Corrigé du DM n° 3

1) Soit $x \in [0,1]$ fixé.

La fonction g_x est définie et dérivable sur $I =]-\infty, \sqrt{x}]$ avec $g_x'(t) = 1-t$.

Comme $x \in [0,1]$, on a $I =]-\infty, \sqrt{x}] \subset]-\infty, 1]$. Alors, $g_x'(t) \geq 0$ pour tout $t \in I$, avec égalité seulement quand $x = t = 1$.

La fonction g_x est donc continue (car dérivable) et strictement croissante sur *I*. Ainsi :

$$g_x\left(\left[0, \sqrt{x}\right]\right) = \left[g_x(0), g_x(\sqrt{x})\right] = \left[\frac{1}{2}x, \sqrt{x}\right] \subset \left[0, \sqrt{x}\right] \text{ (car } x \in [0,1]).$$

Comme $u_0 = 0 \in \left[0, \sqrt{x}\right]$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

Prouvons par récurrence que tous ses termes sont dans $\left[0, \sqrt{x}\right]$.

- On a vu que $u_0 \in \left[0, \sqrt{x}\right]$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
- On suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0, \sqrt{x}\right]$. On a alors :

$$g_x\left(\left[0, \sqrt{x}\right]\right) = \left[g_x(0), g_x(\sqrt{x})\right] = \left[\frac{1}{2}x, \sqrt{x}\right] \subset \left[0, \sqrt{x}\right].$$

  Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

Ainsi, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$/

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = g_x(u_n) - u_n = \frac{1}{2}(x - u_n^2).$$

Comme $u_n \in \left[0, \sqrt{x}\right]$, on a $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Ainsi, la suite *u* est croissante et majorée par $\sqrt{x}$, donc elle converge vers une limite $\ell(x) \in \left[0, \sqrt{x}\right]$.

Comme g_x est continue sur $\left[0, \sqrt{x}\right]$, on a :

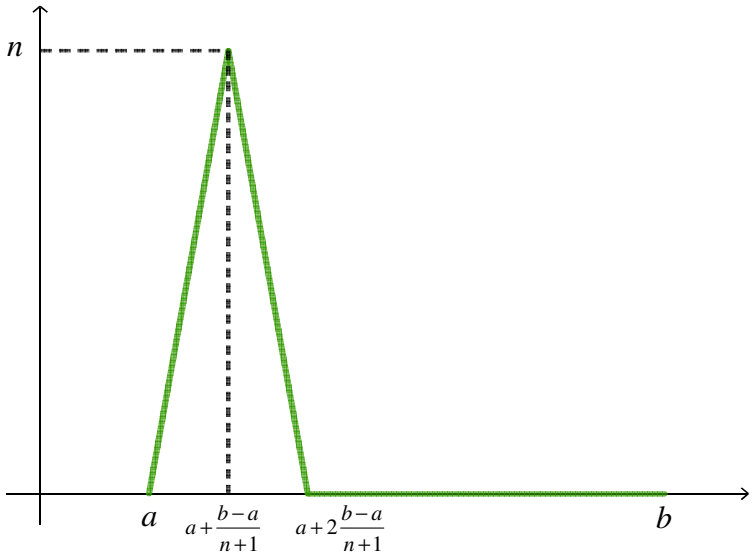
$$g_x\left(\ell(x)\right) = \ell(x) \quad \Leftrightarrow \quad \ell(x) + \frac{1}{2}\left(x - \ell(x)^2\right) = \ell(x) \quad \Leftrightarrow \quad \ell(x)^2 = x.$$

Et comme $\ell(x) \geq 0$, on a $\ell(x) = \sqrt{x}$.

Finalement :

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{x}$.

2) Soit $n\in\mathbb{N}$ et la fonction f_n définie sur $[a,b]$, affine par morceaux, telle que sur le schéma ci-dessous :



On a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n(a)=0$ et pour tout $x\in\left]a,b\right]$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n\geq N$, $a+2\dfrac{b-a}{n+1}\leq x$ et donc $f_n(x)=0$. Ainsi, pour tout $x\in\left[a,b\right]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=0$, donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle qui est continue sur $[a,b]$.

Par contre, $\max\limits_{x\in[a,b]}\left|f_n(x)\right|=n\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$, donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément.

