

DS de Mathématiques n° 2
4 heures
Calculatrices interdites

N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Le sujet comporte 7 pages.
Problème n° 1
Extrait adapté de Centrale-Supélec 2019 – PSI – Mathématiques 2
Notations et rappels

Dans tout le sujet, n désigne un entier naturel non nul et E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension n .

Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on appelle *trace de M* la somme de ses coefficients diagonaux, notée $\text{tr}(M)$.

Un endomorphisme de E est dit *nilpotent* s'il existe un entier naturel $k \geq 1$ tel que $u^k = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel $k \geq 1$ tel que $u^k = 0$ s'appelle l'*indice de nilpotence* de u .

Une matrice M est dite *nilpotente* s'il existe un entier naturel $k \geq 1$ tel que $M^k = 0_n$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel $k \geq 1$ tel que $M^k = 0_n$ s'appelle l'*indice de nilpotence* de M .

Il est alors immédiat qu'un endomorphisme de E est nilpotent d'indice p si et seulement si sa matrice dans une base $\mathcal{B}$ de E est nilpotente d'indice p .

On pose $J_1 = (0)$, la matrice nulle de $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$, et pour tout entier $\alpha \geq 2$:

$$J_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_\alpha(\mathbb{C}).$$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, on note $\text{diag}(A, B)$, la matrice diagonale par blocs :

$$\text{diag}(A, B) = \begin{pmatrix} A & 0_{n,m} \\ 0_{m,n} & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+m}(\mathbb{C}).$$

Plus généralement, si $A_1 \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{C})$, $A_2 \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{C})$, ..., $A_p \in \mathcal{M}_{n_p}(\mathbb{C})$, on note $\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_p)$, la matrice diagonale par blocs :

$$\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_p) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n_1+n_2+\dots+n_p}(\mathbb{C}).$$

On admettra que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_p))^k = \text{diag}(A_1^k, A_2^k, \dots, A_p^k)$.

Dans ce qui suit, u est un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p \in \mathbb{N}^*$.

I – Préliminaires

- Q1.** Que peut-on dire d'un endomorphisme nilpotent d'indice 1 ?
- Q2.** Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$.
- Q3.** Vérifier que la famille $(u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$ est libre. En déduire que $p \leq n$.

II – Réduction d'une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

On suppose que $n = 2$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p \geq 2$.

- Q4.** Justifier que $p = 2$ et montrer que $\ker u = \text{Im } u$.
- Q5.** Construire une base de E dans laquelle la matrice de u est égale à J_2 .
- Q6.** En déduire que les matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ sont exactement les matrices de trace nulle et de déterminant nul.

III – Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, nilpotente d'indice 2

On suppose que $n \geq 3$. Soit u un endomorphisme de E , nilpotent d'indice 2 et de rang r .

- Q7.** Montrer que $\text{Im } u \subset \ker u$ et que $2r \leq n$.
- Q8.** On suppose que $\ker u = \text{Im } u$. Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_r$ de E tels que $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r))$ est une base de E . Donner la matrice de u dans cette base.
- Q9.** On suppose $\ker u \neq \text{Im } u$. Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_r$ de E et des vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_{n-2r}$ appartenant à $\ker u$ tels que $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r), v_1, v_2, \dots, v_{n-2r})$ est une base de E . Quelle est la matrice de u dans cette base ?

IV – Racines carrées de matrices nilpotentes

Pour une matrice $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donnée, on dit qu'une matrice $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une racine carrée de V si $R^2 = V$. On se propose dans cette partie d'étudier l'existence et les valeurs de racines carrées éventuelles de certaines matrices nilpotentes.

IV.1) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ et on note u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à A .

Q10. Calculer la trace et le rang de A .

Q11. Montrer que A est nilpotente et donner son indice de nilpotence.

Q12. Démontrer que A est semblable à la matrice $\text{diag}(J_2, J_1)$.

Donner une matrice P inversible telle que $\text{diag}(J_2, J_1) = P^{-1}AP$.

