge simplement mais pas uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f continue sur $[a, b]$. On pourra s'appuyer sur une représentation graphique précise et propre sans nécessairement donner f_n sous forme analytique.

Pour traiter la suite de cette partie, on admettra le résultat suivant.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ qui converge simplement vers une fonction f , elle-même continue sur $[a, b]$. Si la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, c'est-à-dire si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [a, b]$, $f_n(t) \leq f_{n+1}(t)$, alors la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

- 3) *Application* : Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définie par $P_0(x) = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n(x)^2).$$

- a. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est une fonction polynômiale.
- b. Justifier que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction $h : x \mapsto \sqrt{x}$.
- c. Démontrer que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers h .

Démonstration du théorème de Weierstrass

On se propose de donner dans cette partie une démonstration probabiliste du théorème d'approximation de Weierstrass pour une fonction continue sur $[0, 1]$.

Dans toute cette partie, f est une fonction continue sur $[0, 1]$ et à valeurs réelles.

Soient n est un entier naturel non nul et $x \in [0, 1]$. On pose :

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \quad (\text{polynôme de Bernstein}).$$

4) Soit S_n une variable aléatoire réelle suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, x)$.

a. Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$, on a :

$$P(|S_n - nx| \geq n\alpha) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}.$$

b. Soit la variable aléatoire $f\left(\frac{S_n}{n}\right)$, démontrer que son espérance vérifie :

$$E\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = B_n(f)(x).$$

5) Soit un réel $\varepsilon > 0$. On admet qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $(a, b) \in [0, 1]^2$:

$$|a - b| \leq \alpha \Rightarrow |f(a) - f(b)| \leq \varepsilon.$$

a. Majorer $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|$ pour tout entier k compris entre 0 et n , et vérifiant $\left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \alpha$.

b. Justifier que :

$$\left| \sum_{0 \leq k \leq n, \left|\frac{k}{n} - x\right| > \alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) P(S_n = k) \right| \leq 2\|f\|_{\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right).$$

c. Prouver qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$ et tout réel $x \in [0, 1]$, on a $|B_n(f)(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$, puis conclure.