3) a. Prouvons par récurrence sur n que pour tout $n\in\mathbb{N}$, P_n est une fonction polynômiale.

- On a $P_0=0$, qui est polynômiale, donc la propriété est vraie au rang $n=0$.
- On suppose qu'à un rang $n\in\mathbb{N}$, P_n est une fonction polynômiale.

  Alors, $x\mapsto P_n(x)^2$ est polynômiale et il en va de même pour $x\mapsto\dfrac{1}{2}\left(x-P_n(x)^2\right)$. P_{n+1} est alors la somme de deux fonctions polynômiales, donc est polynômiale.

  La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Ainsi :

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, P_n est une fonction polynômiale.

b. Soit $x\in[0,1]$. Si on pose $u_n=P_n(x)$, on a $u_0=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{2}(x-u_n^2)$.

Alors, d'après la question 6, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{x}$. Ceci prouve que :

La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction $h:x\mapsto\sqrt{x}$.

c. On vient de voir que, sur sur $[0,1]$, la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $h : x \mapsto \sqrt{x}$, qui est continue sur $[0,1]$.

De plus, en reprenant les notations ci-dessus, on a vu dans la question 6 que pour tout $x \in [0,1]$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(P_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.

Ainsi, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et donc d'après le résultat admis :

$$\boxed{(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément sur } [0,1] \text{ vers } h.}$$

4) a. Comme S_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,x)$, on a $E(S_n) = nx$ et $V(S_n) = nx(1-x)$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à S_n dit que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$:

$$P\big(|S_n - E(S_n)| \geq a\big) = P\big(|S_n - nx| \geq a\big) \leq \frac{V(S_n)}{a^2} = \frac{nx(1-x)}{a^2}.$$

En prenant $a = n\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on a bien $a \in \mathbb{R}_+^*$ (car $n > 0$) et :

$$P\big(|S_n - nx| \geq n\alpha\big) \leq \frac{nx(1-x)}{(n\alpha)^2} = \frac{x(1-x)}{n\alpha^2}.$$

Or :

$$x(1-x) = x - x^2 = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}.$$

Et ainsi, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{P\big(|S_n - nx| \geq n\alpha\big) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}}$$

b. Comme $\Omega(S_n) = [\![0,n]\!]$ est fini, on peut utiliser directement la formule du transfert, qui donne :

$$E\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) P\big(S_n = k\big) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Soit :

$$\boxed{E\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = B_n(f)(x)}$$

5) a. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on a $\left(x, \frac{k}{n}\right) \in [0,1]^2$, donc, si $\left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \alpha$, on peut écrire :

$$\boxed{\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leq \varepsilon}$$

b. On a :

$$\left|\sum_{0\leq k\leq n,\left|x-\frac{k}{n}\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P\left(S_n=k\right)\right|\leq\sum_{0\leq k\leq n,\left|x-\frac{k}{n}\right|>\alpha}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|P\left(S_n=k\right).$$

Et comme $\|f\|_\infty=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$, on a pour tout $k\in[\![0,n]\!]$:

$$\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\leq\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|+|f(x)|\leq\|f\|_\infty+\|f\|_\infty=2\|f\|_\infty.$$

Ainsi :

$$\left|\sum_{0\leq k\leq n,\left|x-\frac{k}{n}\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P\left(S_n=k\right)\right|\leq\sum_{0\leq k\leq n,\left|x-\frac{k}{n}\right|>\alpha}2\|f\|_\infty P\left(S_n=k\right)=2\|f\|_\infty\sum_{0\leq k\leq n,\left|x-\frac{k}{n}\right|>\alpha}P\left(S_n=k\right).$$

Enfin, on a $\left\{k\in[\![0,n]\!],\left|x-\frac{k}{n}\right|>\alpha\right\}=\left\{k\in\Omega(S_n),\left|x-\frac{k}{n}\right|>\alpha\right\}$ est l'évènement $\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right)$, donc :

$$\sum_{0\leq k\leq n,\left|x-\frac{k}{n}\right|>\alpha}P\left(S_n=k\right)=P\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right).$$