On cherche à déterminer l'ensemble des matrices $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $R^2 = A$. On note p l'endomorphisme canoniquement associé à une éventuelle telle matrice R .

Q13. Démontrer que $\text{Im } u$ et $\ker u$ sont stables par p et que p est nilpotent.

Q14. En déduire l'ensemble des racines carrées de A .

☺ On pourra considérer $R' = P^{-1}RP$.

IV.2) On se propose dans cette question d'étudier l'équation matricielle $R^2 = J_3$.

Q15. Soit R une solution de cette équation. Donner les valeurs de R^4 et R^6 , puis l'ensemble des solutions de l'équation.

IV.3) Plus généralement, soit $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice p . On se propose d'étudier l'équation $R^2 = V$.

Q16. Montrer que si $2p - 1 > n$, alors il n'existe aucune solution.

Q17. Pour toute valeur de l'entier $n \geq 3$, exhiber une matrice $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, nilpotente d'indice $p \geq 2$ et admettant au moins une racine carrée.

V – Réduction des matrices nilpotentes

On cherche dans cette partie à généraliser les résultats des sous-parties II et III.

On suppose $n \geq 2$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p \geq 2$.

Q18. Démontrer que $\text{Im } u$ est stable par u et que l'endomorphisme induit par u sur $\text{Im } u$ est nilpotent. Préciser son indice de nilpotence.

Q19. Pour tout vecteur x non nul de E , on note $C_u(x)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $(u^k(x))_{k \in \mathbb{N}}$. Démontrer que $C_u(x)$ est stable par u et qu'il existe un plus petit entier $s(x) \geq 1$ tel que $u^{s(x)}(x) = 0$.

Q20. Démontrer que $(x, u(x), \dots, u^{s(x)-1}(x))$ est une base de $C_u(x)$ et donner la matrice, dans cette base, de l'endomorphisme induit par u sur $C_u(x)$.

Q21. Démontrer par récurrence sur p qu'il existe $x_1, x_2, \dots, x_t \in E$ tels que $E = \bigoplus_{i=1}^t C_u(x_i)$.

☺ On pourra appliquer l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme induit par u sur $\text{Im } u$.

Q22. Donner la matrice de u dans une base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^t C_u(x_i)$.

VI – Exponentielle d'une matrice nilpotente

Q23. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} M^k \right)_{N \in \mathbb{N}}$ converge.

La limite de cette suite est appelée exponentielle de la matrice M et est notée $\exp(M)$.

Q24. Soit un entier $\alpha \geq 2$. Calculer J_α^k pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, puis $\exp(J_\alpha)$.

Q25. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Calculer l'exponentielle de la matrice de u dans une base adaptée telle que la question **Q22**.

Problème n° 2

Extrait adapté de Centrale-Supélec 2025 – MP-MPI – Mathématiques 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le PPCM (Plus Petit Commun Multiple) des entiers naturels compris entre 1 et n , autrement dit :

$$d_n = \text{PPCM}(1, 2, \dots, n).$$

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d_n \leq 3^n$.

Partie A – Un critère d'irrationalité

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

On suppose qu'il existe deux suites d'entiers naturels non nuls $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_n}{q_n} = \alpha \quad \text{et} \quad \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{q_n} \right).$$

On suppose en outre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{p_n}{q_n} \neq \alpha$.

Q26. Montrer que α est un nombre irrationnel.

Q27. Justifier que $\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ est bien défini, puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{p_n}{q_n}$$

avec $p_n \in \mathbb{N}^*$ et $q_n = d_n^2$.

Q28. Peut-on appliquer le résultat de la question **Q26** à ces suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour conclure sur l'irrationalité de $\zeta(2)$?

Partie B – Calcul d'une intégrale double

I – Une intégrale double

Soient r et s deux entiers naturels.

Q29. Justifier que la fonction $f_{r,s} : y \mapsto \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy} dx$ est définie sur $[0,1[$.

Q30. Prouver que pour tout $y \in [0,1[$:

$$f_{r,s}(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{n+s}}{n+r+1}.$$

Q31. Montrer que $f_{r,s}$ est continue sur $[0,1[$ et que pour tout $t \in [0,1[$:

$$\int_0^t f_{r,s}(y) dy = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+s+1}}{(n+r+1)(n+s+1)}.$$

Q32. Prouver que $\lim_{t \rightarrow 1} \int_0^t f_{r,s}(y) dy = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+r+1)(n+s+1)}$.

On pose alors :

$$J_{r,s} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy} dx dy = \lim_{t \rightarrow 1} \int_0^t f_{r,s}(y) dy = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+r+1)(n+s+1)}.$$

II – Une écriture sous forme de quotient

Dans les questions **Q33** à **Q34**, on suppose que $r > s$.

Q33. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{(n+r+1)(n+s+1)} = \frac{1}{r-s} \left(\frac{1}{n+s+1} - \frac{1}{n+r+1} \right).$$

Q34. En déduire que :

$$J_{r,s} = \frac{1}{r-s} \sum_{k=s+1}^r \frac{1}{k}.$$

Q35. En déduire que l'on peut écrire :

$$J_{r,s} = \frac{p_{r,s}}{q_{r,s}}$$

où $p_{r,s}$ et $q_{r,s}$ sont des entiers naturels et $q_{r,s} = d_r^2$.

Q36. Montrer que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$J_{r,r} = \zeta(2) - \sum_{k=1}^r \frac{1}{k^2}.$$

Que vaut $J_{0,0}$?

Partie C – Une démonstration de l'irrationalité de $\zeta(2)$

On définit sur $[0,1]$, les fonctions :

$$g_n : x \mapsto x^n(1-x)^n \text{ et } P_n : x \mapsto \frac{1}{n!} g_n^{(n)}(x).$$

Q37. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que P_n est une fonction polynomiale sur $[0,1]$ de degré n et à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

On pose dans la suite :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad (1-y)^n = \sum_{k=0}^n b_k y^k$$

avec pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_k \in \mathbb{Z}$ et $b_k \in \mathbb{Z}$.

Q38. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-y)^n P_n(x)}{1-xy} dx dy$ définie comme les $J_{r,s}$ plus haut, soit :

$$I_n = \lim_{t \rightarrow 1} \int_0^t \left(\int_0^1 \frac{(1-y)^n P_n(x)}{1-xy} dx \right) dy.$$

Montrer que :

$$I_n = \sum_{\substack{0 \leq r,s \leq n \\ r \neq s}} a_r b_s J_{r,s} + \sum_{r=0}^n a_r b_r J_{r,r}.$$

Q39. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe deux entiers relatifs p_n et q_n tels que :

$$I_n = \frac{p_n + \zeta(2)q_n}{d_n^2}.$$

On admettra dans toute la suite que p_n et q_n sont non nuls pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Q40. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $y \in]0,1[$:

$$\int_0^1 \frac{P_n(x)}{1-xy} dx = (-y)^n \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n}{(1-xy)^{n+1}} dx.$$

Justifier que cette relation reste vraie pour $y = 0$.

Q41. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = (-1)^n \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n (1-x)^n y^n (1-y)^n}{(1-xy)^{n+1}} dx dy.$$

Q42. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \neq 0$.

☺ On admettra que la fonction $y \mapsto \int_0^1 \frac{x^n (1-x)^n y^n (1-y)^n}{(1-xy)^{n+1}} dx$ est continue sur $[0,1]$.

Q43. Montrer que pour tout $(x, y) \in]0,1[^2$:

$$\frac{x(1-x)y(1-y)}{1-xy} \leq \frac{5\sqrt{5}-11}{2}.$$

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|I_n| \leq \zeta(2) \left(\frac{5\sqrt{5}-11}{2} \right)^n.$$

Puis que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|p_n + \zeta(2)q_n| \leq \zeta(2) \left(9 \frac{5\sqrt{5}-11}{2} \right)^n.$$

Q44. Prouver que :

$$0 < 9 \frac{5\sqrt{5}-11}{2} < 1.$$

Q45. Montrer que $\zeta(2)$ est un nombre irrationnel.

Fin de l'énoncé