Et ainsi :

$$\boxed{\left|\sum_{0\leq k\leq n,\left|x-\frac{k}{n}\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P\left(S_n=k\right)\right|\leq2\|f\|_\infty P\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right)}$$

c. On a $\sum_{k=0}^{n}P\left(S_n=k\right)=1$, avec $P\left(S_n=k\right)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, donc :

$$\begin{aligned}\left|B_n(f)(x)-f(x)\right|&=\left|\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}-f(x)\sum_{k=0}^{n}P\left(S_n=k\right)\right|\\&=\left|\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)P\left(S_n=k\right)-\sum_{k=0}^{n}f(x)P\left(S_n=k\right)\right|\\&=\left|\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P\left(S_n=k\right)\right|\\&=\left|\sum_{0\leq k\leq n,\left|x-\frac{k}{n}\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P\left(S_n=k\right)+\sum_{0\leq k\leq n,\left|x-\frac{k}{n}\right|\leq\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P\left(S_n=k\right)\right|\end{aligned}$$

Donc :

$$\left|B_n(f)(x)-f(x)\right|\leq\left|\sum_{0\leq k\leq n,\left|x-\frac{k}{n}\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P\left(S_n=k\right)\right|+\left|\sum_{0\leq k\leq n,\left|x-\frac{k}{n}\right|\leq\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P\left(S_n=k\right)\right|.$$

D'après la question précédente, on a :

$$\left|\sum_{0\le k\le n,\ \left|x-\frac{k}{n}\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P(S_n=k)\right|\le 2\|f\|_\infty P\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right).$$

Et, $\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right)=\left(|S_n-nx|>n\alpha\right)\subset\left(|S_n-nx|\ge n\alpha\right)$, donc :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right)\le P\left(|S_n-nx|\ge n\alpha\right).$$

D'après la question 9.a, on a $P\left(|S_n-nx|\ge n\alpha\right)\le\frac{1}{4n\alpha^2}$, donc :

$$\left|\sum_{0\le k\le n,\ \left|x-\frac{k}{n}\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P(S_n=k)\right|\le\frac{2\|f\|_\infty}{4n\alpha^2}=\frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}.$$

De plus, d'après la question 10.a, on a :

$$\left|\sum_{0\le k\le n,\ \left|x-\frac{k}{n}\right|\le\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P(S_n=k)\right|\le\sum_{0\le k\le n,\ \left|x-\frac{k}{n}\right|\le\alpha}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|P(S_n=k)\le\sum_{0\le k\le n,\ \left|x-\frac{k}{n}\right|\le\alpha}\varepsilon P(S_n=k).$$

Et :

$$\sum_{0\le k\le n,\ \left|x-\frac{k}{n}\right|\le\alpha}\varepsilon P(S_n=k)=\varepsilon\sum_{0\le k\le n,\ \left|x-\frac{k}{n}\right|\le\alpha}P(S_n=k)\le\varepsilon\sum_{0\le k\le n}P(S_n=k)=\varepsilon.$$

Donc :

$$\left|\sum_{0\le k\le n,\ \left|x-\frac{k}{n}\right|\le\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P(S_n=k)\right|\le\varepsilon.$$

Ainsi :

$$\left|B_n(f)(x)-f(x)\right|\le\frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}+\varepsilon.$$

Enfin, si $n\ge\frac{\|f\|_\infty}{2\alpha^2\varepsilon}$, on a $\frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}\le\varepsilon$, et :

$$\left|B_n(f)(x)-f(x)\right|\le 2\varepsilon.$$

Ainsi, il existe un entier naturel $n_0=E\left(\frac{\|f\|_\infty}{2\alpha^2\varepsilon}\right)+1$ tel que :

Pour tout entier $n\ge n_0$ et tout réel $x\in[0,1]$, on a $\left\|B_n(f)(x)-f(x)\right\|\le 2\varepsilon$.

Avec $\left\|B_n(f)-f\right\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]}\left|B_n(f)(x)-f(x)\right|$, nous venons de prouver que :

$$\forall \varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ n\geq n_0 \Rightarrow \left\|B_n(f)-f\right\|_\infty \leq 2\varepsilon .$$

Autrement dit, nous venons de prouver que la suite $\left(B_n(f)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction f sur $[0,1]$. Or, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $B_n(f)$ est une fonction polynômiale.

Ceci prouve le théorème de Weierstrass :

La fonction continue f est limite uniforme sur $[0,1]$ d'une suite de fonctions polynômiales.